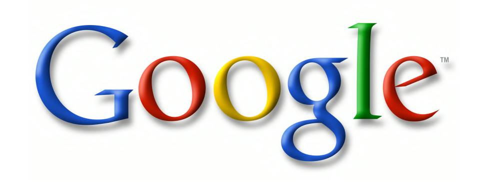
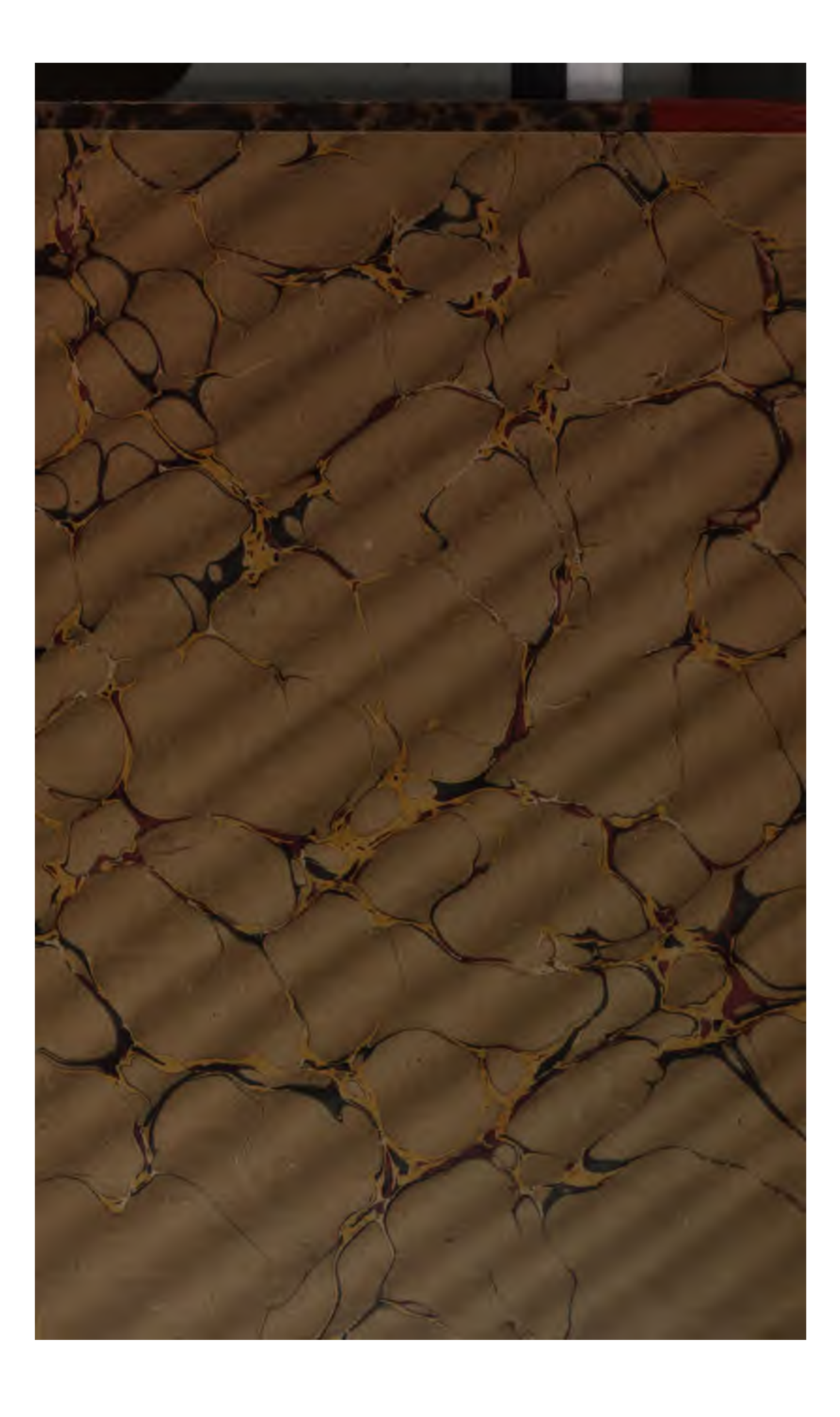
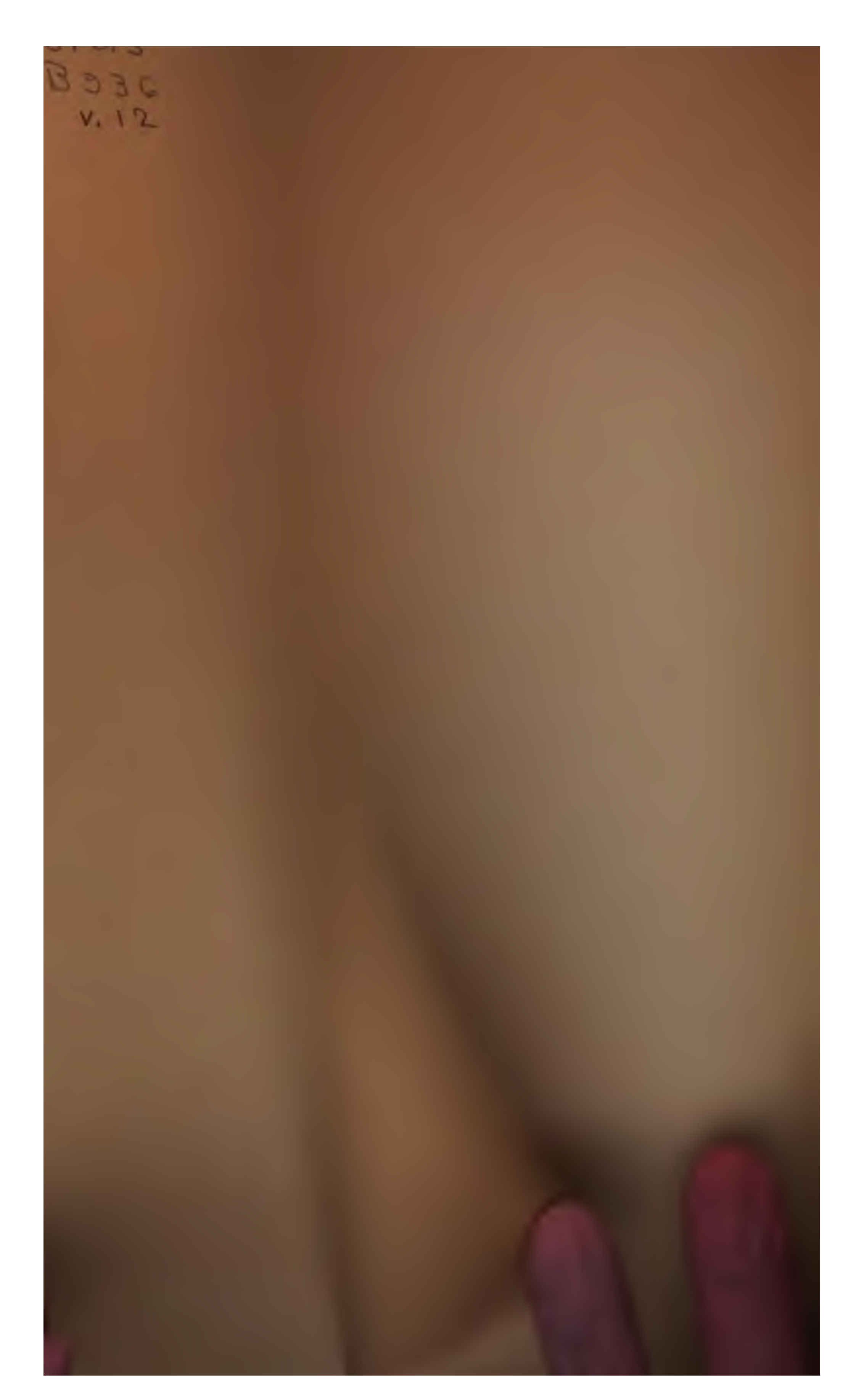



nford University Libraries
5 027 441 166






B936
v. 12



.5
30
12



BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel,* Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 82.

3606 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

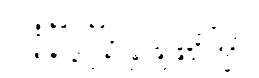
BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET TANNERY,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE
LESPIAULT, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME I. — ANNÉE 1877.
(TOME XII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1877

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BERNHARD RIEMANN'S GESAMMELTE MATHEMATISCHE WERKE UND WISSENSCHAFTLICHER NACHLASS. Herausgegeben unter Mitwirkung von R. DEDEKIND von H. WEBER. Leipzig, Teubner, 1876. — 1 vol. in-8°. Prix : 16 Mk. (¹).

L'édition complète des Œuvres de Riemann, qui paraît aujourd'hui pour la première fois, se compose de trois Sections, dont la première contient les Mémoires publiés par Riemann lui-même, la deuxième les travaux déjà imprimés après sa mort dans divers Recueils, et la troisième enfin tout ce qui, dans ses manuscrits posthumes, a paru susceptible d'être livré à la publicité.

Il serait superflu de s'étendre ici sur le contenu des deux premières Sections, qui est devenu depuis un temps plus ou moins long le patrimoine des géomètres. Ces Mémoires ont été réimprimés sans aucun changement; on a seulement corrigé quelques légères inexactitudes qui sont parvenues à la connaissance de l'éditeur et

(¹) Analyse publiée par M. H. Weber dans le *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik*, édité par MM. *Königsberger* et *Zeuner*. Traduit de l'allemand.

qui pouvaient être regardées comme certaines. Quelques additions, rédigées d'après des remarques manuscrites de Riemann, et des éclaircissements nécessaires ont trouvé place dans des Notes finales. Parmi ces additions et ces éclaircissements, je citerai particulièrement ce qui se rapporte à la dissertation intitulée : « Fondements d'une théorie générale des fonctions d'une variable complexe », et au Mémoire « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique ». Le seul Mémoire qui ait subi des changements un peu considérables est le Mémoire « Sur la surface d'aire minimum limitée par un contour donné », dont il n'existe aucun manuscrit complet de la main de Riemann, et dont l'éditeur, M. Hattendorff, a dû remanier la rédaction.

Le lecteur attachera plus d'intérêt à une courte Notice sur le contenu des Mémoires posthumes, publiés ici pour la première fois, et qui forment la troisième Section du volume. On sait qu'une exposition écrite et méthodique de ses recherches a toujours été pour Riemann une tâche pénible, et que ses découvertes ont été toujours fort en avance sur sa rédaction; on sait de plus que, dans les dernières années de sa vie, son état de santé lui a très-souvent interdit tout travail soutenu. Cela explique la nature de la majeure partie de ses écrits posthumes, qui ne contiennent, outre les formules, qu'extrêmement peu d'indications pour en retrouver la liaison. Ainsi beaucoup de passages, écrits sous une forme très-fragmentaire, ont dû être rétablis aussi bien qu'on a pu, et beaucoup d'autres sont encore enfouis dans les papiers, faute d'avoir pu être déchiffrés.

Passons maintenant à l'analyse des divers Mémoires de la troisième Section.

Le premier de ces Mémoires, intitulé : « Essai d'une conception générale de l'intégration et de la différentiation », est un travail du début de Riemann, au temps de ses études, et part de points de vue difficiles à admettre et que l'auteur lui-même n'a pas, sans doute, tardé à abandonner. Aussi a-t-on d'abord hésité pour savoir s'il convenait de livrer à l'impression ce travail qui, certainement, n'était pas destiné à la publicité. Mais, en l'étudiant de plus près, je me suis convaincu que les méthodes, ainsi que les résultats, présentaient un intérêt suffisant pour en justifier l'impression, toutes réserves faites, et qu'en tous cas ces recherches caractérisent la

marche progressive des idées de Riemann. Pour parvenir à une définition générale des fonctions dérivées, il se sert du développement d'une fonction en une série ascendante et descendante suivant les puissances fractionnaires de la variable, développement qui est toujours divergent d'un côté ou de l'autre, et auquel Riemann attribue malgré cela une signification propre. Mais, quand ces développements ne sont employés qu'au point de vue de la forme, il n'y a pas dans ce cas grand' chose à objecter contre leur emploi ni contre les résultats qu'on en tirera, bien qu'il n'y ait plus lieu alors d'en espérer une grande fécondité. La définition de la $\nu^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction z par rapport à la variable x, à laquelle on est conduit par ces considérations, est la suivante :

$$\partial_x^\nu z = \int_k^x (x-t)^{-\nu-1} z_{(t)}\,dt + \sum_{n=\infty}^{n=1} k_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-n-\nu)},$$

k et k_n étant des constantes arbitraires. Cette définition s'applique d'abord au cas de ν négatif. Pour les dérivées d'indice positif ou nul, leur expression se tire du théorème

$$\frac{d^m \partial_x^\nu z}{dx^m} = \partial_x^{\nu+m} z,$$

qui s'applique à toute valeur positive et entière de m.

Cette définition a la propriété, dans le cas de ν entier, nul ou négatif, de donner, pour le $\nu^{\text{ième}}$ quotient différentiel, la fonction z elle-même ou son intégrale d'ordre $-\nu$. Le nombre des constantes est infini, sauf le cas où ν est entier. Pour ν entier et négatif, ce nombre est fini $(=-\nu)$; pour ν positif entier ou nul, toutes ces constantes disparaissent. En outre, les théorèmes fondamentaux sur les dérivées d'indice entier subsistent aussi pour ces fonctions dérivées générales.

Le Mémoire suivant : « Nouvelle théorie du résidu dans les condensateurs électriques », contient un développement et une application des idées que Riemann avait déjà esquissées dans sa Communication au Congrès des Naturalistes à Göttingue (n° II de la première Section). Ce Mémoire était, dès l'année 1854, destiné à la publication dans les *Annales de Poggendorff;* mais cette publication n'eut pas lieu, probablement parce que Riemann ne

voulut pas consentir à un changement qu'on lui proposait de faire. La pensée fondamentale sur laquelle Riemann s'appuie dans la théorie des phénomènes en question est étroitement liée à ses idées sur la Philosophie naturelle, qui formaient précisément, comme nous l'apprenons par une de ses lettres, le point de départ de ses considérations. Il admet, outre les forces ordinaires d'attraction et de répulsion agissant suivant la loi de Coulomb, une autre force (antélectrique), avec laquelle la matière pondérable résiste à l'état électrique, force qui est très-faible dans les bons conducteurs, très-grande dans les corps dits *non conducteurs*, et qui se manifeste comme une résistance du corps contre l'introduction de l'électricité de tension. Les composantes de cette partie de la force électromotrice sont proportionnelles aux dérivées partielles des épaisseurs électriques, prises par rapport aux coordonnées. De ces hypothèses résulte un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre pour la détermination de la tension et de l'épaisseur, et l'intégration de ces équations dans quelques-uns des cas les plus simples fait l'objet du reste du Mémoire. Les résultats de la théorie, autant qu'une comparaison a été possible, sont en accord satisfaisant avec l'expérience.

Du troisième Mémoire de cette Section : « Deux théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques », il existe un manuscrit complétement achevé pour la première Partie, datant de l'année 1857, c'est-à-dire de la même année où a été publié le Mémoire sur les Fonctions abéliennes. Il semble exister aussi entre les deux recherches une liaison intime, sur laquelle malheureusement nous ne possédons que des indications insuffisantes. Ce Mémoire renferme une généralisation des études que l'auteur avait déjà entreprises sur la fonction F de Gauss (Mémoire IV de la première Section). Ici un système de n fonctions d'une seule variable indépendante est défini par un nombre arbitraire de points de ramification donnés et par la nature de ses valeurs dans le voisinage de ces points, et en outre par la condition que, par une révolution autour d'un point de ramification, les fonctions du système se changent en des combinaisons linéaires de ces mêmes fonctions. L'auteur y montre ensuite que, si les points de ramification, les exposants de discontinuité et les substitutions au moyen desquelles les diverses branches du système de fonctions

sont reliées entre elles autour des points de ramification sont donnés arbitrairement, avec certaines restrictions commandées par la nature du problème, les n fonctions du système pourront être considérées comme des solutions particulières d'une équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre à coefficients rationnels, dans le cas où la somme des exposants de discontinuité, qui doit être un nombre entier, n'est pas plus grande que $n-1$. Si cette somme est moindre que $n-1$, il reste dans l'équation différentielle un nombre correspondant de constantes indéterminées, et ce cas peut se ramener sans intégration à celui où la somme en question atteint sa valeur limite $n-1$; on en rencontre un exemple dans le Mémoire « Sur la surface d'aire minimum limitée par un contour donné ». Bien que les équations différentielles linéaires à coefficients constants aient été, dans ces derniers temps, à plusieurs reprises, l'objet d'études approfondies, cette belle généralisation de la théorie de la série hypergéométrique n'avait encore, à ma connaissance, été établie nulle part.

Le Mémoire suivant, écrit en langue latine, contient la réponse à une question de prix proposée par l'Académie de Paris et que Riemann avait envoyée en 1861. Grâce à l'obligeance du Secrétaire perpétuel de cette Académie, la publication a pu être faite sur le manuscrit original. La question consiste à déterminer tous les cas où, dans un milieu homogène illimité, la température peut être exprimée en fonction du temps et de deux variables seulement, en sorte qu'un système de courbes isothermes conserve la propriété de l'isothermie pendant toute la durée du mouvement de la chaleur. Riemann traite le problème en cherchant d'abord d'une manière tout à fait générale les propriétés d'un milieu, même non homogène, et de l'état initial, qui satisfont à la condition exigée; puis il distingue les cas où le milieu devient homogène.

Par la première recherche, on obtient certaines formes d'une équation linéaire aux dérivées partielles à coefficients variables, et il s'agit ensuite de déterminer les cas où cette équation différentielle peut se transformer par l'introduction de nouvelles variables, de manière que ses coefficients deviennent constants et qu'elle prenne ainsi la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Ce problème peut se réduire à la question de savoir dans quels cas une expression différentielle homogène du second ordre à coefficients variables $\sum_{i,i'} h_{i,i'}\, ds_i\, ds_{i'}$ peut se réduire à la forme $\sum_i dx_i^2$, et ainsi la recherche est ramenée dans une voie que Riemann s'était déjà frayée par ses recherches sur les hypothèses de la Géométrie (Mémoire XIII de la deuxième Section). Elle se rattache à la théorie de la mesure de la courbure des *variétés* en général, théorie dont les fondements ont été posés dans le Mémoire en question. Malheureusement ces voies ne sont qu'indiquées, et à l'aide du petit nombre de feuilles manuscrites encore existantes on n'a jusqu'ici réussi qu'en partie à rétablir les calculs très-compliqués, qui sont encore nécessaires pour conduire au résultat final. Les remarques sur ce Mémoire contiennent, d'une part, des éclaircissements relatifs aux théorèmes généraux sur la mesure de la courbure invoqués par l'auteur, et d'autre part, autant qu'on a pu y parvenir, le développement des calculs inachevés.

Le fragment : *Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua* a été remanié par M. H.-A. Schwarz, de Göttingue. Pour le commencement seul, on a un manuscrit développé, écrit en langue italienne. Le reste a dû être complété à l'aide de quelques formules et de quelques figures. Riemann y étudie, par ses méthodes, la convergence du développement, établi par Gauss, du quotient de deux séries hypergéométriques sous forme de fraction continue infinie, et il parvient à ce résultat, que cette convergence a toujours lieu, excepté pour les arguments réels et plus grands que l'unité, résultat qui a été trouvé d'une autre manière par M. L.-W. Thomé (*Journal de Borchardt*, t. 67).

Le petit article : « Sur le potentiel d'un anneau » a pour objet le problème de l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

dans l'hypothèse où la fonction V est donnée sur la surface d'un anneau engendré par la révolution d'un cercle autour d'un axe ne coupant pas la circonférence. Après avoir donné quelques aperçus généraux sur les séries qui se rencontrent dans l'intégration de

cette équation différentielle, l'auteur introduit d'abord les variables appropriées au cas actuel et rendant la séparation possible; puis il effectue l'intégration au moyen d'une classe particulière de séries hypergéométriques, qui peuvent s'exprimer à l'aide d'intégrales elliptiques complètes. Le même problème a été, comme on sait, l'objet d'une étude approfondie de M. C. Neumann, indépendante de celle de Riemann.

Le Mémoire suivant : « Équilibre de l'électricité sur des cylindres de section droite circulaire et d'axes parallèles » a été rédigé d'après quelques notes qui semblent avoir été écrites pour la préparation d'une leçon. Ce Mémoire est particulièrement intéressant en ce qu'on y reconnaît l'ingénieuse méthode dont Riemann se servait pour la solution des problèmes de représentation, et qui est toujours applicable quand l'aire à représenter est limitée par des droites ou par des arcs de cercle, que cette aire soit simplement ou multiplement connexe. En outre, ce petit fragment facilite beaucoup l'intelligence du Mémoire « Sur la surface d'aire minimum limitée par un contour donné ».

Au Mémoire, cité en dernier lieu, « Sur la surface d'aire minimum », nous avons pu restituer, d'après quelques indications trouvées dans les manuscrits, deux beaux exemples, dont le premier est relatif à la surface minimum limitée par trois droites dont l'une coupe les deux autres, et le second à la surface minimum (doublement connexe) limitée par deux polygones rectilignes situés dans deux plans parallèles. Dans ce dernier cas, le problème est généralement réductible aux quadratures et n'exige pas l'intégration d'équations différentielles linéaires.

Dans le numéro suivant, nous avons réuni deux fragments traitant la question de savoir ce que deviennent les séries établies par Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques, lorsque le module de la quantité que Jacobi a désignée par q converge vers l'unité. Dans le premier de ces fragments, l'auteur examine à ce point de vue les séries établies au § 40 des *Fundamenta*, et, comme ces séries cessent, pour la plupart, de converger dans le cas limite, il les soumet d'abord à une intégration. Si, dans les séries ainsi obtenues, on passe à la limite, il en résulte des fonctions qui, dans tout intervalle aussi petit que l'on voudra, ont une infinité de solutions de continuité. Il semble que le but principal de cette étude ait été

de trouver des exemples de pareilles fonctions pour le Mémoire « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique » (Mémoire XII de la deuxième Section). Le second fragment est consacré à l'étude, au même point de vue, des séries elles-mêmes qui expriment $\log k$, $\log k'$, $\log \frac{2K}{\pi}$, sans intégration préalable. On y reconnaît que, si le rapport des périodes des fonctions elliptiques tend vers une valeur réelle rationnelle, les parties imaginaires de ces séries tendront vers des valeurs limites finies et déterminées, tandis que, des parties réelles, les unes s'annuleront, les autres deviendront infinies d'une manière déterminée. Cette étude s'est trouvée dans les manuscrits de Riemann, écrite sur une feuille de papier à peine lisible, dont l'importance n'a été reconnue que peu de temps avant l'impression. Il ne nous restait donc plus le temps nécessaire pour vérifier exactement la correction des formules dans les parties réelles. Un commentaire sur ce fragment, par M. R. Dedekind, traite la question par une autre méthode rigoureuse, et donne les formules finales sous une forme différente de celle de Riemann. Il semble que les formules de Riemann, pour les parties réelles (qui deviennent infinies), ne soient pâs toutes exactes, tandis que les parties imaginaires sont irréprochables. Le commentaire en question renferme en outre une intéressante application de la méthode appliquée par Riemann à la théorie des formes en nombre infini de la fonction Θ.

Le court fragment sur l'Analyse de situation, qui vient ensuite, ne contient malheureusement que quelques définitions de concepts et un petit nombre d'indications sur ces profondes et importantes recherches ayant pour but une généralisation de la théorie de la connexion, que Riemann a prise pour point de départ de ses considérations sur la théorie des fonctions. Une partie seulement des concepts et des théorèmes établis ici permet encore une intuition dans l'espace à trois dimensions, tandis que les autres doivent être entendus à un point de vue complétement abstrait. Relativement aux *variétés* à plusieurs dimensions, il établit une définition qui est encore intuitive dans les espaces limités :

Si, à l'intérieur d'une variété étendue d'une manière continue, toute variété de n dimensions est limitante à l'aide de m segments de variétés de n dimensions, fixes et non limitants par

eux-mêmes, cette variété a une connexité $(m+1)$-uple de $n^{ième}$ dimension. Une variété étendue d'une manière continue est dite simplement connexe, lorsque la connexité de chaque dimension est simple.

Plus loin, cette définition est encore énoncée autrement, et l'auteur y rattache quelques conséquences relatives au partage des variétés au moyen de sections transverses. Ainsi, par exemple, l'espace d'une sphère est simplement connexe, celui d'une sphère creuse est simplement connexe dans la première dimension, doublement connexe dans la seconde, parce que toute ligne fermée dans l'intérieur de la sphère creuse forme la limite d'une surface s'étendant dans l'intérieur de la sphère, tandis que ce n'est qu'après l'introduction d'une surface fermée déterminée dans cet intérieur que toute autre surface de cette nature forme la limitation complète d'une portion d'espace intérieure. Au contraire, l'espace limité par une surface annulaire est simplement connexe dans la sconde dimension, doublement connexe dans la première. La sphère creuse est transformée en espace simplement connexe par une section transverse d'une seule dimension; l'espace annulaire l'est par une section transverse de deux dimensions. Une section transverse d'une dimension transforme l'espace annulaire en un espace triplement connexe dans la première dimension. Cela pour l'éclaircissement de ce théorème général :

La connexité d'une variété de n dimensions, par toute section transverse simplement connexe formée par une variété de $n-m$ dimensions, est abaissée d'une unité dans la $m^{ième}$ dimension ou élevée d'une unité dans la $(m-1)^{ième}$ dimension.

Les deux Mémoires suivants sont extraits d'un cours sur les fonctions abéliennes, professé par Riemann dans les années 1861 et 1862; la rédaction a été faite d'après un cahier de G. Roch. Le premier de ces Mémoires contient une démonstration très-élégante de la convergence des séries thêta p fois infinies, fondée sur un théorème général par lequel l'étude de la convergence d'une série infinie à termes positifs est ramenée à l'étude de la convergence d'une intégrale définie.

Le second Mémoire traite des fonctions que Riemann a désignées sous le nom de *fonctions abéliennes* pour le cas de $p=3$. Ce sont les racines carrées de fonctions φ (*voir* « Théorie des fonctions

abéliennes », VI[e] Mémoire de la première Section), telles qu'elles deviennent en $p-1$ points infiniment petites du second ordre, et qui généralement existent en nombre fini. Dans le cas de $p=3$, ce nombre est égal à 28, correspondant aux vingt-huit fonctions thêta impaires (et, géométriquement, correspondant aux vingt-huit tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre). La détermination de ces fonctions dépend d'une équation du vingt-huitième degré; mais, si l'on regarde six d'entre elles comme connues, les autres peuvent se déterminer au moyen d'une équation du quatrième degré. La corrélation de ces fonctions avec les fonctions thêta impaires est d'une importance toute spéciale pour la théorie de l'inversion des intégrales algébriques, et ce problème est l'objet principal du Mémoire en question.

Dans un Appendice, on a rassemblé les fragments qui se rapportent aux spéculations philosophiques de Riemann. Ces recherches ont préoccupé Riemann pendant une grande partie de sa vie, et il leur a consacré une portion considérable de ses méditations. Ce serait ici d'autant moins le lieu d'entrer dans les détails de cette intuition originale et profonde de l'univers, que la rédaction déjà extrêmement serrée et pleine de lacunes ne permettrait guère d'en faire un extrait abrégé, sans encourir le risque de se faire mal comprendre. Tout ce que nous pouvons en dire, c'est que, dans ses recherches sur la Philosophie naturelle, le but principal de Riemann est d'écarter la conception d'une action à distance et de la remplacer par une autre, d'après laquelle la matière n'agirait que sur son voisinage immédiat. Ce but est atteint par l'hypothèse d'une substance remplissant l'espace d'une manière continue et qui serait le siége de la force de gravitation, du mouvement lumineux et thermique, et des actions électriques, mais qui serait essentiellement différente de la matière pondérable. Les atomes corporels sont, d'après la conception de Riemann, des points dans lesquels cette substance hypothétique afflue continuellement et disparait du monde des phénomènes. La cause de l'action des atomes corporels les uns sur les autres, il la cherche dans la résistance qu'oppose cette substance à un changement de forme.

Le Volume se termine par un tableau, tracé par M. Dedekind, de la vie de Riemann. Cette esquisse biographique, tirée principalement de lettres et d'autres communications de la famille, n'a pas

pour but de faire valoir la position et l'importance scientifiques de Riemann; elle offrira à ses admirateurs et à ses amis une image de l'existence et de la personnalité de cet homme si distingué à tous les titres et si prématurément enlevé. C'est l'image d'une vie de savant, calme, simple, soumise bien des fois à la dure étreinte de la fortune adverse, mais admirablement armée par la nature pour fouiller les profondeurs de la Science, et remplie de la plus pure et de la plus sincère ardeur de connaître la vérité.

MÉLANGES.

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES ENTIERS ALGÉBRIQUES (1);

PAR M. R. DEDEKIND.

(Suite.)

I.

THÉORÈMES AUXILIAIRES DE LA THÉORIE DES MODULES.

Ainsi qu'il ressort de l'*Introduction*, nous aurons dans la suite à considérer très-souvent des systèmes de nombres qui se reproduisent par *addition* et *soustraction;* le développement des propriétés générales de pareils systèmes forme l'objet d'une théorie assez étendue, qui peut aussi être utilisée pour d'autres recherches, tandis que, pour notre but, les premiers éléments de cette théorie sont suffisants. Pour ne pas interrompre plus tard le cours de notre exposition, et en même temps pour faire apercevoir plus clairement la portée des divers concepts sur lesquels s'appuie notre théorie suivante des nombres algébriques entiers, il nous semble à propos d'établir préalablement un petit nombre de théorèmes très-simples, bien qu'ils ne puissent offrir un véritable intérêt que par leurs applications.

(1) Voir *Bulletin*, t. XI, p. 278.

§ 1. — *Modules et leur divisibilité.*

1° Un système $\mathfrak{a}$ de nombres réels ou complexes sera dit un *module* quand toutes les sommes et les différences de ces nombres appartiendront à ce même système $\mathfrak{a}$.

Si donc α est un nombre déterminé du module $\mathfrak{a}$, tous les nombres

$$\alpha + \alpha = 2\alpha, \quad 2\alpha + \alpha = 3\alpha, \quad \ldots,$$
$$\alpha - \alpha = 0, \quad 0 - \alpha = -\alpha, \quad -\alpha - \alpha = -2\alpha, \quad \ldots,$$

et, par suite, tous les nombres de la forme $x\alpha$ appartiendront aussi au module $\mathfrak{a}$, x pouvant devenir égal à tous les nombres rationnels entiers, c'est-à-dire à tous les nombres

$$0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \ldots.$$

Un tel système de nombres $x\alpha$ forme à lui seul un module, que nous désignerons par $[\alpha]$; si, par conséquent, un module contient un nombre α différent de zéro, il contiendra aussi une infinité de nombres différents les uns des autres. Mais il est évident que le nombre zéro, contenu dans chaque module, forme aussi déjà à lui seul un module.

2° Un module $\mathfrak{a}$ sera dit *divisible* par le module $\mathfrak{b}$ ou un *multiple* de $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{b}$ un *diviseur* de $\mathfrak{a}$, quand tous les nombres du module $\mathfrak{a}$ seront contenus aussi dans le module $\mathfrak{b}$.

Le module zéro est donc un multiple commun de tous les modules; si, de plus, α est un nombre déterminé d'un module $\mathfrak{a}$, le module $[\alpha]$ sera divisible par $\mathfrak{a}$. Il est, en outre, évident que tout module est divisible par lui-même, et que deux modules $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, dont chacun est divisible par l'autre, sont identiques, ce que nous indiquerons toujours par $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Si, de plus, chacun des modules $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ... est divisible par celui qui le suit immédiatement, il est clair que chacun d'eux sera divisible par tous ceux qui le suivront.

3° Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux modules quelconques; le système $\mathfrak{m}$ de tous les nombres qui appartiennent à la fois à ces deux modules sera lui-même un module; il sera dit le *plus petit commun multiple* de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, parce que tout multiple commun de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ est divisible par $\mathfrak{m}$.

Soient, en effet, μ, μ' deux nombres quelconques du système $\mathfrak{m}$,

et contenus par conséquent aussi bien dans $\mathfrak{a}$ que dans $\mathfrak{b}$; chacun des deux nombres $\mu \pm \mu'$ appartiendra (d'après 1°) aussi bien au module $\mathfrak{a}$ qu'au module $\mathfrak{b}$, et partant aussi au système $\mathfrak{m}$, d'où il s'ensuit que $\mathfrak{m}$ est un module. Puisque tous les nombres de ce module $\mathfrak{m}$ sont contenus dans $\mathfrak{a}$ et aussi dans $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{m}$ est un multiple commun de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. Si, de plus, le module $\mathfrak{m}'$ est un multiple commun quelconque de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, et qu'ainsi $\mathfrak{m}'$ se compose entièrement de nombres contenus à la fois dans $\mathfrak{a}$ et dans $\mathfrak{b}$, ces nombres (en vertu de la définition du système $\mathfrak{m}$) seront aussi contenus dans $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{m}'$ est divisible par $\mathfrak{m}$.

4° Si α devient successivement égal à tous les nombres d'un module $\mathfrak{a}$, et de même β à tous les nombres d'un module $\mathfrak{b}$, le système $\mathfrak{d}$ de tous les nombres de la forme $\alpha + \beta$ formera un module; ce module sera dit le *plus grand commun diviseur* de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, parce que tout diviseur commun de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ est aussi un diviseur de $\mathfrak{d}$.

En effet, deux nombres quelconques δ, δ' du système $\mathfrak{d}$ pouvant se mettre sous la forme $\delta = \alpha + \beta$, $\delta' = \alpha' + \beta'$, où α, α' appartiennent au module $\mathfrak{a}$, et β, β' au module $\mathfrak{b}$, on en tire

$$\delta \pm \delta' = (\alpha \pm \alpha') + (\beta \pm \beta');$$

et, puisque les nombres $\alpha \pm \alpha'$ sont contenus dans $\mathfrak{a}$ et les nombres $\beta \pm \beta'$ dans $\mathfrak{b}$, les nombres $\delta \pm \delta'$ appartiendront également au système $\mathfrak{d}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{d}$ est un module. Le nombre zéro étant contenu dans chaque module, tous les nombres $\alpha = \alpha + 0$ du module $\mathfrak{a}$ et tous les nombres $\beta = 0 + \beta$ du module $\mathfrak{b}$ appartiennent au module $\mathfrak{d}$, lequel est, par suite, un diviseur commun de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Si, de plus, le module $\mathfrak{d}'$ est un diviseur commun quelconque de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, et qu'ainsi tous les nombres α et tous les nombres β soient contenus dans $\mathfrak{d}'$, alors (en vertu de 1°) tous les nombres $\alpha + \beta$, c'est-à-dire tous les nombres du module $\mathfrak{d}$, appartiendront aussi au module $\mathfrak{d}'$; donc $\mathfrak{d}$ est divisible par $\mathfrak{d}'$.

Après avoir développé rigoureusement ces démonstrations, nous pourrons nous dispenser de faire voir comment les notions du plus petit commun multiple et du plus grand commun diviseur devront être entendues pour un nombre quelconque (même infini) de modules. Cependant il sera peut-être utile de justifier le mode d'expression choisi, par la remarque suivante : Si a, b sont deux nombres rationnels entiers déterminés, m leur plus petit commun

multiple, et d leur plus grand commun diviseur, il résulte des premiers éléments de la théorie des nombres que $[m]$ sera le plus petit commun multiple, et $[d]$ le plus grand commun diviseur des deux modules $[a]$ et $[b]$. D'ailleurs on reconnaîtra bientôt que les propositions de la théorie des nombres qui se rapportent à ce cas peuvent se déduire réciproquement de la théorie des modules.

§ 2. — *Congruences et classes de nombres.*

1° Soit $\mathfrak{a}$ un module; deux nombres quelconques ω, ω' seront dits *congrus* ou *incongrus* suivant $\mathfrak{a}$, selon que leur différence $\pm(\omega - \omega')$ sera contenue ou non dans $\mathfrak{a}$. La *congruence* des nombres ω, ω' par rapport au module $\mathfrak{a}$ sera indiquée par la notation

$$\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{a}}.$$

On tire de là immédiatement les propositions simples suivantes, dont nous pourrons nous dispenser de donner les démonstrations :

Si $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{a}}$, et $\omega' \equiv \omega'' \pmod{\mathfrak{a}}$, on aura aussi $\omega \equiv \omega'' \pmod{\mathfrak{a}}$.

Si $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{a}}$, et que x soit un nombre rationnel entier quelconque, on aura $x\omega \equiv x\omega' \pmod{\mathfrak{a}}$.

Si $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{a}}$, et $\omega'' \equiv \omega''' \pmod{\mathfrak{a}}$, on aura aussi $\omega \pm \omega'' \equiv \omega' \pm \omega''' \pmod{\mathfrak{a}}$.

Si $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{a}}$, et que le module $\mathfrak{b}$ soit un diviseur de $\mathfrak{a}$, on aura aussi $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{b}}$.

Si $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{a}}$, et $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{b}}$, on aura aussi $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m}$ étant le plus petit commun multiple de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$.

2° Le premier des théorèmes précédents conduit à l'introduction de la notion d'une *classe de nombres* relativement au module $\mathfrak{a}$: nous entendrons par là l'ensemble de tous les nombres, et de ces nombres seulement qui sont congrus à un nombre déterminé et par suite aussi entre eux, suivant $\mathfrak{a}$. Une telle classe suivant $\mathfrak{a}$ est donc complètement déterminée quand on donne un seul des nombres qu'elle contient, et tout nombre peut être regardé comme *représentant* d'une classe tout entière. Les nombres du module $\mathfrak{a}$, par exemple, forment eux-mêmes une pareille classe, représentée par le nombre zéro.

Si maintenant $\mathfrak{b}$ est un second module, on pourra toujours choisir

dans ce module un nombre fini ou infini de nombres,

$$(\beta_1) \qquad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,$$

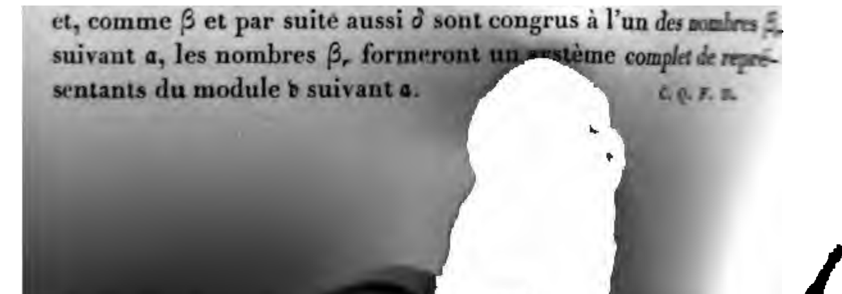
de telle manière que tout nombre contenu dans $\mathfrak{b}$ soit congru suivant le module $\mathfrak{a}$ à un de ces nombres, et à un seul. Un tel système de nombres β_r du module $\mathfrak{b}$, qui sont tous incongrus par rapport à $\mathfrak{a}$, mais qui représentent aussi toutes les classes qui ont des nombres communs avec $\mathfrak{b}$, je le nommerai *un système complet de représentants du module* $\mathfrak{b}$ *suivant le module* $\mathfrak{a}$, et le nombre de ces nombres β_r ou des classes qu'ils représentent, lorsqu'il est fini, sera désigné par $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$; si, au contraire, le nombre des représentants β_r est infini, il convient alors d'attribuer au symbole $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ la valeur zéro. L'examen plus approfondi d'un tel système de représentants (β_r) conduit maintenant au théorème suivant :

3° Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux modules quelconques, $\mathfrak{m}$ leur plus petit commun multiple, $\mathfrak{d}$ leur plus grand commun diviseur; tout système complet de représentants du module $\mathfrak{b}$ par rapport à $\mathfrak{a}$ sera en même temps un système complet de représentants du module $\mathfrak{b}$ par rapport à $\mathfrak{m}$, ainsi que du module $\mathfrak{d}$ par rapport à $\mathfrak{a}$, et par suite on aura

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{m}) = (\mathfrak{d}, \mathfrak{a}).$$

Il est d'abord évident que deux nombres quelconques β, β' du module $\mathfrak{b}$, congrus suivant $\mathfrak{a}$, sont congrus suivant $\mathfrak{m}$, puisque $\beta - \beta'$ est contenu aussi bien dans $\mathfrak{a}$ que dans $\mathfrak{b}$, et, par suite, aussi dans $\mathfrak{m}$. Maintenant, comme tout nombre β du module $\mathfrak{b}$ est congru avec un des représentants β_r suivant $\mathfrak{a}$ et par suite aussi suivant $\mathfrak{m}$, et que deux quelconques de ces représentants β_r, différents entre eux, sont incongrus suivant $\mathfrak{a}$ et par suite aussi suivant $\mathfrak{m}$, ces nombres β_r appartenant au module $\mathfrak{b}$ formeront un système complet de représentants du module $\mathfrak{b}$ suivant $\mathfrak{m}$. On démontrera absolument de même la seconde partie : les mêmes nombres β_r, puisque $\mathfrak{b}$ est divisible par $\mathfrak{d}$, sont contenus dans $\mathfrak{d}$, et, d'après l'hypothèse, incongrus suivant $\mathfrak{a}$; et, comme tout nombre δ contenu dans $\mathfrak{d}$ est de la forme $\alpha + \beta$, α étant contenu dans $\mathfrak{a}$ et β dans $\mathfrak{b}$, on aura

$$\delta = \alpha + \beta \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}};$$



et, comme β et par suite aussi δ sont congrus à l'un des nombres β_r suivant $\mathfrak{a}$, les nombres β_r formeront un système complet de représentants du module $\mathfrak{d}$ suivant $\mathfrak{a}$.

C. Q. F. D.

Si $\mathfrak{b}$ est divisible par $\mathfrak{a}$, on aura $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 1$, puisque tous les nombres contenus dans $\mathfrak{b}$ sont $\equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$; réciproquement, si $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 1$, $\mathfrak{b}$ sera divisible par $\mathfrak{a}$, puisque tous les nombres contenus dans $\mathfrak{b}$ sont congrus entre eux et par suite $\equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$; on a évidemment en même temps $\mathfrak{m} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$.

4° Si $\mathfrak{b}$ est un diviseur de $\mathfrak{a}$ et en même temps un multiple de $\mathfrak{c}$, si de plus β_r devient successivement égal à tous les représentants de $\mathfrak{b}$ suivant $\mathfrak{a}$, et de même γ_s égal à tous les représentants de $\mathfrak{c}$ suivant $\mathfrak{b}$, tous les nombres $\beta_r + \gamma_s$ formeront alors un système complet de représentants du module $\mathfrak{c}$ suivant $\mathfrak{a}$, et par suite on aura

$$(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{b})(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}).$$

Car, *en premier lieu,* tous ces nombres $\beta_r + \gamma_s$ appartiennent au module $\mathfrak{c}$, puisque β_r est contenu dans $\mathfrak{b}$ et par suite aussi dans $\mathfrak{c}$, et que γ_s est également contenu dans $\mathfrak{c}$. *En second lieu,* ils sont tous incongrus suivant $\mathfrak{a}$; si l'on désigne, en effet, par β', β'' des valeurs particulières de β_r, et par γ', γ'' des valeurs particulières de γ_s, alors de l'hypothèse $\beta' + \gamma' \equiv \beta'' + \gamma'' \pmod{\mathfrak{a}}$, puisque $\mathfrak{a}$ est divisible par $\mathfrak{b}$ et que $\beta' \equiv \beta'' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}}$, il s'ensuivrait d'abord que $\gamma' \equiv \gamma'' \pmod{\mathfrak{b}}$; mais, comme γ', γ'' sont des termes particuliers de la série de nombres parcourue par γ_s, et que deux quelconques de ces nombres différents entre eux sont en même temps incongrus suivant $\mathfrak{b}$, il faudra que l'on ait $\gamma' = \gamma''$, et par conséquent la supposition précédente se changera en $\beta' \equiv \beta'' \pmod{\mathfrak{a}}$; maintenant, comme β', β'' sont pareillement des termes particuliers de la série de nombres parcourue par β_r, et que deux quelconques de ces nombres différents entre eux sont en même temps incongrus suivant $\mathfrak{a}$, il faudra que l'on ait $\beta' = \beta''$, ce qui démontre l'assertion ci-dessus. *En troisième lieu,* il faut faire voir que tout nombre γ contenu dans $\mathfrak{c}$ est congru à l'un des nombres $\beta_r + \gamma_s$ suivant $\mathfrak{a}$; en effet, chaque nombre γ étant congru à l'un des nombres γ_s suivant $\mathfrak{b}$, on peut poser $\gamma = \beta + \gamma_s$, β désignant un nombre du module $\mathfrak{b}$; de plus, chacun de ces nombres β étant congru à l'un des nombres β_r suivant $\mathfrak{a}$, on peut poser $\beta = \alpha + \beta_r$, α désignant un nombre du module $\mathfrak{a}$; on aura donc

$$\gamma = \beta + \gamma_s = \alpha + \beta_r + \gamma_s \equiv \beta_r + \gamma_s \pmod{\mathfrak{a}}.$$

C. Q. F. D.

5° Soient $\mathfrak{m}$ le plus petit commun multiple, $\mathfrak{d}$ le plus grand com-

mun diviseur des deux modules $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, et soient ρ, σ deux nombres donnés; le système des deux congruences

$$\omega \equiv \rho \pmod{\mathfrak{a}}, \quad \omega \equiv \sigma \pmod{\mathfrak{b}}$$

aura toujours une racine commune, lorsqu'on aura, et dans ce cas seulement,

$$\rho \equiv \sigma \pmod{\mathfrak{d}},$$

et tous les nombres ω formeront une classe déterminée de nombres suivant le module $\mathfrak{m}$.

S'il existe, en effet, un nombre ω satisfaisant aux deux congruences, les nombres $\omega - \rho$, $\omega - \sigma$ seront contenus respectivement dans $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, et partant contenus tous les deux dans $\mathfrak{d}$, et par conséquent leur différence $\rho - \sigma$ sera contenue également dans $\mathfrak{d}$, c'est-à-dire que la condition indiquée $\rho \equiv \sigma$ (mod. $\mathfrak{d}$) est nécessaire; réciproquement, si elle est remplie, il existera (en vertu de la définition de $\mathfrak{d}$ dans le § 1, 4°) un nombre α dans $\mathfrak{a}$ et un nombre β dans $\mathfrak{b}$, dont la somme $\alpha + \beta = \rho - \sigma$, et par suite le nombre $\omega = \rho - \alpha = \sigma + \beta$ satisfera aux deux congruences; donc la condition indiquée est aussi suffisante. Si, de plus, ω' est un nombre quelconque remplissant les mêmes conditions que ω, alors $\omega' - \omega$ sera contenu aussi bien dans $\mathfrak{a}$ que dans $\mathfrak{b}$, et par suite aussi dans $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire qu'on aura $\omega' \equiv \omega$ (mod. $\mathfrak{m}$), et réciproquement, tout nombre ω' de la classe représentée par ω suivant $\mathfrak{m}$ satisfera aux deux congruences. C. Q. F. D.

§ 3. — *Modules finis.*

1° Soient $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ des nombres déterminés; tous les nombres de la forme

$$\beta = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + y_3\beta_3 + \ldots + y_n\beta_n,$$

$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ désignant des nombres rationnels entiers arbitraires, constituent évidemment un module, que nous appellerons un module *fini*, et que nous désignerons par $[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n]$; le complexe des constantes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ sera dit la *base* du module.

Ce module $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$ est évidemment le plus grand com-

mun diviseur des n modules finis $[\beta_1]$, $[\beta_2]$, ..., $[\beta_n]$; il serait facile de faire voir que tout multiple d'un module fini est également un module fini; mais je me bornerai ici à démontrer le théorème fondamental suivant, dont on fera plus tard des applications importantes.

2° Si tous les nombres d'un module fini $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$ peuvent, en les multipliant par des nombres rationnels différents de zéro, être transformés en des nombres d'un module $\mathfrak{a}$, le plus petit commun multiple $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sera un module fini, et l'on pourra choisir un système de $\frac{1}{2}(n+1)n$ nombres rationnels entiers a, tel que les n nombres

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= a'_1\,\beta_1,\\
\mu_2 &= a''_1\,\beta_1 + a''_2\,\beta_2,\\
\mu_3 &= a'''_1\,\beta_1 + a'''_2\,\beta_2 + a'''_3\,\beta_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mu_n &= a^{(n)}_1\beta_1 + a^{(n)}_2\beta_2 + a^{(n)}_3\beta_3 + \ldots + a^{(n)}_n\beta_n
\end{aligned}$$

forment une base de $\mathfrak{m}$, et que l'on ait en même temps

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{m}) = a'_1\,a''_2\,a'''_3\ldots a^{(n)}_n.$$

Par hypothèse, il existe n fractions, différentes de zéro,

$$\frac{s_1}{t_1},\quad \frac{s_2}{t_2},\quad \frac{s_3}{t_3},\quad \ldots,\quad \frac{s_n}{t_n},$$

dont les numérateurs et les dénominateurs sont des nombres rationnels entiers, tels que les n produits

$$\frac{s_1}{t_1}\beta_1,\quad \frac{s_2}{t_2}\beta_2,\quad \frac{s_3}{t_3}\beta_3,\quad \ldots,\quad \frac{s_n}{t_n}\beta_n$$

appartiennent au module $\mathfrak{a}$; maintenant, puisque des nombres quelconques d'un module $\mathfrak{a}$, lorsqu'on les multiplie par des nombres rationnels entiers t_1, t_2, t_3, ..., t_n, se changent toujours en des nombres du même module $\mathfrak{a}$ (§ 1, 1°), pareillement les produits $s_1\beta_1$, $s_2\beta_2$, $s_3\beta_3$, ..., $s_n\beta_n$, et de même, en désignant par s la valeur absolue du produit $s_1 s_2 s_3 \ldots s_n$, les nombres $s\beta_1$, $s\beta_2$, $s\beta_3$, ..., $s\beta_n$, par suite aussi tous les produits $s\beta$ appartiendront au module $\mathfrak{a}$, β désignant un nombre arbitraire quelconque du module $\mathfrak{b}$.

Soit maintenant ν un indice déterminé, de la suite $1, 2, \ldots, n$; parmi les nombres du module $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$ divisible par $\mathfrak{b}$, désignons par

$$\mu'_\nu = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \ldots + y_\nu\beta_\nu$$

tous ceux qui, comme, par exemple, $s\beta_\nu$, appartiennent en même temps au module $\mathfrak{a}$ et par suite aussi au module $\mathfrak{b}$; parmi ces nombres μ'_ν, il doit y avoir au moins un nombre

$$\mu_\nu = a_1^{(\nu)}\beta_1 + a_2^{(\nu)}\beta_2 + \ldots + a_\nu^{(\nu)}\beta_\nu,$$

dans lequel y prend sa *plus petite* valeur *positive* $a_\nu^{(\nu)}$. On peut alors faire voir que, dans *tous* les nombres μ'_ν, le coefficient y_ν est divisible par $a_\nu^{(\nu)}$; car, puisqu'on peut toujours poser

$$y_\nu = x_\nu a_\nu^{(\nu)} + y'_\nu,$$

x_ν et y'_ν désignant des nombres rationnels entiers, dont le dernier satisfait à la condition (¹)

$$0 \leqq y'_\nu < a_\nu^{(\nu)},$$

alors, si l'on pose

$$y'_1 = y_1 - x_\nu a_1^{(\nu)}, \quad y'_2 = y_2 - x_\nu a_2^{(\nu)}, \quad \ldots, \quad y'_{\nu-1} = y_{\nu-1} - x_\nu a_{\nu-1}^{(\nu)},$$

le nombre

$$\mu'_\nu - x_\nu\mu_\nu = y'_1\beta_1 + y'_2\beta_2 + \ldots + y'_{\nu-1}\beta_{\nu-1} + y'_\nu\beta_\nu$$

appartiendra à la fois au module $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu]$, et aussi au module $\mathfrak{m}$, parce que μ'_ν et μ_ν sont contenus dans $\mathfrak{m}$. Mais, puisque (d'après la définition de μ_ν) dans aucun de ces nombres le coefficient de β_ν n'est moindre que $a_\nu^{(\nu)}$ et en même temps positif, il faut que l'on ait $y'_\nu = 0$, et partant que $y_\nu = x_\nu a_\nu^{(\nu)}$ soit divisible par $a_\nu^{(\nu)}$, ce qu'il s'agissait de montrer; en même temps,

$$\mu'_\nu - x_\nu\mu_\nu = \mu'_{\nu-1}$$

devient un nombre contenu dans $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu-1}]$ et dans $\mathfrak{m}$, ou devient égal à zéro, au cas où $\nu = 1$.

(¹) C'est là-dessus que repose la théorie de la divisibilité des nombres rationnels entiers.

On déduit de là facilement que les n nombres μ_ν, que l'on obtient en posant successivement $\nu = n, n-1, \ldots, 2, 1$, jouissent des propriétés énoncées dans le théorème à démontrer; car tout nombre μ du module $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire tout nombre μ'_n contenu à la fois dans $\mathfrak{a}$ et dans $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$, est de la forme

$$\mu = \mu'_{n-1} + x_n \mu_n,$$

où x_n désigne un nombre rationnel entier, et μ'_{n-1} un nombre appartenant aux deux modules $\mathfrak{a}$ et $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}]$, et par suite aussi au module $\mathfrak{m}$; tout nombre μ'_{n-1} de cette nature est de la forme

$$\mu'_{n-1} = \mu'_{n-2} + x_{n-1}\mu_{n-1},$$

où x_{n-1} désigne un nombre rationnel entier, et μ'_{n-2} un nombre appartenant aux deux modules $\mathfrak{a}$ et $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}]$, et ainsi de suite; enfin tout nombre μ'_1, appartenant aux deux modules $\mathfrak{a}$ et $[\beta_1]$ est de la forme

$$\mu'_1 = x_1 \mu_1,$$

où x_1 désigne un nombre rationnel entier. Il est donc démontré que tout nombre μ du module $\mathfrak{m}$ peut être représenté sous la forme

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_n\mu_n,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant des nombres rationnels entiers; et comme, réciproquement, tout système choisi arbitrairement de nombres rationnels entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ produit certainement un nombre μ appartenant au module $\mathfrak{m}$, puisque $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont eux-mêmes contenus dans $\mathfrak{m}$, ces n nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ formeront une base du module $\mathfrak{m}$.

Pour démontrer enfin la dernière partie du théorème, nous allons considérer tous les nombres

$$\beta' = z'_1\beta_1 + z'_2\beta_2 + \ldots + z'_n\beta_n$$

du module $\mathfrak{b}$, dans lesquels les nombres rationnels entiers z'_1, $z'_2, \ldots, z'_n$ remplissent les n conditions

$$0 \leqq z'_\nu < a_\nu^{(\nu)},$$

et nous démontrerons que ces nombres β', dont le nombre est évidemment égal à $a'_1 a''_2 \ldots a_n^{(n)}$, forment un système complet de repré-

sentants du module $\mathfrak{b}$ suivant $\mathfrak{m}$ (ou $\mathfrak{a}$). En effet, *premièrement,* tous ces nombres β' appartenant au module $\mathfrak{b}$ sont incongrus suivant $\mathfrak{m}$; car soit

$$z'_1\beta_1+\ldots+z'_n\beta_n \equiv z''_1\beta_1+\ldots+z''_n\beta_n \pmod{\mathfrak{a}},$$

les nombres $z''_1, z''_2, \ldots, z''_n$ remplissant les n mêmes conditions que les nombres $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$; si les n différences

$$z'_n - z''_n,\quad z'_{n-1} - z''_{n-1},\quad \ldots,\quad z'_2 - z''_2,\quad z'_1 - z''_1$$

ne s'annulent pas toutes, soit $z'_\nu - z''_\nu$ la première d'entre elles qui ait une valeur différente de zéro, valeur que, à cause de la symétrie, nous supposerons positive, et qui en outre est $< a_\nu^{(\nu)}$, puisque les deux nombres z'_ν et z''_ν sont $> a_\nu^{(\nu)}$; alors la différence

$$(z'_1 - z''_1)\beta_1+\ldots+(z'_\nu - z''_\nu)\beta_\nu$$

serait évidemment un nombre μ'_ν contenu dans $\mathfrak{a}$ et dans $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu]$, et dans lequel le coefficient de β_ν serait positif et $< a_\nu^{(\nu)}$, ce qui est contraire à la définition du nombre μ_ν; donc deux systèmes différents quelconques de n nombres $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$, qui satisfont aux conditions ci-dessus, produisent aussi deux nombres β' du module $\mathfrak{b}$, incongrus suivant $\mathfrak{a}$. *En second lieu,* il est aisé de voir que tout nombre arbitraire

$$\beta = z_1\beta_1 + z_2\beta_2 + \ldots + z_n\beta_n$$

du module $\mathfrak{b}$ est congru suivant $\mathfrak{a}$ (ou $\mathfrak{m}$) à l'un de ces nombres β'; car, si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont donnés, il est clair que l'on pourra choisir successivement les n nombres rationnels entiers

$$x_n,\quad x_{n-1},\quad \ldots,\quad x_2,\quad x_1,$$

de manière que les n nombres

$$\begin{aligned}
z'_n &= z_n + a_n^{(n)}x_n,\\
z'_{n-1} &= z_{n-1} + a_{n-1}^{(n)}x_n + a_{n-1}^{(n-1)}x_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z'_2 &= z_2 + a_2^{(n)}x_n + a_2^{(n-1)}x_{n-1} + \ldots + a''_2 x_2,\\
z'_1 &= z_1 + a_1^{(n)}x_n + a_1^{(n-1)}x_{n-1} + \ldots + a''_1 x_2 + a'_1 x_1
\end{aligned}$$

remplissent les n conditions ci-dessus $0 \leqq z'_\nu < a_\nu^{(\nu)}$; si l'on pose

maintenant

$$\beta' = z'_1\beta_1 + z'_2\beta_2 + \ldots + z'_n\beta_n,$$

on aura

$$\beta' = \beta + x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_n\mu_n,$$

et partant $\beta \equiv \beta'$ (mod. $\mathfrak{m}$). C. Q. F. D.

§ 4. — *Systèmes irréductibles.*

1° Un système de n nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sera dit un *système irréductible,* et ces nombres seront dits *indépendants* entre eux, quand la somme

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n,$$

pour tout système de nombres rationnels entiers (ou fractionnaires) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui ne seront pas tous nuls, prendra une valeur différente de zéro; alors deux systèmes différents quelconques de nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ produiront évidemment aussi deux sommes α inégales. Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand il existe un système de nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui ne s'annulent pas tous et pour lesquels la somme α devient égale à zéro, le système des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sera dit *réductible,* et ces nombres eux-mêmes seront *dépendants* entre eux. Si l'on veut conserver encore cette terminologie pour le cas de $n = 1$, un nombre unique formera évidemment un système réductible ou un système irréductible, suivant qu'il sera égal à zéro ou non. De la définition précédente découlent aisément les théorèmes suivants, dont le nombre pourrait être extraordinairement accru, sur les *déterminants* de nombres rationnels.

2° Si les n nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont indépendants entre eux, les n nombres

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 &= c'_1\alpha_1 + c'_2\alpha_2 + \ldots + c'_n\alpha_n,\\
\alpha'_2 &= c''_1\alpha_1 + c''_2\alpha_2 + \ldots + c''_n\alpha_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha'_n &= c^{(n)}_1\alpha_1 + c^{(n)}_2\alpha_2 + \ldots + c^{(n)}_n\alpha_n,
\end{aligned}$$

les n^2 coefficients c désignant des nombres rationnels entiers ou fractionnaires, formeront un système irréductible ou réductible,

suivant que le déterminant

$$C = \Sigma \pm c'_1 c''_2 \ldots c_n^{(n)}$$

sera ou non différent de zéro.

Car, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des nombres rationnels arbitraires, ne s'annulant pas tous, la somme

$$x_1 \alpha'_1 + x_2 \alpha'_2 + \ldots + x_n \alpha'_n = \alpha',$$

puisque $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont indépendants entre eux, ne pourra s'annuler que si l'on a à la fois

$$\begin{aligned} c'_1 x_1 + c''_1 x_2 + \ldots + c_1^{(n)} x_n &= 0, \\ c'_2 x_1 + c''_2 x_2 + \ldots + c_2^{(n)} x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ c'_n x_1 + c''_n x_2 + \ldots + c_n^{(n)} x_n &= 0, \end{aligned}$$

ce qui est impossible lorsque C a une valeur différente de zéro, et par suite, dans ce cas, les nombres $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ sont indépendants entre eux. Mais, si l'on a $C = 0$, il existera toujours un système de nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisferont aux équations précédentes, sans toutefois être tous nuls; cela se voit immédiatement, lorsque tous les n^2 coefficients c s'annulent; s'il n'en est pas ainsi, alors, parmi ceux des déterminants mineurs de C qui ne s'annulent pas, il y en aura un, par exemple le déterminant

$$\Sigma \pm c'_1 c''_2 \ldots c_r^{(r)},$$

qui sera du degré *le plus élevé* $r < n$, de sorte que tous les déterminants mineurs de degré plus élevé s'annulent; dans ce cas, comme on sait, les $n - r$ dernières des équations ci-dessus seront des conséquences identiques des r précédentes, et l'on pourra donner à celles-ci la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= p'_{r+1} x_{r+1} + \ldots + p'_n x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_r &= p_{r+1}^{(r)} x_{r+1} + \ldots + p_n^{(r)} x_n, \end{aligned}$$

où les $r(n - r)$ coefficients p sont des nombres rationnels; en attribuant maintenant aux quantités $x_{r+1}, \ldots, x_n$, au nombre de $n - r \geqq 1$, des valeurs rationnelles arbitraires, pourvu seulement qu'elles ne soient pas toutes nulles, les quantités $x_1, \ldots, x_r$ pren-

dront également des valeurs rationnelles, et l'on aura par suite un système de n nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui ne s'annuleront pas tous, et pour lesquels la somme α' sera égale à zéro; donc, dans ce cas, les n nombres $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ seront dépendants entre eux.

C. Q. F. D.

3° Si les n nombres indépendants entre eux $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, d'une part, et d'autre part les n nombres $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ forment les uns et les autres une base d'un seul et même module $\mathfrak{a}$, on aura alors

$$\alpha'_\nu = c_1^{(\nu)}\alpha_1 + c_2^{(\nu)}\alpha_2 + \ldots + c_n^{(\nu)}\alpha_n,$$

où les n^2 coefficients c désignent des nombres rationnels entiers, dont le déterminant $= \pm 1$, et par suite les nombres $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ seront aussi indépendants entre eux.

En effet, puisque les nombres α'_ν sont contenus dans le module $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, il existera dans tous les cas n équations de la forme précédente, dans lesquelles les coefficients c seront des nombres rationnels entiers. Puisque réciproquement les n nombres α_ν sont contenus dans le module $\mathfrak{a} = [\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n]$, il existera aussi n équations de la forme

$$\alpha_\nu = e_1^{(\nu)}\alpha'_1 + e_2^{(\nu)}\alpha'_2 + \ldots + e_n^{(\nu)}\alpha'_n,$$

à coefficients e pareillement rationnels et entiers. En y substituant les n premières équations pour les n nombres α'_ν, et considérant que les n nombres α_ν forment un système irréductible, il s'ensuit que la somme

$$e_1^{(\nu)}c'_{\nu'} + e_2^{(\nu)}c''_{\nu'} + \ldots + e_n^{(\nu)}c_{\nu'}^{(n)} = 1 \quad \text{ou} \quad = 0,$$

selon que les indices ν, ν' seront égaux ou inégaux. Donc le produit de déterminants

$$\Sigma \pm c'_1 c''_2 \ldots c_n^{(n)} . \Sigma \pm e'_1 e''_2 \ldots e_n^{(n)} = 1,$$

et par suite, puisque les deux facteurs sont des nombres rationnels entiers,

$$\Sigma \pm c'_1 c''_2 \ldots c_n^{(n)} = \Sigma e'_1 e''_2 \ldots e_n^{(n)} = \pm 1.$$

C. Q. F. D.

Réciproquement, il est clair que $[\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$,

quand il existe n équations de la forme

$$\alpha'_\nu = c_1^{(\nu)}\alpha_1 + \ldots + c_n^{(\nu)}\alpha_n,$$

où les coefficients c sont des nombres rationnels entiers, dont le déterminant $= \pm 1$.

4° Si les n nombres indépendants entre eux $\beta_1, \ldots, \beta_n$ forment la base d'un module $\mathfrak{b}$, et que de ces nombres dépendent les n nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de la base d'un module $\mathfrak{a}$, au moyen de n équations de la forme

$$\alpha_\nu = b_1^{(\nu)}\beta_1 + \ldots + b_n^{(\nu)}\beta_n,$$

les coefficients b désignant des nombres rationnels entiers, dont le déterminant B est différent de zéro, le nombre des classes sera

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \pm \mathrm{B}.$$

En effet, puisque chacun des nombres $\beta_1, \ldots, \beta_n$, et par suite tout nombre β du module $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$ peut, en le multipliant par le nombre rationnel B différent de zéro, être changé en un nombre du module $\mathfrak{a}$, qui est divisible par $\mathfrak{b}$, et qui par suite aussi est le plus petit commun multiple de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ possédera (d'après le § 3, 2°) n nombres de base de la forme

$$\alpha'_\nu = a_1^{(\nu)}\beta_1 + a_2^{(\nu)}\beta_2 + \ldots + a_\nu^{(\nu)}\beta_\nu,$$

où les coefficients a sont des nombres rationnels entiers et choisis, de telle manière que l'on ait

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = a'_1 a''_2 \ldots a_n^{(n)} = \Sigma \pm a'_1 a''_2 \ldots a_n^{(n)}.$$

Comme, de plus, les n nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ forment également une base du module $\mathfrak{a}$, et que (d'après 2°) chacun de ces deux systèmes de n nombres est irréductible, puisqu'on a supposé que le système $\beta_1, \ldots, \beta_n$ l'était, on aura alors (d'après 3°) n équations de la forme

$$\alpha'_\nu = c_1^{(\nu)}\alpha_1 + \ldots + c_n^{(\nu)}\alpha_n,$$

ayant des coefficients rationnels entiers c, dont le déterminant

$$\Sigma \pm c'_1 c''_2 \ldots c_n^{(n)} = \pm 1.$$

En y substituant, à la place des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, leurs expressions ci-dessus au moyen des n nombres indépendants entre eux

$\beta_1, \ldots, \beta_n$, on voit, par la comparaison avec les expressions précédentes des nombres α'_ν au moyen des mêmes nombres $\beta_1, \ldots, \beta_n$, que

$$a_\nu^{(\nu)} = c_1^{(\nu)} b'_\nu + c_2^{(\nu)} b''_\nu + \ldots + c_n^{(\nu)} b_\nu^{(n)},$$

et par suite

$$\Sigma \pm a'_1 \ldots a_n^{(n)} = \Sigma \pm c'_1 \ldots c_n^{(n)} . \Sigma \pm b'_1 \ldots b_n^{(n)};$$

on a donc bien $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \pm B$. C. Q. F. D.

Ce théorème important peut aisément (et de la manière la plus simple au moyen du théorème suivant) s'étendre au cas plus général où les coefficients b sont des nombres rationnels *fractionnaires*; on obtient ainsi ce théorème

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \pm B(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

et chacun des deux nombres de classes $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ peut se déterminer d'après une règle simple, au moyen du déterminant B et de tous ses déterminants mineurs.

5° Si, parmi les m nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, qui forment une base du module $\mathfrak{a}$, il n'y en a que n qui soient indépendants entre eux, il existera une base du même module $\mathfrak{a}$ composée de n nombres indépendants entre eux $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$.

L'hypothèse de ce théorème sera évidemment toujours vérifiée, quand tous les m nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ seront représentés au moyen de n nombres indépendants entre eux $\omega_1, \ldots, \omega_n$, sous la forme

$$\alpha_\mu = r_1^{(\mu)} \omega_1 + r_2^{(\mu)} \omega_2 + \ldots + r_n^{(\mu)} \omega_n,$$

le système de coefficients

$$(r) \quad \begin{cases} r'_1, & r'_2, & \ldots, & r'_n, \\ r''_1, & r''_2, & \ldots, & r''_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots, \\ r_1^{(m)}, & r_2^{(m)}, & \ldots, & r_n^{(m)} \end{cases}$$

se composant uniquement de nombres rationnels, et l'un au moins des déterminants partiels R du degré n, que l'on peut former avec ce système et qui sont au nombre de

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n},$$

ayant une valeur différente de zéro, puisque sans cela n quelconques des m nombres α_μ seraient dépendants entre eux. Réciproquement, il résulte de l'hypothèse du théorème que les m nombres α_μ pourront toujours être représentés au moyen de n nombres ω_ν indépendants entre eux; car, si l'on choisit pour ces derniers, par exemple, les n nombres, parmi les m nombres α_μ qui forment réellement un système irréductible, alors, puisque les $n+1$ nombres $\alpha_\mu, \omega_1, \ldots, \omega_n$ sont dépendants entre eux, il existera, pour chaque indice μ, une équation correspondante, de la forme

$$x_0\alpha_\mu + x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \ldots + x_n\omega_n = 0,$$

dont les coefficients x sont rationnels et ne s'évanouissent pas tous; comme, de plus, les nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont indépendants entre eux, x_0 devra différer de zéro, et par suite α_μ pourra être représenté de la manière indiquée, au moyen des n nombres ω_ν; comme enfin parmi les m nombres α_μ se trouvent aussi les n nombres ω_ν, l'un au moins des déterminants R sera différent de zéro.

Je vais partir, en conséquence, de l'hypothèse que les m nombres α_μ sont représentés de la manière indiquée au moyen de n nombres ω_ν indépendants entre eux, et je vais démontrer que, de quelque manière que l'on choisisse ces nombres ω_ν, il existera toujours n nombres α'_ν de la forme

$$\alpha'_\nu = c_1^{(\nu)}\omega_1 + c_2^{(\nu)}\omega_2 + \ldots + c_\nu^{(\nu)}\omega_\nu,$$

à coefficients rationnels c, qui formeront une base du même module $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]$. Pour cela, je remarque d'abord qu'évidemment on peut toujours choisir un nombre rationnel, entier et positif k, de telle manière que tous les mn produits $kr_\nu^{(\mu)}$ deviennent des nombres entiers; si l'on pose maintenant

$$\omega_1 = k\beta_1, \quad \omega_2 = k\beta_2, \quad \ldots, \quad \omega_n = k\beta_n,$$

et que l'on exprime les nombres α_μ au moyen des nombres β_ν, il en résultera que le module $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]$ est divisible par le module $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$, et par suite qu'il est le plus petit commun multiple de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. Comme, de plus, les n nombres β_ν, étant multipliés par k, se changent dans les n nombres ω_ν, et que ceux-ci, étant multipliés par un déterminant R différent de zéro, se chan-

gent en des nombres de la forme

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m,$$

les coefficients x désignant des nombres rationnels entiers ou fractionnaires, il est clair que tout nombre β du module $\mathfrak{b}$, multiplié par un nombre rationnel différent de zéro, peut se changer lui-même en un nombre du module $\mathfrak{a}$, et il résulte de là (d'après le § 3, 2°) que le plus petit commun multiple $\mathfrak{a}$ des deux modules $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ possède une base composée de n nombres de la forme

$$\alpha'_\nu = a_1^{(\nu)}\beta_1 + a_2^{(\nu)}\beta_2 + \ldots + a_\nu^{(\nu)}\beta_\nu,$$

les coefficients a désignant des nombres rationnels entiers, et le produit $a'_1 a''_2 \ldots a_n^{(n)}$ étant différent de zéro. Si l'on y exprime de nouveau les n nombres β_ν au moyen des n nombres ω_ν, on en conclut la vérité de l'assertion ci-dessus, ce qui démontre en même temps le théorème.

6° A la démonstration précédente j'ajouterai encore les remarques suivantes. Comme les m nombres α_μ forment, aussi bien que les n nombres α'_ν, une base du même module $\mathfrak{a}$, il existera m équations de la forme

$$\alpha_\mu = p_1^{(\mu)}\alpha'_1 + p_2^{(\mu)}\alpha'_2 + \ldots + p_n^{(\mu)}\alpha'_n,$$

et n équations de la forme

$$\alpha'_\nu = q'_\nu\alpha_1 + q''_\nu\alpha_2 + \ldots + q_\nu^{(m)}\alpha_m,$$

où les $2mn$ coefficients p et q sont tous des nombres rationnels *entiers;* en substituant les premières expressions dans les secondes, et considérant que les n nombres α'_ν sont indépendants entre eux, on en déduit que la somme

$$q'_\nu p'_{\nu'} + q''_\nu p''_{\nu'} + \ldots + q_\nu^{(m)} p_{\nu'}^{(m)} = 1 \quad \text{ou} \quad = 0,$$

suivant que les deux indices ν, ν', contenus dans la série $1, 2, \ldots, n$, sont égaux ou inégaux. En désignant donc par P respectivement tous les déterminants partiels du $n^{\text{ième}}$ degré formés avec le système de coefficients (p), et par Q les déterminants correspondants formés de la même manière avec le système de coefficients (q), on sait que la somme

$$\Sigma PQ,$$

étendue à toutes les combinaisons différentes de n indices supérieurs, est égale à l'unité, et, par suite, tous les déterminants P n'ont point de commun diviseur; et réciproquement, cette propriété des déterminants P est essentielle pour que les n nombres α'_ν, aussi bien que les m nombres

$$\alpha_\mu = p_1^{(\mu)}\alpha'_1 + \ldots + p_n^{(\mu)}\alpha'_n,$$

forment des bases du même module $\mathfrak{a}$.

Un système de coefficients, tel que (p), n'est évidemment qu'un cas particulier du système de coefficients précédent (r). Maintenant, les n nombres α'_ν pouvant également se représenter sous la forme

$$\alpha'_\nu = e_1^{(\nu)}\omega_1 + e_2^{(\nu)}\omega_2 + \ldots + e_n^{(\nu)}\omega_n,$$

à n^2 coefficients rationnels e, dont le déterminant

$$\mathrm{E} = \Sigma \pm e'_1 e''_2 \ldots e_n^{(n)}$$

est différent de zéro, il vient

$$r_\nu^{(\mu)} = p_1^{(\mu)} e'_\nu + p_2^{(\mu)} e''_\nu + \ldots + p_n^{(\mu)} e_\nu^{(n)},$$

et, par suite, deux déterminants correspondants quelconques R, P, formés avec les systèmes de coefficients (r), (p), ont entre eux la relation

$$\mathrm{R} = \mathrm{PE}.$$

Le problème de trouver, au moyen d'un système donné (r), tous les systèmes (p) correspondants peut se résoudre de la manière la plus compréhensive et la plus élégante par la généralisation d'une méthode appliquée par Gauss [1] dans des cas spéciaux, et dans laquelle on utilise les relations identiques qui ont lieu entre les déterminants partiels; cependant cela nous conduirait ici beaucoup trop loin, et je me contenterai d'avoir démontré l'*existence* d'un tel système (p), duquel, comme on le voit immédiatement (d'après 3°), on peut tirer tous les autres systèmes (p) par la composition avec tous les systèmes possibles de n^2 nombres rationnels entiers dont le déterminant $= \pm 1$.

Dans la pratique, c'est-à-dire dans tous les cas où l'on donne

---

(1) *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 234, 236, 279.

numériquement les coefficients r, que l'on peut, sans diminuer la généralité, supposer être des nombres *entiers*, on arrivera au but de la manière la plus prompte, par un enchaînement de transformations élémentaires, en s'appuyant sur cette proposition évidente, qu'un module $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]$ n'est pas altéré quand on remplace, par exemple, le nombre α_1 par $\alpha_1 + x\alpha_2$, x étant un nombre rationnel entier quelconque. Les déterminants partiels R^0, correspondants à toutes les combinaisons de n nombres de la nouvelle base

$$\alpha_1^0 = \alpha_1 + x\alpha_2, \quad \alpha_2^0 = \alpha_2, \quad \alpha_3^0 = \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_m^0 = \alpha_m,$$

et au nouveau système de coefficients (r^0), coïncideront en partie avec les déterminants R correspondants à l'ancienne base

$$\alpha_1 = \alpha_1^0 - x\alpha_2^0, \quad \alpha_2 = \alpha_2^0, \quad \alpha_3 = \alpha_3^0, \quad \ldots, \quad \alpha_m = \alpha_m^0;$$

ils seront en partie de la forme $R_1^0 = R_1 + xR_2$, et de là on déduit facilement que le plus grand commun diviseur E des déterminants R est en même temps celui des déterminants R^0; donc les déterminants R^0 ne peuvent pas non plus s'annuler tous à la fois. De ces transformations de la base du module $\mathfrak{a}$, on fera maintenant l'usage suivant :

Les m coefficients $r_n^{(\mu)}$ du nombre ω_n ne peuvent pas s'annuler tous, car alors tous les déterminants R seraient nuls. Si maintenant *deux* au moins de ces coefficients, par exemple r_n' et r_n'', sont différents de zéro, et si l'on a, en valeur absolue, $r_n' \geq r_n''$, on pourra choisir le nombre rationnel entier x de manière que l'on ait, en valeur absolue, $r_n' + xr_n'' < r_n''$ (¹); on obtient alors, par la transformation élémentaire ci-dessus, une nouvelle base, dans laquelle tous les m coefficients $r_n^{(\mu)}$, à l'exception du premier r_n', sont restés invariables, et ce coefficient unique est remplacé par un autre de *moindre* valeur. Par une répétition successive de ce procédé, on arrivera donc nécessairement à une base, dans laquelle tous les m coefficients de ω_n, à l'exception d'un seul, seront nuls. Désignons le nombre de la base, dans lequel entre ce coefficient $a_n^{(n)}$ différent

(¹) C'est encore ici le même principe qui sert de fondement à la théorie des nombres rationnels entiers.

de zéro, par

$$\alpha'_n = a_1^{(n)}\omega_1 + a_2^{(n)}\omega_2 + \ldots + a_n^{(n)}\omega_n,$$

et conservons-le invariable dans toutes les transformations suivantes de la base. Les déterminants partiels correspondants à la base actuelle ou s'évanouissent, ou sont de la forme $Sa_n^{(n)}$, S étant un déterminant partiel du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré qui correspond à une combinaison arbitraire de $n-1$ des $m-1$ nombres de la base autres que α'_n, et qui est formé avec les $(n-1)^2$ coefficients correspondants de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$. Les déterminants S ne pouvant pas s'annuler tous, on procédera maintenant, avec ces $m-1$ nombres de la base actuelle, par rapport à ω_{n-1}, comme on l'a fait tout à l'heure avec les m nombres α_μ de la base primitive, par rapport à ω_n, et, si l'on continue toujours ces transformations, on finira par obtenir une base de $\mathfrak{a}$, composée de n nombres $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-1}, \alpha'_n$, de la forme

$$\alpha'_\nu = a_1^{(\nu)}\omega_1 + a_2^{(\nu)}\omega_2 + \ldots + a_\nu^{(\nu)}\omega_\nu,$$

et de $m-n=s$ nombres $\alpha''_1, \alpha''_2, \ldots, \alpha''_s$, qui s'annuleront tous, et par suite pourront être supprimés; les n coefficients $a_\nu^{(\nu)}$ différents de zéro pourront être choisis positifs, puisque α'_ν peut être remplacé, sans altération du module, par $-\alpha'_\nu$, et leur produit $a'_1 a''_2 \ldots a_n^{(n)}$ est évidemment le plus grand commun diviseur E de tous les déterminants partiels R.

Par là nous obtenons une seconde démonstration de l'important théorème (5°), et il est évident en même temps que, par la composition des transformations successives et par leur inversion, on trouve aussi bien le système de coefficients (p) qu'un système de coefficients (q). En effet, on obtient d'abord de cette manière m équations de la forme

$$\alpha_\mu = \sum^{\nu} p_\nu^{(\mu)}\alpha'_\nu + \sum^{\sigma} h_\sigma^{(\mu)}\alpha''_\sigma,$$

ou, les s nombres α''_σ étant nuls,

$$\alpha_\mu = \sum^{\nu} p_\nu^{(\mu)}\alpha'_\nu\,;$$

et, comme le déterminant de chacune des substitutions ou transfor-

mations est égal à 1, alors le déterminant du $m^{\text{ième}}$ degré

$$\begin{vmatrix} p'_1 & \dots & p'_n, & h'_1 & \dots & h'_s \\ \dots & \dots & \dots, & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(m)} & \dots & p_n^{(m)}, & h_1^{(m)} & \dots & h_s^{(m)} \end{vmatrix} = \Sigma\mathrm{PH} = 1,$$

les quantités H étant les déterminants du $s^{\text{ième}}$ degré complémentaires des déterminants P, et formés avec le système de coefficients (h). Par inversion, on obtient le déterminant adjoint

$$\begin{vmatrix} q'_1 & \dots & q'_n, & k'_1 & \dots & k'_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(m)} & \dots & q_n^{(m)}, & k_1^{(m)} & \dots & k_s^{(m)} \end{vmatrix} = \Sigma\mathrm{QK} = 1,$$

K désignant le déterminant complémentaire de Q; et, si P, Q sont deux déterminants correspondants, on a, comme on sait, $\mathrm{H} = \mathrm{Q}$, $\mathrm{K} = \mathrm{P}$; en même temps on obtient n équations de la forme

$$x'_\nu = \sum^{\mu} q_\nu^{(\mu)} \alpha_\mu$$

et s équations de la forme

$$x''_\sigma = \sum^{\mu} k_\nu^{(\mu)} \alpha_\mu = 0.$$

Ces dernières équations expriment de nouveau sous une autre forme la supposition primitive, que n seulement des m nombres α_μ sont indépendants entre eux, et l'on aurait pu fonder toute cette étude sur un pareil système de s équations.

On peut généralement abréger le calcul lui-même, en opérant à la fois plusieurs transformations élémentaires. Soit, par exemple, $m = 4$, $n = 2$, d'où $s = 2$, et

$$x_1 = 21\omega_1, \quad x_2 = 7\omega_1 + 7\omega_2, \quad x_3 = 9\omega_2 - 3\omega_2, \quad x_4 = 8\omega_1 + 2\omega_2,$$

partant

$$\begin{cases} r'_1 = 21, & r''_1 = 7, & r'''_1 = 9, & r^{\text{iv}}_1 = 8, \\ r'_2 = 0, & r''_2 = 7, & r'''_2 = -3, & r^{\text{iv}}_2 = 2; \end{cases}$$

on obtient les six déterminants partiels

$$(R)\quad \begin{cases} R_{1,2} = 147, & R_{1,3} = -63, & R_{1,4} = 42, \\ R_{3,4} = 42, & R_{2,4} = -42, & R_{2,3} = -84, \end{cases}$$

où l'on a posé, pour abréger

$$r_1^{(\mu)} r_2^{(\mu')} - r_1^{(\mu')} r_2^{(\mu)} = R_{\mu,\mu'};$$

entre ces déterminants on a la relation identique

$$R_{1,2}R_{3,4} - R_{1,3}R_{2,4} + R_{1,4}R_{2,3} = 0.$$

Comme maintenant ω_2 a dans α_4 le plus petit coefficient différent de zéro, on formera la nouvelle base

$$\beta_1 = \alpha_1 = 21\omega_1, \qquad \beta_2 = \alpha_2 - 3\alpha_4 = -17\omega_1 + \omega_2,$$
$$\beta_3 = \alpha_3 + 2\alpha_4 = 25\omega_1 + \omega_2, \quad \beta_4 = \alpha_4 = 8\omega_1 + 2\omega_2,$$

d'où s'ensuit, inversement,

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 + 3\beta_4, \quad \alpha_3 = \beta_3 - 2\beta_4, \quad \alpha_4 = \beta_4.$$

Maintenant, comme ω_2, par exemple, dans β_2 a le plus petit coefficient 1 différent de zéro, on formera la troisième base

$$\gamma_1 = \beta_1 = 21\omega_1, \qquad \gamma_2 = \beta_2 = -17\omega_1 + \omega_2,$$
$$\gamma_3 = -\beta_2 + \beta_3 = 42\omega_1, \quad \gamma_4 = -2\beta_2 + \beta_4 = 42\omega_1,$$

d'où s'ensuit, inversement,

$$\beta_1 = \gamma_1, \quad \beta_2 = \gamma_2, \quad \beta_3 = \gamma_2 + \gamma_3, \quad \beta_4 = 2\gamma_2 + \gamma_4.$$

Actuellement γ_2 étant le seul nombre dans lequel ω_2 a un coefficient différent de zéro, et γ_1 étant, parmi les trois autres nombres, celui dans lequel ω_1 a le plus petit coefficient 21, on formera la quatrième base

$$\delta_1 = \gamma_1 = 21\omega_1, \qquad \delta_2 = \gamma_2 = -17\omega_1 + \omega_2,$$
$$\delta_3 = -2\gamma_1 + \gamma_3 = 0, \quad \delta_4 = -2\gamma_1 + \gamma_4 = 0,$$

d'où l'on tire, inversement,

$$\gamma_1 = \delta_1, \quad \gamma_2 = \delta_2, \quad \gamma_3 = 2\delta_1 + \delta_3, \quad \gamma_4 = 2\delta_1 + \delta_4.$$

Comme $\delta_3 = \delta_4 = 0$, la transformation est terminée, et les substi-

tutions successives donnent

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \delta_1 &&= \delta_1,\\
\alpha_2 &= 6\delta_1 - 7\delta_2 + 3\delta_4 &&= 6\delta_1 - 7\delta_2,\\
\alpha_3 &= -2\delta_1 - 3\delta_2 + \delta_3 - 2\delta_4 &&= -2\delta_1 - 3\delta_2,\\
\alpha_4 &= 2\delta_1 + 2\delta_2 + \delta_4 &&= 2\delta_1 + 2\delta_2,
\end{aligned}$$

et inversement

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \alpha_1 &&= 21\omega_1,\\
\delta_2 &= \alpha_2 - 3\alpha_4 &&= -17\omega_1 + \omega_2,\\
\delta_3 &= -2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 5\alpha_4 &&= 0,\\
\delta_4 &= -2\alpha_4 - 2\alpha_2 + 7\alpha_4 &&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ sont les quantités qui, dans la théorie générale, ont été désignées par $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha''_1, \alpha''_2$, on aura

$$(p)\qquad \begin{cases} p'_1 = 1, & p''_1 = 6, & p'''_1 = -2, & p^{\text{IV}}_1 = 2,\\ p'_2 = 0, & p''_2 = 7, & p'''_2 = -3, & p^{\text{IV}}_2 = 2; \end{cases}$$

on obtient donc, pour les déterminants proportionnels aux R,

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{cases} \mathrm{P}_{1,2} = 7, & \mathrm{P}_{1,3} = -3, & \mathrm{P}_{1,4} = 2,\\ \mathrm{P}_{3,4} = 2, & \mathrm{P}_{2,4} = -2, & \mathrm{P}_{2,3} = -4; \end{cases}$$

on a de même

$$(q)\qquad \begin{cases} q_1 = 1, & q''_1 = 0, & q'''_1 = 0, & q^{\text{IV}}_1 = 0,\\ q'_2 = 0, & q''_2 = 1, & q'''_2 = 0, & q^{\text{IV}}_2 = -3, \end{cases}$$

et

$$(\mathrm{Q})\qquad \begin{cases} \mathrm{Q}_{1,2} = 1, & \mathrm{Q}_{1,3} = 0, & \mathrm{Q}_{1,4} = -3,\\ \mathrm{Q}_{3,4} = 0, & \mathrm{Q}_{2,4} = 0, & \mathrm{Q}_{2,3} = 0. \end{cases}$$

Ensuite, des systèmes de coefficients

$$(h)\qquad \begin{cases} h'_1 = 0, & h''_1 = 0, & h'''_1 = 1, & h^{\text{IV}}_1 = 0,\\ h'_2 = 0, & h''_2 = 3, & h'''_2 = -2, & h^{\text{IV}}_2 = 1, \end{cases}$$

et

$$(\mathfrak{h})\qquad \begin{cases} \mathfrak{h}'_1 = -2, & \mathfrak{h}''_1 = -1, & \mathfrak{h}'''_1 = 1, & \mathfrak{h}^{\text{IV}}_1 = 5,\\ \mathfrak{h}'_2 = -2, & \mathfrak{h}''_2 = -2, & \mathfrak{h}'''_2 = 0, & \mathfrak{h}^{\text{IV}}_2 = 7. \end{cases}$$

on tire les déterminants $H_{\mu,\mu'} = Q_{\mu,\mu'}$ et $K_{\mu,\mu'} = P_{\mu,\mu'}$, qui sont respectivement complémentaires de $P_{\mu,\mu'}$ et $Q_{\mu,\mu'}$,

$$(\mathrm{H}) \left\{ \begin{array}{lll} H_{1,2} = h'''_1 h^{\mathrm{iv}}_2 - h^{\mathrm{iv}}_1 h'''_2, & H_{1,3} = h^{\mathrm{iv}}_1 h''_2 - h''_1 h^{\mathrm{iv}}_2, & H_{1,4} = h''_1 h'''_2 - h'''_1 h''_2, \\ H_{3,4} = h'_1 h''_2 - h''_1 h'_2, & H_{2,4} = h'''_1 h'_2 - h'_1 h'''_2, & H_{2,3} = h'_1 h^{\mathrm{iv}}_2 - h^{\mathrm{iv}}_1 h'_2, \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{K}) \left\{ \begin{array}{lll} K_{1,2} = k'''_1 k^{\mathrm{iv}}_2 - k^{\mathrm{iv}}_1 k'''_2, & K_{1,3} = k^{\mathrm{iv}}_1 k''_2 - k''_1 k^{\mathrm{iv}}_2, & K_{1,4} = h''_1 k'''_2 - h'''_1 k''_2, \\ K_{3,4} = k'_1 k''_2 - k''_1 k'_2, & K_{2,4} = k'''_1 k'_2 - k'_1 h'''_2, & K_{2,3} = h'_2 k^{\mathrm{iv}}_2 - k^{\mathrm{iv}}_1 k'_2, \end{array} \right.$$

et ainsi l'exemple se trouve complétement traité.

Pour conclure, je remarquerai que l'application au cas de $n = 1$ conduit au théorème fondamental sur le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de nombres rationnels entiers, théorème sur lequel repose toute la théorie de divisibilité de ces nombres.

Les recherches dans cette première Section ont été exposées sous la forme spéciale qui répond à notre but; mais il est clair qu'elles ne cessent en rien d'être vraies, quand les lettres grecques désignent, non plus des *nombres*, mais des éléments quelconques, objets de l'étude que l'on poursuit, dont deux quelconques α, β, par une opération commutative et uniformément inversible (composition), tenant la place de l'addition, produiront un élément déterminé $\gamma = \alpha + \beta$ de la même espèce; les modules $\mathfrak{a}$ se changent en *groupes* d'éléments, dont les résultats (les *composés*) appartiennent toujours au même groupe; les coefficients rationnels entiers indiquent combien de fois un élément contribue à la génération d'un autre.

(*A suivre.*)

DÉMONSTRATION DE LA PÉRIODICITÉ DES FRACTIONS CONTINUES, ENGENDRÉES PAR LES RACINES D'UNE ÉQUATION DU DEUXIÈME DEGRÉ;

PAR M. CHARVES.

Soit x une racine réelle et positive de l'équation

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

où l'on suppose a, b, c entiers.

J'imagine qu'on développe x en fraction continue. J'appelle y l'un des quotients complets et $\frac{P}{Q'}$, $\frac{P'}{Q'}$ les deux dernières réduites obtenues avant d'arriver à ce quotient ; on a

$$x = \frac{Py + P'}{Qy + Q'},$$

et, en portant cette valeur de x dans (1), on obtient une équation en y,

$$(2) \qquad a'y^2 + b'y + c' = 0.$$

Je vais démontrer que les nombres entiers a', b', c' ne peuvent dépasser en valeur absolue des nombres déterminés A, B, C.

En effet, on a

$$a' = aP^2 + bPQ + cQ^2 = Q^2\left(a\frac{P^2}{Q^2} + b\frac{P}{Q} + c\right);$$

je pose

$$\frac{P}{Q} = x + \varepsilon;$$

a' devient alors, en tenant compte de (1),

$$a' = \varepsilon Q^2(2ax + b) + a\varepsilon^2 Q^2,$$

et, comme ε est plus petit que $\frac{1}{Q^2}$ en valeur absolue, on obtient, en ne prenant pour chaque terme que sa valeur absolue,

$$a' < 2ax + b + \frac{a}{Q^2}.$$

Il existe donc un nombre A auquel la valeur absolue de a' est constamment inférieure, quel que soit le quotient complet y auquel on s'arrête.

La même démonstration s'applique évidemment à c'. Quant à b', on peut l'écrire

$$b' = QQ'\left[2a\frac{P}{Q}\frac{P'}{Q'} + b\left(\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'}\right) + 2c\right],$$

et si l'on pose

$$\frac{P}{Q} = x + \varepsilon, \quad \frac{P'}{Q'} = x + \varepsilon',$$

il vient, en tenant compte de (1),

$$b' = (2ax + b)(\varepsilon' + \varepsilon')QQ' + 2a\varepsilon\varepsilon' QQ'.$$

Mais ε et ε' sont l'un et l'autre, en valeur absolue, plus petits que $\frac{1}{QQ'}$; donc, en se bornant aux valeurs absolues, on obtient

$$b' < 2(2ax + b) + \frac{2a}{QQ'};$$

donc b' reste inférieur à un nombre donné B.

Il résulte de là que les équations analogues à (2), obtenues en prenant successivement chaque quotient complet, ne seront pas indéfiniment distinctes, et qu'on finira par trouver une équation déjà obtenue; on arrivera donc à un quotient complet identique à l'un des précédents, à partir duquel les quotients incomplets se reproduiront périodiquement.

Remarque. — On pourrait établir l'inégalité $b' < B$ en partant de la relation

$$b'^2 - 4a'c' = b^2 - 4ac;$$

mais j'ai préféré la démonstration précédente, parce qu'elle montre que la périodicité des fractions continues engendrées par les racines d'une équation du second degré tient uniquement au degré d'approximation des réduites.

NOTE SUR DEUX FORMULES D'ANALYSE;

PAR M. ALEXÉIEF.

I.

$$(1)\qquad \operatorname{arc\,tang} a + \sum_{1}^{\infty} \operatorname{arc\,tang} \frac{2a}{1 + a^2(k^2 - 1)} = \pi.$$

a est un nombre arbitraire; la sommation se rapporte au nombre k, qui reçoit des valeurs entières depuis 1 jusqu'à ∞. En faisant $a = 1$, on a

$$(2)\qquad \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{1^2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{2^2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{2}{3^2} + \ldots = \frac{3\pi}{4}.$$

II.

Si l'on pose, pour abréger l'écriture,

$$u_k = \sqrt{1 + a^2 k^2}, \quad v_k = \sqrt{1 + a^2 \varepsilon^2 k^2},$$

où $\varepsilon^2 < 1$, k recevant des valeurs entières depuis 1 jusqu'à ∞, on a

$$(3)\qquad \sum_{1}^{\infty} \arg\left[\lambda = \frac{a(2k+1)}{(k+1)u_{k+1}v_k + k u_k v_{k+1}}\right] = \frac{\omega}{4}.$$

λ est sin am d'un argument elliptique, dont le module est ε; $\frac{\omega}{4}$ est l'intégrale complète de première espèce. Il est évident qu'on peut écrire la formule (3) en forme d'une série infinie d'intégrales, dont les limites varient d'un terme à l'autre d'après la loi indiquée par la formule (3).

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

AOUST (l'abbé), professeur d'Analyse à la Faculté des Sciences de Marseille. — ANALYSE INFINITÉSIMALE DES COURBES.

ANALYSE INFINITÉSIMALE DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE QUELCONQUE. In-8°, avec figures dans le texte; 1869. Prix : 7 fr.

ANALYSE INFINITÉSIMALE DES COURBES PLANES, contenant la résolution d'un grand nombre de Problèmes choisis, à l'usage des Candidats à la Licence ès sciences. In-8°, avec 80 figures dans le texte; 1873. Prix : 8 fr. 50 c.

ANALYSE INFINITÉSIMALE DES COURBES DANS L'ESPACE. Un fort volume in-8°, avec 40 figures dans le texte; 1876. Prix : 11 fr.

Cet Ouvrage, apprécié avec faveur par les géomètres les plus compétents dans les Rapports officiels et deux fois couronné aux concours des Sociétés savantes, est tout à fait distinct de ceux qui ont été écrits sur la même matière, surtout par l'originalité des vues dont il est rempli, suivant l'expression d'un des savants rapporteurs.

Et en effet, l'auteur y donne la théorie des courbes d'abord par l'analyse de leurs équations naturelles, laquelle est indépendante de tout système coordonné, et par une analyse qui se rapporte à un système quelconque de coordonnées curvilignes. Cette double analyse permet d'aborder et de traiter les questions nouvelles les plus difficiles.

Le premier Volume est consacré à l'étude des courbes tracées sur une surface quelconque. Or étudier la courbe indépendamment de la surface n'est pas une chose rationnelle; c'est en cheminant sur la surface qu'il faut suivre le parcours de la courbe. L'analyse fondée sur ce point de vue instruit le géomètre sur les propriétés de la courbe et sur l'influence de la surface, parce que les éléments inhérents à l'une et à l'autre sont conservés et qu'aucun de ceux qui leur sont étrangers n'y est introduit.

La courbure introduite par l'auteur sous le nom de *courbure inclinée* se prête aux exigences de ce point de vue, parce qu'elle ne dépend que des courbes tracées sur la surface, et que ses composantes, soit normale, soit tangentielle, s'expriment avec une simplicité inespérée, dans le premier cas en fonction des éléments de la sur-

face, et dans le second en fonction des éléments des courbes qu'elle contient.

Les applications de cette analyse se présentent dans un ordre méthodique, qui permet de les systématiser en les graduant, d'établir directement les équations différentielles de chaque problème et de discerner les cas où elles sont intégrables. Ainsi les théories des trajectoires, des lignes asymptotiques, des lignes de courbure, des lignes conjuguées, des lignes géodésiques, des lignes dont la courbure est donnée viennent naturellement et par ordre se placer dans ce cadre et sont traitées avec facilité, quoique les équations soient écrites dans un système quelconque de coordonnées.

Une large part est donnée à l'étude des courbes dans le système géodésique orthogonal : 1° parce qu'il facilite le passage des équations naturelles de la courbe à celles qui donnent sa position absolue ; 2° parce que les formules se rapportant à ce système ne diffèrent de celles qui se rapportent aux coordonnées polaires planes que par les termes se rapportant à la courbure de la surface, de sorte que l'on est éclairé et sur le rôle de la surface et sur le rôle de la courbe.

Le second Volume est consacré à l'étude des courbes planes d'après une double analyse : la première indépendante de tout système coordonné, la seconde dans un système de coordonnées quelconques. Dans le premier cas, l'équation naturelle de la courbe suffit pour en faire connaître tous les éléments : la direction de la tangente, le rayon de courbure, la déviation, la rectification et la quadrature. Cette même équation est elle-même le critérium d'après lequel on reconnaît si deux courbes se rapportant à deux définitions différentes sont identiques ; elle résout en même temps la question si importante de la classification naturelle des lignes.

Cette analyse permet aussi de déduire de l'équation naturelle presque sans effort : 1° la théorie des développées et développantes orthogonales ou obliques d'un ordre quelconque ; 2° la théorie des roulettes, des podaires, des caustiques dans toute leur généralité ; 3° l'étude complète des lignes engendrées par le mouvement d'une figure invariable de forme ou variant d'après des lois données ; 4° la théorie des transformations simples ou doubles des figures.

Dans le second cas, la courbe est étudiée d'après un système quelconque de coordonnées. Cette étude repose sur la théorie com-

plète des coordonnées curvilignes, qui est faite géométriquement et se déduit d'un seul principe, le principe de la *courbure inclinée*. Ensuite on donne des formules simples qui expriment les éléments de la courbe au moyen des éléments correspondants des lignes coordonnées. Enfin on passe aux applications, dans lesquelles sont traités un grand nombre de problèmes intéressants et nouveaux.

Le troisième Volume est consacré à l'étude des courbes gauches d'après le même plan et la même double analyse. Mais ici se présentent des difficultés inhérentes à la nature de la courbe gauche. Dans la première analyse, deux équations naturelles sont nécessaires pour la représenter, et la recherche des éléments de la courbe dépend tantôt de la première, tantôt de la seconde, tantôt de la combinaison de ces deux équations. Ce dernier cas se présente dans la recherche de l'identité de deux courbes et dans la classification naturelle des lignes. La position absolue de la tangente dans l'espace dépend d'une seule des deux équations naturelles de la courbe, mais suppose l'intégration d'une équation linéaire du second ordre.

A part ces difficultés, inhérentes à la nature de la question, cette analyse se prête à la résolution complète des problèmes les plus importants, et donne avec facilité les intégrales des développantes orthogonales ou obliques d'un ordre quelconque, des développées d'un ordre quelconque, des roulettes, des trajectoires d'un plan ou d'une surface mobile, et d'un grand nombre d'autres questions nouvelles.

L'analyse des coordonnées curvilignes, appliquée à l'étude des courbes dans l'espace, forme un corps de doctrine très-général, qui sera apprécié par les géomètres; elle repose sur la résolution du problème des coordonnées curvilignes, que l'auteur donne d'une manière tellement générale qu'elles renferment toutes celles qui ont été ou peuvent être données, suivant l'hypothèse que l'on fait sur la nature de la courbure inclinée, dont l'inclinaison est restée arbitraire. Au moyen de ces formules, on calcule celles qui se rapportent à la courbe gauche, et l'on obtient des relations simples qui lient ses éléments aux éléments correspondants des lignes coordonnées. La traduction de ces relations fournit l'énoncé des théorèmes les plus remarquables de la Géométrie rectiligne.

La partie relative aux applications de ces formules à la théorie des courbes est presque entièrement nouvelle. Elle donne le con-

tact des courbes et des surfaces dans un système quelconque de coordonnées; les trajectoires des lignes et des surfaces du système, soit orthogonales, soit obliques, les trajectoires conjuguées d'une série de surfaces, par rapport à une surface du second degré quelconque; enfin la théorie des surfaces orthogonales et des surfaces se coupant sous une condition donnée.

L'auteur n'a rien négligé pour rendre son Ouvrage digne de l'attention des géomètres et utile à ceux qui veulent approfondir l'étude des courbes.

ENNEPER (A.). — Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge von Dr Alfred Enneper, Professor an der Universität zu Göttingen.

Le titre du Livre de M. Enneper indique l'esprit dans lequel il a été conçu. L'auteur n'a pas voulu mettre simplement le lecteur en possession des principales vérités acquises, il a tenu à le renseigner sur la façon dont ces vérités ont été obtenues et sur ceux qui les ont découvertes. Chaque proposition importante est accompagnée de renseignements historiques et bibliographiques d'autant plus précieux qu'on peut être pleinement assuré de leur exactitude : l'auteur a compulsé lui-même tous les Mémoires et tous les livres qu'il cite, travail dont on appréciera aisément la longueur et qui, d'ailleurs, n'était rendu possible que par l'extrême richesse de la bibliothèque de Göttingue. On ne saurait trop insister sur le parti que le lecteur peut tirer des nombreuses indications bibliographiques fournies par M. Enneper.

Quant à la partie mathématique, elle est traitée à un point de vue entièrement analytique, dans l'esprit de Jacobi. Les méthodes si sûres et si claires qui ont leur point de départ dans le Mémoire de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires sont volontairement laissées de côté. Il est bien entendu que nous ne nous permettons à ce sujet aucune critique : plus d'un lecteur, en possession de ces méthodes, trouvera son avantage à ne plus les rencontrer dans le livre de M. Enneper et à se familiariser avec ces procédés algébriques qui, mis en œuvre par Jacobi et ses élèves, ont donné de si admirables résultats.

L'Ouvrage comprend neuf Sections. La première, après une introduction historique, s'ouvre par quelques considérations préliminaires sur les intégrales qui conduisent aux fonctions circulaires; viennent ensuite la réduction des intégrales elliptiques d'après Legendre, puis le théorème fondamental de Jacobi sur la transformation.

Dans la seconde Section, les fonctions elliptiques sont définies en partant de l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = du.$$

L'auteur introduit la seconde période, en partant des formules

$$\sin\operatorname{am}(ui, k) = i\,\frac{\sin\operatorname{am}(u, k')}{\cos\operatorname{am}(u, k')}$$

et des formules analogues.

La troisième Section contient le développement des fonctions elliptiques en produits infinis : les formules sont posées *a priori*, d'après la double suite de zéros que fait connaître la double périodicité; dans une seconde démonstration, il est établi que les fonctions ainsi formées satisfont aux équations différentielles qui définissent les fonctions elliptiques.

Dans la quatrième Section, les produits infinis sont transformés en sommes de fractions, lesquelles conduisent naturellement aux séries trigonométriques : les séries de même nature sont ensuite données pour les carrés et les produits des fonctions elliptiques; on vérifie encore que les séries trigonométriques qui représentent les fonctions elliptiques satisfont aux équations différentielles; puis l'identité

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}(1 - q^{2r})\prod_{1}^{\infty}(1 + 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\cos 2nx,$$

établie directement, conduit à la définition des fonctions Θ, H.

La cinquième Section concerne les quatre fonctions ϑ et leurs propriétés essentielles, entre autres le théorème fondamental de Jacobi, relatif à l'addition des arguments, où entre la somme de quatre produits de quatre fonctions ϑ, les nombreuses formules qui

s'en déduisent, et les considérations, relatives tant aux constantes $\vartheta(o)$, $\vartheta_2(o)$, $\vartheta_3(o)$ qu'aux quotients des fonctions ϑ, qui permettent de passer de ces dernières aux fonctions elliptiques.

Ce passage est exposé dans la Section suivante, qui contient en outre le tableau général des développements en séries et en produits des fonctions elliptiques.

Les relations établies entre les fonctions ϑ contiennent les théorèmes sur l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. Ces théorèmes sont donnés sous la forme habituelle au début de la septième Section; M. Enneper rappelle ensuite les démonstrations d'Euler, de Lagrange et de quelques autres. Le tableau des formules qui se déduisent immédiatement de la proposition fondamentale termine naturellement cette Section.

Dans la Section suivante, les intégrales elliptiques sont classées; l'intégrale de seconde espèce est étudiée, tant au point de vue du théorème de Legendre sur l'addition qu'au point de vue de la connexion essentielle établie par Jacobi entre les intégrales et les fonctions ϑ. Les équations différentielles qui relient les intégrales de première et de seconde espèce au module trouvent ensuite leur place; puis viennent les recherches de Legendre sur les intégrales de troisième espèce, relativement au paramètre, le théorème du même géomètre sur l'addition de ces intégrales, l'expression du paramètre au moyen des fonctions elliptiques, les développements en séries dus à Jacobi, les relations entre ces intégrales et les fonctions ϑ, l'étude de l'intégrale complète, l'interversion de l'argument et du paramètre, le théorème sur l'addition des arguments et des paramètres, enfin l'étude des différentes formes sous lesquelles peut être mise l'intégrale de troisième espèce.

La neuvième Section est la plus considérable de toutes : elle concerne le problème de la multiplication, au point de vue de Jacobi comme à celui d'Abel, la multiplication des fonctions elliptiques, la transformation générale des fonctions ϑ, l'étude des équations modulaires, de l'équation différentielle du troisième ordre entre le module primitif et le module transformé, la détermination du multiplicateur au moyen de l'équation modulaire, la formule générale de Schröter sur le produit de deux fonctions ϑ, enfin le mode de formation des équations modulaires donné par le même auteur.

Une suite de notes intéressantes sur divers points de la théorie et sur plusieurs applications tant géométriques qu'analytiques termine le Volume.

HANKEL (Dr Hermann). — DIE ELEMENTE DER PROJECTIVISCHEN GEOMETRIE IN SYNTHETISCHEN BEHANDLUNG (¹).

Ces leçons ont été extraites des papiers laissés par Hankel; elles sont publiées par M. Harnack; l'auteur les a professées à l'Université de Tübingue.

Elles constituent un résumé très-élémentaire de ce que quelques-uns ont appelé la *Géométrie nouvelle :* on peut, en France, en conseiller la lecture aux élèves de la classe de Mathématiques spéciales. La publication d'un pareil livre n'est pas, d'ailleurs, sans intérêt; les découvertes qui ont servi de point de départ aux récents progrès de la Géométrie semblent vieilles, lorsqu'on regarde le chemin qui a été fait dans la voie nouvelle; du point où nous sommes, on juge mieux ces commencements éloignés, on distingue mieux ce qu'il y a de fondamental. Le moment était venu de faire un bon livre élémentaire.

Celui de Hankel s'ouvre par une préface à la fois historique et philosophique, qu'on lira avec intérêt: on connaît le goût qu'avait l'auteur pour l'histoire des Mathématiques, et l'on n'a pas à s'étonner du soin avec lequel sont écrites ces 35 pages d'histoire contemporaine, remplies de faits qu'il conviendrait de ne pas ignorer. Hankel y montre même quelque enthousiasme. Il rappelle la réponse que fit, dit-on, Euclide aux plaintes du roi Ptolémée sur les ennuyeux débuts de la Géométrie; et il s'écrie, en terminant sa préface : *la Géométrie nouvelle est ce chemin royal !*

Les leçons sont divisées en sept Sections :

La première Section est relative à la théorie du rapport anharmonique et des transversales : on y trouve exposés avec détails le principe des signes, les relations fondamentales entre les distances

(¹) *Exposition synthétique des éléments de la Géométrie projective.* Leipzig, 1875, IV-256 p.

de trois ou quatre points situés en ligne droite, la définition et les propriétés fondamentales du rapport anharmonique, les propriétés du quadrilatère complet, les considérations générales sur les propriétés métriques projectives par lesquelles Poncelet débute dans son célèbre Traité, et les propriétés des transversales dans le triangle et le quadrilatère.

La seconde Section contient la théorie des pôles et des polaires dans le cercle, avec des applications intéressantes.

La troisième Section se rapporte aux divisions et aux faisceaux homographiques ou en involution, à la construction des points et des rayons doubles (avec l'examen détaillé des cas où les solutions sont réelles ou imaginaires), enfin au théorème de Desargues.

La quatrième Section concerne la solution des trois problèmes qu'Apollonius a nommés *sectio rationis, sectio spatii, sectio determinata,* et d'un problème général qui les renferme tous les trois.

La cinquième Section contient l'application faite par Möbius des nouvelles méthodes géométriques à la théorie des lentilles, avec diverses constructions simples dues à Reusch, Lippich et Beck.

On trouve dans la sixième Section les propriétés homographiques des coniques, les théorèmes de Pascal et de Brianchon avec les recherches y relatives de Steiner et de Plücker, la classification des coniques, la théorie des pôles et des polaires, des diamètres et des centres.

Enfin la septième Section contient un exposé rapide des fondements de la Géométrie de position de von Staudt, des transformations homographiques avec l'application aux figures semblables et identiques, et finalement la construction et les propriétés essentielles des figures collinéaires.

L'intérêt du livre de Hankel est principalement dans le soin avec lequel les principes sont exposés, dans le choix des applications et surtout dans les nombreux renseignements historiques et bibliographiques.

LINDMAN (C.-E.) — SUR UNE FONCTION TRANSCENDANTE. (*Nova Acta regiæ Societatis Scientiarum Upsalensis*, t. IX; 1874). 48 p.

Ce Mémoire est consacré à la détermination de fonctions transcendantes particulières, intégrées entre certaines limites, et déjà étudiées par Euler, Legendre, Bierens de Haan, Lobatchefsky et Cauchy.

Parmi ces fonctions, nous signalons plus spécialement les intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot ax dx = \mathrm{H}(a),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin ax} = \mathrm{L}(a) = \mathrm{H}\left(\frac{a}{2}\right) - \mathrm{H}(a),$$

$$\mathrm{J}_\nu^m = \int_0^1 \frac{x^{m-1} lx}{1 + x^\nu} dx \quad (m < \nu).$$

L'auteur indique les relations mutuelles entre les fonctions H (...) et les fonctions L (...); la formule qui établit le passage entre $\mathrm{L}(1-b)$ et $\mathrm{L}(1+b)$, entre $\mathrm{H}(1-b)$ et $\mathrm{H}(1+b)$, et la définition d'une série numérique en fonction du symbole H (...) ou L (...), par exemple (§ 2) la formule

$$(1) \qquad \int_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1^2)} dp = \frac{1}{2}\mathrm{L}(1),$$

et (§ 22) la formule

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} - \ldots = -\frac{\pi}{4} l2 + \frac{1}{2}\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Le § 23 et dernier est consacré à la détermination numérique des fonctions $\mathrm{H}(a)$ et $\mathrm{L}(a)$, dont les coefficients sont fonctions des nombres de Bernoulli.

L'auteur indique l'expression numérique des fonctions

$$\mathrm{L}(a) + \mathrm{H}(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}(a) - \mathrm{H}(a),$$

puis viennent trois Tables donnant :

La Table I_a, les valeurs de $l \sin \frac{a\pi}{4}$, de $a = 0,05$ à $a = 1,95$;

La Table I_b, les valeurs de $\pi l 2 \cos \frac{b\pi}{4}$ et de $\pi l \operatorname{tang} \frac{b\pi}{4}$, de $b = 0,05$ à $b = 0,95$;

La Table II, les valeurs de $L(a)$ et de $H(a)$ entre les limites $a = 0,05$ et $a = 1,95$, $a = \frac{1}{3}$, $a = \frac{2}{3}$, $a = \frac{4}{3}$ et $a = \frac{5}{3}$.

De nombreux exemples d'intégrales transcendantes définies, offrant un certain intérêt, se rencontrent dans le courant du Mémoire. Parmi ces intégrales, nous signalerons en particulier (§ 12)

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} l(1 - 2x\cos\varphi_p + x^2) = \pi\varphi_p - \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\varphi_p^2.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \operatorname{arc\,tang} \frac{x \sin\varphi_p}{1 - x\cos\varphi_p} = \frac{2\varphi_p^2}{\pi^2} H\left(\frac{\varphi_p}{\pi}\right) - \varphi_p l 2 \sin\frac{\varphi_p}{2},$$

avec

$$\varphi_p = (2p+1)\frac{\pi}{\nu}.$$

H. B.

MÉLANGES.

SUR L'ÉLIMINATION ENTRE DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES A UNE INCONNUE;

PAR G. DARBOUX.

1. Dans une Note insérée au tome X de ce *Bulletin*, je me suis proposé de démontrer le théorème fondamental relatif à l'élimination entre deux équations à une inconnue.

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0, \tag{1}$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = 0 \tag{2}$$

les deux équations données, et, si m et n sont inégaux, supposons $m > n$. En employant la méthode de Bézout, on obtient leur résultante sous la forme d'un déterminant d'ordre m; et, sans faire appel à la théorie des fonctions symétriques, j'ai établi que la condition nécessaire et suffisante pour que les équations aient une racine commune s'obtient en égalant à zéro le déterminant.

Je me propose de reprendre ici cette démonstration, afin de simplifier et surtout de ramener à un principe unique la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations aient p et seulement p racines communes.

2. Le point fondamental de la méthode de Bézout consiste dans l'artifice suivant. On réunit dans $f(x)$ et $\varphi(x)$ tous les termes qui sont divisibles par une certaine puissance de x, x^r; on a ainsi

$$f(x) = P + x^r P', \tag{3}$$

où P est un polynôme du degré $r - 1$ et P′ un polynôme de degré $m - r$. De même, on peut écrire

$$g(x) = Q + x^r Q', \tag{4}$$

où Q est de degré $r - 1$ et Q′ de degré $n - r$. D'après cela, si l'on multiplie les équations (3) et (4) respectivement par Q′ et P′ et qu'on les retranche, on formera l'identité

$$Q' f(x) - P' g(x) = PQ' - QP', \tag{5}$$

où le second membre sera un polynôme au plus du degré $m - 1$.

Donnons à r successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, et nous obtiendrons ainsi les identités

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 x + \ldots + a_m x^{m-1})\, g(x) - (b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1})\, f(x) \\
&\quad = \varphi_0(x) = c_{0,0} + c_{0,1} x + \ldots + c_{0,m-1} x^{m-1}, \\
&(a_2 + a_3 x + \ldots + a_m x^{m-2})\, g(x) - (b_2 + b_3 x + \ldots + b_n x^{n-2})\, f(x) \\
&\quad = \varphi_1(x) = c_{1,0} + c_{1,1} x + \ldots + c_{1,m-1} x^{m-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&(a_n + a_{n+1} x + \ldots + a_m x^{m-n})\, g(x) - b_n f(x) \\
&\quad = \varphi_{n-1}(x) = c_{n-1,0} + c_{n-1,1} x + \ldots + c_{n-1,m-1} x^{m-1},
\end{aligned}\right.$$

auxquelles nous ajouterons les suivantes, si m est plus grand que n :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} g(x) &= b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n,\\ x g(x) &= b_0 x + b_1 x^2 + \ldots + b_n x^{n+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x^{m-n-1} g(x) &= b_0 x^{m-n-1} + \ldots + b_n x^{m-1}. \end{aligned}\right.$$

Si les équations (1) et (2) admettent une racine commune, cette valeur de x, en vertu des identités précédentes, devra évidemment satisfaire aux équations

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}(x) = 0, \quad g(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-n-1} g(x) = 0.$$

Or ces équations, au nombre de n, peuvent être considérées comme des équations du premier degré, servant à déterminer $m - 1$ inconnues distinctes, qui sont les différentes puissances de x, savoir x, x^2, ..., x^{m-1}. Comme elles sont en nombre supérieur d'une unité à celui des inconnues, il faudra, pour qu'elles admettent une solution commune, que leur déterminant soit égal à zéro. Ce déterminant, que je désignerai par A, a pour valeur

$$A = \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{0,m-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{1,m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{n-1,m-1} \\ b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & \ldots & b_n \end{vmatrix},$$

et il est clair que, s'il n'est pas nul, il n'y aura pas de racine commune.

3. Je dis maintenant que réciproquement, si le déterminant A est nul, les équations proposées auront au moins une racine commune. En effet, si cette condition est remplie, on peut trouver au moins un système d'arbitraires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ vérifiant les équations suivantes :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 c_{0,0} + \lambda_1 c_{1,0} + \ldots + \lambda_{n-1} c_{n-1,1} + \lambda_n b_0,\\ 0 &= \lambda_0 c_{0,1} + \lambda_1 c_{1,1} + \ldots + \lambda_{n-1} c_{n-1,1} + \lambda_n b_1 + \lambda_{n+1} b_0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ 0 &= \lambda_0 c_{0,m-1} + \ldots + \lambda_{n-1} c_{n-1,m-1} + \ldots + \lambda_{m-1} b_n; \end{aligned}\right.$$

car le résultat de l'élimination des arbitraires λ entre ces équations donne encore le déterminant A, dans lequel les lignes seraient changées en colonnes et les colonnes en lignes. Ainsi, toutes les fois que le déterminant sera nul, on pourra toujours trouver des arbitraires λ qui ne soient pas toutes nulles et qui vérifient les équations (8).

Ce point étant admis, multiplions les identités (6) et (7) dans l'ordre où elles sont écrites, par les arbitraires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$, et ajoutons toutes ces identités. En vertu des équations (8), les coefficients de toutes les puissances de x dans le second membre seront nuls, et l'on obtiendra une nouvelle identité de la forme

$$f_1(x)\,g(x) - f(x)\,g_1(x) = 0, \tag{9}$$

où l'on a

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} g_1(x) &= \lambda_0(b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1}) \\ &\quad + \lambda_1(b_2 + \ldots + b_n x^{n-2}) + \ldots + \lambda_{n-1} b_n, \\ f_1(x) &= \lambda_0(a_1 + \ldots + a_m x^{m-1}) + \lambda_1(a_2 + \ldots + a_m x^{m-2}) + \ldots \\ &\quad + \lambda_{n-1}(a_n + \ldots + a_m x^{m-n-1}) + \lambda_n + \lambda_{n+1} x + \ldots + \lambda_{m-1} x^{m-n-1} \end{aligned}\right.$$

Il résulte de ces expressions de $f_1(x)$, $g_1(x)$ que ces polynômes sont de degrés inférieurs respectivement à ceux de $f(x)$ et de $g(x)$.

Or, en vertu de l'identité (9), toutes les racines de $f(x)$ sont racines de l'équation

$$f_1(x)\,g(x) = 0,$$

et, comme le degré de $f_1(x)$ est inférieur à celui de $f(x)$, une au moins des racines de $f(x)$ appartient à $g(x)$: c'est ce qu'il fallait démontrer.

4. Il est vrai que le raisonnement serait en défaut si les polynômes $f_1(x)$ et $g_1(x)$ étaient identiquement nuls ; mais la forme même de ces polynômes indique que cela ne peut avoir lieu. En effet on peut écrire $g_1(x)$ de la manière suivante :

$$g_1(x) = \lambda_0 b_n x^{n-1} + \left.\begin{matrix}\lambda_0 b_{n-1} \\ + \lambda_1 b_n\end{matrix}\right| x^{n-2} + \ldots + \lambda_0 b_1 + \ldots + \lambda_{n-1} b_n.$$

On voit que ce polynôme ne sera nul que si l'on a

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 b_n + \lambda_0 b_{n-1} = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_0 b_1 + \ldots + \lambda_{n-1} b_n = 0,$$

ce qui donne

(11) $$\lambda_0 = 0,\quad \lambda_1 = 0,\quad \ldots,\quad \lambda_{n-1} = 0.$$

Avec ces hypothèses, $f_1(x)$ se réduira au polynôme

$$\lambda_n + \lambda_{n+1} x + \ldots + \lambda_{m-1} x^{m-n-1},$$

qui ne sera identiquement nul que si l'on a aussi

(12) $$\lambda_n = 0,\quad \lambda_{n+1} = 0,\quad \ldots,\quad \lambda_{m-1} = 0.$$

Les arbitraires λ n'étant pas toutes nulles par hypothèse, on voit que les polynômes $f_1(x)$ et $g_1(x)$ ne seront jamais identiquement nuls.

5. Je passe maintenant à la démonstration du point le plus difficile de cette théorie, et je vais établir par une méthode nouvelle que, si les équations proposées ont p racines communes, le déterminant A et ses mineurs d'ordre inférieur à p seront nuls sans que tous les mineurs d'ordre p le soient.

Supposons, en effet, que le polynôme

$$R = h_0 x^p + h_1 x^{p-1} + \ldots + h_p$$

soit le produit des facteurs du premier degré correspondant à ces racines communes; $f(x)$ et $g(x)$ sont divisibles par le polynôme précédent, et l'on peut poser

$$f(x) = (h_0 x^p + \ldots + h_p)\varphi(x) = R\varphi(x),$$
$$g(x) = (h_0 x^p + \ldots + h_p)\gamma(x) = R\gamma(x),$$

les deux polynômes $\varphi(x)$ et $\gamma(x)$ étant premiers entre eux. Il résulte d'ailleurs des identités (6) et (7) que R entre en diviseur dans tous les polynômes $\varphi_i(x)$, $x^p g(x)$, définis par ces identités. On aura

(13) $$\left\{\begin{array}{l} \varphi_0(x) = (\alpha_{0,0} + \alpha_{0,1} x + \ldots + \alpha_{0,m-p-1} x^{m-p-1})(h_0 x^p + \ldots + h_p) = R\psi_0(x), \\ \varphi_1(x) = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} x + \ldots + \alpha_{1,m-p-1} x^{m-p-1})(h_0 x^p + \ldots + h_p) = R\psi_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x) = (\alpha_{n-1,0} \qquad + \ldots + \alpha_{n-1,m-p-1} x^{m-p-1})(h_0 x^p + \ldots + h_p) = R\psi_{n-1}(x). \end{array}\right.$$

$$(14)\left\{\begin{array}{lll} g(x)=\mathrm{R}\gamma(x) & =\mathrm{R}(\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_{n-p}x^{n-p}), \\ xg(x)=\mathrm{R}x\gamma(x) & =\mathrm{R}(\beta_0 x+\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{m-n-1}g(x)=\mathrm{R}x^{m-n-1}\gamma(x)=\mathrm{R}(\beta_0 x^{m-n-1}+\ldots+\beta_{n-p}x^{m-p-1}). \end{array}\right.$$

Il suit de là que les polynômes $\varphi_i(x)$, $x^p g(x)$ sont des combinaisons linéaires des expressions suivantes :

$$(14)\left\{\begin{array}{l} z_0=h_0x^p+h_1x^{p-1}+\ldots+h_px^0, \\ z_1=h_0x^{p+1}+\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{m-p-1}=h_0x^{m-1}+\ldots+h_px^{m-p-1}, \end{array}\right.$$

où, pour l'homogénéité, j'ai introduit la puissance x^0 de x.

Les $m-1$ équations du premier degré, qu'on obtient en égalant ces polynômes à zéro et en considérant les puissances de x comme des inconnues tout à fait distinctes, seront donc vérifiées si les fonctions linéaires précédentes sont nulles, c'est-à-dire si l'on établit entre les m inconnues x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x^0 seulement les $m-p$ relations

$$(15)\qquad z_0=0,\quad z_1=0,\quad \ldots,\quad z_{m-p-1}=0.$$

Mais je dis, de plus, qu'en admettant, comme nous l'avons supposé, que les deux polynômes $\varphi(x)$, $\gamma(x)$ sont premiers entre eux, ces équations ne peuvent être vérifiées qu'en égalant à zéro les différentes fonctions linéaires z. Pour bien mettre ce point en évidence, j'écris d'abord ces équations, qui, en vertu des identités (13) et (14), sont les suivantes :

$$(16)\left\{\begin{array}{l} \alpha_{0,0}z_0+\alpha_{0,1}z_1+\ldots+\alpha_{0,m-p-1}z_{m-p-1}=0, \\ \alpha_{1,0}z_0+\alpha_{1,1}z_1+\ldots+\alpha_{1,m-p-1}z_{m-p-1}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{n-1,0}z_0+\alpha_{n-1,1}z_1+\ldots+\alpha_{n-1,m-p-1}z_{m-p-1}=0, \\ \beta_0z_0+\ldots+\beta_{n-p}z_{n-p}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_0z_{m-n-1}+\ldots+\beta_{n-p}z_{m-p-1}=0. \end{array}\right.$$

Ces équations sont en nombre supérieur à celui des inconnues z. Il suffira, pour montrer qu'elles donnent pour les inconnues des

valeurs nulles, de prouver que le déterminant des $m-p$ dernières n'est pas nul.

Or ce déterminant est, comme il est facile de l'établir, la résultante des deux polynômes $\varphi(x)$ et $\gamma(x)$. Il n'est donc pas nul, puisque ces deux polynômes sont supposés premiers entre eux.

Pour justifier cette remarque, reprenons les identités (13) et (14), remplaçons les polynômes $\varphi_i(x)$ par leurs expressions, et, après avoir divisé les deux membres de ces identités par R, écrivons les $m-p$ dernières; nous aurons

$$(a_{p+1}+a_{p+2}x+\ldots+a_m x^{m-p-1})\gamma(x)-(b_{p+1}+\ldots+b_n x^{n-p-1})\varphi(x)$$
$$=\alpha_{p,0}+\alpha_{p,1}x+\ldots+\alpha_{p,m-p-1}x^{m-p-1}=\psi_0(x),$$
$$(a_{p+2}+a_{p+3}x+\ldots+a_m x^{m-p-2})\gamma(x)-(b_{p+2}+\ldots+b_n x^{n-p-2})\varphi(x)$$
$$=\alpha_{p+1,0}+\alpha_{p+1,1}x+\ldots+\alpha_{p-1,m-p-1}x^{m-p-1}=\psi_1(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(a_n+a_{n+1}x+\ldots+a_m x^{m-n})\gamma(x)-b_n\varphi(x)$$
$$=\alpha_{n-1,0}+\alpha_{n-1,1}x+\ldots+\alpha_{n-1,m-p-1}x^{m-p-1}=\psi_{n-p-1},$$
$$\gamma(x)=\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_p x^{n-p},$$
$$x\gamma(x)=\beta_0 x+\beta_1 x^2+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x^{m-n-1}\gamma(x)=\beta_0 x^{m-n-1}+\ldots+\beta_{n-p}x^{m-p-1}.$$

Ces équations sont toutes semblables aux identités (6), bien qu'elles n'aient pas été formées de la même manière, mais se rapportent aux polynômes $\varphi(x)$ et $\gamma(x)$, qui y remplacent $f(x)$ et $g(x)$; elles nous apprennent que le déterminant des $m-p$ fonctions linéaires

$$\psi_0(x),\quad \ldots,\quad \psi_{n-p-1}(x),\quad \gamma(x),\quad \ldots,\quad x^{m-n-1}\gamma(x)$$

est la résultante des deux polynômes $\varphi(x)$ et $\gamma(x)$, et par conséquent est différent de zéro.

Or ce déterminant, on le reconnaît tout de suite, est le même que celui des $m-p$ dernières équations (16). Ces équations ne peuvent donc être vérifiées que par des valeurs nulles de toutes les inconnues.

Ainsi, dans le cas où il y aura p racines communes et seulement p, les équations du premier degré

$$\varphi_0(x)=0,\quad \ldots,\quad \varphi_{n-1}(x)=0,\quad g(x)=0,\quad \ldots,\quad x^{m-n-1}g(x)=0,$$

où l'on regarde les puissances de x comme des inconnues séparées, se réduisent à $m-p$ équations distinctes

$$z_0 = 0, \quad \ldots, \quad z_{m-p-1} = 0.$$

Elles pourront être vérifiées en prenant arbitrairement $p-1$, et seulement $p-1$ inconnues, $x^{p-1}, \ldots, x^0$ par exemple; cette double propriété du système des équations indique que le déterminant du système et ses mineurs de l'ordre $p-1$ sont nuls, sans que tous ceux de l'ordre p le soient.

On voit d'ailleurs comment on obtiendra les racines communes; il suffira de former une équation entre $p+1$ inconnues consécutives $x^a, x^{a+1}, \ldots, x^{a+p}$, et d'y considérer ensuite ces inconnues comme des puissances de x. On aura ainsi, en supprimant une puissance convenable de x, une équation de degré p, qui donnera toutes les racines communes.

6. Dans ce qui précède, je me suis contenté d'énoncer un théorème qui permet de reconnaître le nombre des racines communes à deux équations. Si l'on veut que deux équations aient p racines communes, il faut que tous les mineurs d'ordre $p-1$ du déterminant A soient nuls, sans que tous ceux d'ordre p le soient; mais il est clair que l'on obtiendra ainsi un trop grand nombre d'équations. On aura formé un système dont toutes les équations devront être vérifiées, mais dont plusieurs pourront être supprimées. Il convient donc d'indiquer une méthode pratique qui permette d'obtenir directement les équations les plus simples.

A cet effet, nous ferons remarquer que, si deux équations

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0$$

ont p racines communes, on peut poser

$$f(x) = \mathrm{R} f_1(x), \quad g(x) = \mathrm{R} g_1(x),$$

et par conséquent constituer une identité

$$f(x) g_1(x) - f(x) g_1(x) = 0,$$

où les polynômes $f_1(x)$, $g_1(x)$ sont respectivement de degré $m-p$, $n-p$. La réciproque est évidemment vraie.

On a donc

$$A\zeta = \pm a_m^n \zeta g(x_1) g(x_2) \ldots g(x_m),$$

ou, en supprimant ζ,

$$A = \pm a_m^n g(x_1) g(x_2) \ldots g(x_m),$$

ce qui est l'expression connue de la résultante en fonction des racines.

SUR UNE NOUVELLE CORRECTION A APPORTER AUX NOUVELLES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES RÉSULTANT DE LA DIFFRACTION DE LA LUMIÈRE;

PAR M. CH. ANDRÉ.

Pouvoir séparateur. — Pouvoir optique. — On sait que l'image d'un point lumineux, assez brillant et suffisamment éloigné, produite dans le plan focal d'un objectif ou d'un miroir aplanétique, se compose d'un disque central, où l'éclairement décroît rapidement à partir du centre, et qui est entouré d'anneaux brillants dont les intensités sont rapidement décroissantes. Les dimensions de ce disque central et des anneaux qui l'entourent dépendent d'ailleurs du diamètre de l'objectif ou du miroir; elles se *réduisent à zéro* pour un objectif de *diamètre infini,* et sont de plus en plus grandes, à mesure que l'on se sert d'un objectif de plus en plus petit, ou, ce qui revient au même, à mesure que l'on diaphragme de plus en plus un même objectif par ses bords. De sorte que, si l'on construit une courbe, dont les ordonnées représentent les intensités lumineuses aux différents points de l'image donnée par une lunette déterminée, et qui ait pour abscisses les distances angulaires de ces points à l'axe de la lunette, cette *courbe des intensités* représentera les phénomènes pour un objectif d'ouverture quelconque, à la condition de faire varier l'échelle des abscisses, de telle sorte que l'abscisse qui correspond à la distance angulaire *un* croisse proportionnellement à l'ouverture employée.

Il en résulte qu'on ne peut, avec un objectif donné, séparer nettement l'une de l'autre deux étoiles dont la distance angulaire est

inférieure au diamètre du disque central qui correspond à son ouverture. C'est ce que Dawes et Foucault ont exprimé en disant que le *pouvoir séparateur* ou le *pouvoir optique* d'un objectif était proportionnel à son ouverture.

Tous ces faits, dont j'ai donné la théorie ([1]), montrent que, dans aucun cas, on ne doit considérer comme se réduisant à un point l'image d'une source lumineuse infiniment petite, donnée par une surface aplanétique réfringente ou réfléchissante.

L'image d'une source de diamètre apparent sensible du Soleil, de la Lune et des planètes, donnée par les mêmes instruments, doit-elle être au contraire réduite à son image géométrique ? L'inverse paraît probable au premier abord, et je vais chercher à démontrer qu'il en est réellement ainsi. J'emploierai dans ce but le moyen suivant :

Solide de diffraction. — Si l'on fait tourner autour de son axe vertical la courbe des intensités qui correspond à l'image focale d'un point lumineux donné par un objectif ou un miroir, on engendre un certain solide de révolution que j'appelle *solide de diffraction*, et qui est l'image et comme la représentation immédiate des phénomènes lumineux existant dans le plan focal de la lunette; car, si l'axe de ce solide coïncide avec celui de la lunette, la quantité de lumière répandue sur un élément du plan focal est évidemment proportionnelle à la fraction cylindrique du volume de ce solide qui a pour base l'aire considérée.

Si l'ouverture de la lunette vient à changer, les dimensions transversales de ce solide changent aussi (nous ne tenons pas compte des variations d'intensité qu'introduit le changement d'ouverture) ; elles diminuent si le diamètre de l'objectif augmente, croissent dans l'hypothèse inverse. Avec la restriction précédente, les apparences produites par un point lumineux, dans des objectifs de différentes ouvertures, sont donc les mêmes que celles que l'on obtiendrait, d'après les lois de l'Optique géométrique, en observant, avec une même lunette, ce solide placé comme nous l'avons dit

---

([1]) *Étude de la diffraction dans les instruments d'Optique; son influence sur les observations astronomiques.* (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. V, p. 289, 1876.)

plus haut, mais à des distances (suffisamment grandes) proportionnelles aux diamètres des différents objectifs.

D'un autre côté, l'observation a montré que les différents éléments, ou points lumineux, dont se compose une source lumineuse de dimensions finies, sont à un instant quelconque dans des phases différentes de leur période de vibration ; de telle sorte que les mouvements qu'ils envoient en un point quelconque ne peuvent jamais interférer, et que l'intensité lumineuse en ce point est la somme des intensités qu'y produirait chacun des éléments de la source pris isolément.

L'intensité lumineuse sur un élément superficiel du plan focal est donc représentée par la somme des volumes des parallélépipèdes élémentaires qui lui correspondraient successivement dans le *solide de diffraction* caractéristique de l'ouverture employée ([1]), si l'on plaçait son axe successivement au centre de chacun des éléments lumineux dont la source est formée; en d'autres termes, quelle que soit la forme donnée à l'ouverture de l'instrument dont on se sert, l'intensité lumineuse en un point quelconque M du plan focal s'obtient comme il suit :

Théorème. — *On place le solide de diffraction, caractéristique de l'ouverture, de façon que son axe perpendiculaire au plan focal passe par le point* M ; *toute la portion cylindrique du volume de ce solide comprise dans l'image de la source, telle qu'elle résulte des lois de l'optique géométrique, mesure l'intensité lumineuse au point* M.

Constante de diffraction instrumentale. — Examinons uniquement le cas véritablement utile en Astronomie, celui où le diamètre apparent de la source est très-grand dans toutes les directions; et, pour préciser, supposons que ce diamètre soit assez grand pour qu'on puisse, en chaque point, considérer comme rectilignes les bords de la source lumineuse.

En appliquant le théorème général, on voit aisément que l'image focale de la source se compose alors de deux portions :

([1]) En théorie, ce solide de diffraction s'étend indéfiniment dans un sens perpendiculaire à son axe. En pratique, on doit le limiter au minimum à partir duquel l'intensité lumineuse est insensible.

l'une semblable à son image géométrique, dépendant de sa forme et de ses dimensions apparentes, mais d'autant plus grande que l'ouverture employée est plus grande, et où l'éclairement est constant et maximum; l'autre, contiguë à la première, lui faisant suite et l'entourant de toutes parts, dont la forme varie avec celle de la source, mais dont l'étendue angulaire ne dépend que de la grandeur de l'ouverture employée : cette seconde portion de l'image focale empiète en partie sur l'image géométrique, et l'éclairement y va en décroissant progressivement jusqu'à ce que, après avoir été réduit à moitié aux limites de l'image géométrique, il devienne bientôt complétement insensible.

Dans une lunette ou dans un télescope, l'image géométrique de toute source lumineuse d'un diamètre apparent suffisamment considérable se trouve donc accompagné d'une *zone de lumière diffractée*. L'étendue de cette zone, dans laquelle l'intensité lumineuse est assez grande pour impressionner la rétine, dépend évidemment, toutes choses égales d'ailleurs, de l'éclat de l'astre observé. Mais, si celui-ci est assez brillant, on doit admettre que cette limite d'intensité est une fraction constante de l'intensité maximum de l'image focale, et, par suite, correspond à une même valeur de l'abscisse, quelle que soit l'ouverture de la lunette qui sert aux observations. Cela revient à dire que *le diamètre d'un astre suffisamment brillant et observé sur un fond identique varie avec l'ouverture de l'instrument employé.*

Si l'on admet que dans cette zone diffractée on cesse de percevoir la lumière dès que son intensité est le *trentième* de celle de la portion où l'éclairement est constant, on voit que, pour un objectif de 10 centimètres d'ouverture, cette zone diffractée extérieure a une étendue angulaire égale à 1″,4.

En d'autres termes, en vertu même des propriétés de l'agent lumineux au foyer d'un objectif aplanétique, le diamètre de l'image focale d'une source, dont l'étendue angulaire est suffisamment grande, est égale à son diamètre géométrique augmenté d'une certaine quantité variable avec l'ouverture de l'instrument, et qui, pour un objectif de 10 centimètres, atteint théoriquement la valeur de 2″,8.

Relativement à la mesure des diamètres des astres d'une certaine étendue angulaire, le Soleil, la Lune et les planètes, chaque objec-

tif ou chaque miroir est donc caractérisé, comme pour la séparation des étoiles multiples, par une constante déterminée, qui diffère d'ailleurs de son pouvoir séparateur et qui varie, comme lui, avec l'intensité même de la source.

Nous appellerons cette nouvelle constante *constante de diffraction instrumentale,* pour bien en rappeler l'origine; et avec les hypothèses que nous avons faites et les restrictions qui les ont accompagnées, nous sommes autorisés à dire que, pour un objectif ou un miroir de 10 centimètres d'ouverture, sa valeur est

$$2'',8.$$

Une autre conséquence également importante découle immédiatement de la théorie qui précède. Lors du passage d'une planète, Vénus ou Mercure, sur le disque du Soleil, il existe pour celui-ci deux zones de lumière diffractée : la zone extérieure dont nous venons de parler et, en outre, une zone intérieure qui empiète sur la planète elle-même. Le diamètre de Vénus ou de Mercure, mesuré pendant le passage, devra donc être toujours plus petit que dans les conditions ordinaires d'observation; et, de plus, ce diamètre sera d'autant plus petit que l'ouverture de l'instrument sera moindre, la variation étant égale à la différence des constantes de diffraction instrumentale des instruments employés.

Irradiation. — L'explication de tous les faits d'irradiation sérieusement établis et cités dans les Mémoires de M. Plateau et de M. Baden Powell découle immédiatement de la théorie qui précède.

Observée à l'œil nu, c'est-à-dire avec une lunette de très-petite ouverture, une surface limitée, laissée en blanc sur un fond noir, doit nous sembler plus grande que la même surface laissée en noir sur un fond blanc.

Ces différences deviennent, au contraire, insensibles si l'on se sert d'une lunette d'assez grande ouverture; l'œil a pris alors un rôle différent : au lieu de fonctionner comme lunette, il est devenu une portion du système oculaire d'une lunette composée, qui a pour ouverture l'ouverture de l'objectif employé.

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES ENTIERS ALGÉBRIQUES (¹);

PAR M. R. DEDEKIND.

(Suite.)

II.

LE GERME DE LA THÉORIE DES IDÉAUX.

Dans cette Section, je me propose, comme je l'ai déjà indiqué dans l'*Introduction*, d'expliquer sur un exemple déterminé la nature du phénomène qui a conduit Kummer à la création des *nombres idéaux*, et j'utiliserai le même exemple pour éclaircir le concept d'*idéal* introduit par moi, et celui de la multiplication des idéaux.

§ 5. — *Les nombres rationnels entiers.*

La théorie des nombres s'occupe d'abord exclusivement du système des nombres rationnels entiers $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, et il sera bon de remémorer ici en peu de mots les lois importantes qui régissent ce domaine. Avant tout, il faut rappeler que ces nombres se reproduisent par addition, soustraction et multiplication, c'est-à-dire que les sommes, les différences et les produits de deux nombres quelconques de ce domaine appartiennent au même domaine. La théorie de la *divisibilité* considère de préférence la combinaison des nombres par multiplication; le nombre a est dit divisible par le nombre b, lorsque $a = bc$, c étant également un nombre rationnel entier. Le nombre 0 est divisible par un nombre quelconque; les deux unités ± 1 divisent tous les nombres, et elles sont les seuls nombres qui jouissent de cette propriété. Si a est divisible par b, $\pm a$ sera aussi divisible par $\pm b$, et nous pourrons, par conséquent, nous restreindre à la considération des nombres positifs. Tout nombre positif, différent de l'unité, est ou un nombre *premier*, c'est-à-dire un nombre divisible seulement par lui-même et par l'unité, ou un nombre *composé*; dans ce dernier cas, on

(¹) Voir *Bulletin*, t. XI, p. 278 et t. I (2ᵉ série), p. 17.

pourra toujours le mettre sous la forme d'un produit de nombres premiers, et, ce qui est le plus important, on ne le pourra que d'une seule manière, c'est-à-dire que le système de tous les nombres premiers qui entrent comme facteurs dans ce produit est complétement déterminé, ainsi que le nombre de fois qu'un nombre premier désigné entre comme facteur. Cette propriété repose essentiellement sur ce théorème, qu'un produit de deux facteurs n'est divisible par un nombre premier que lorsque celui-ci divise au moins un des deux facteurs.

La manière la plus simple de démontrer ces propositions fondamentales de la théorie des nombres est fondée sur la considération du procédé enseigné déjà par Euclide, et qui sert à trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres (¹). Cette opération a, comme on sait, pour base l'application répétée de ce théorème, que, si m désigne un nombre positif, un nombre quelconque z pourra toujours être mis sous la forme $qm + r$, q et r désignant aussi des nombres entiers, dont le second est *moindre* que m; car il résulte de là que l'opération devra s'arrêter après un nombre fini de divisions.

La notion de la *congruence* des nombres a été introduite par Gauss (²); deux nombres z, z' sont dits *congrus* par rapport au module m, ce qu'on exprime par la notation

$$z \equiv z' \pmod{m},$$

lorsque la différence $z - z'$ est divisible par m; dans le cas contraire, z et z' sont dits *incongrus* par rapport à m. Si l'on range les nombres, pris deux à deux dans la même classe (³) de nombres ou dans deux classes différentes suivant qu'ils sont congrus ou incongrus par rapport à m, on conclut aisément du théorème rappelé plus haut que le nombre de ces classes est fini, et qu'il est égal à la valeur absolue du module m. C'est ce qui résulte évidemment aussi des études de la Section précédente; car la définition de la

(¹) *Voir*, par exemple, les *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet.

(²) *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 1.

(³) Le mot *classe* semble avoir été employé par Gauss pour la première fois dans ce sens à propos des nombres *complexes*. (*Theoria residuorum biquadraticorum*, II, art. 42.)

congruence établie dans la Section I contient celle de Gauss comme cas particulier. Le système $\mathfrak{o}$ de tous les nombres entiers rationnels est identique avec le module fini $[1]$, et de même le système $\mathfrak{m}$ de tous les nombres divisibles par m est identique avec $[m]$; la congruence de deux nombres par rapport au nombre m coïncide avec sa congruence par rapport au système $\mathfrak{m}$; donc (d'après § 3, 2°, ou § 4, 4°), le nombre des classes est $= (\mathfrak{o}, \mathfrak{m}) = \pm m$.

§ 6. — *Les nombres complexes entiers de Gauss.*

Le premier et le plus grand pas vers la généralisation de ces notions a été fait par Gauss, dans son second Mémoire sur les résidus biquadratiques, lorsqu'il les a transportées au domaine des nombres complexes entiers $x+yi$, x et y désignant des nombres rationnels entiers quelconques, et i étant $=\sqrt{-1}$, c'est-à-dire une racine de l'équation quadratique irréductible $i^2+1=0$. Les nombres de ce domaine se reproduisent encore par addition, soustraction et multiplication, et l'on peut par conséquent définir pour ces nombres la notion de divisibilité de la même manière que pour les nombres rationnels. On peut établir très-simplement, comme Dirichlet l'a montré d'une manière très-élégante ([1]), que les propositions générales sur la composition des nombres au moyen de nombres premiers subsisteront encore dans ce nouveau domaine, en s'appuyant sur la remarque suivante. Si l'on entend par la *norme* $N(w)$ d'un nombre $w=u+vi$, u et v désignant des nombres rationnels quelconques, le produit u^2+v^2 des deux nombres conjugués $u+vi$ et $u-vi$, la norme d'un produit sera égale au produit des normes des facteurs, et en outre il est clair que, w étant donné, on pourra toujours choisir un nombre complexe *entier* q, de telle sorte que l'on ait $N(w-q)\leq\frac{1}{2}$; en désignant maintenant par z et m deux nombres complexes entiers quelconques, dont le second soit différent de zéro, il en résulte, si l'on prend $w=\frac{z}{m}$, que l'on pourra toujours poser $z=qm+r$, q et r étant des nombres complexes

---

([1]) *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes.* (*Journal de Crelle*, t. 24.)

entiers, et cela de telle manière que l'on ait $N(r) < N(m)$. On pourra donc, absolument comme pour les nombres rationnels, trouver par un nombre fini de divisions le plus grand commun diviseur de deux nombres complexes entiers quelconques, et les démonstrations des lois générales de la divisibilité des nombres rationnels entiers pourront s'appliquer presque mot pour mot au domaine des nombres complexes entiers. Il y a quatre unités, ± 1, $\pm i$, c'est-à-dire quatre nombres qui divisent tous les nombres, et dont la norme est, par suite, $= 1$. Tout autre nombre différent de zéro est dit un nombre composé, lorsqu'il peut être représenté par le produit de deux facteurs dont aucun n'est une unité; dans le cas contraire, le nombre est dit un nombre premier, et un tel nombre ne peut diviser un produit s'il ne divise au moins l'un des facteurs. Tout nombre composé peut toujours, et d'une seule manière, être mis sous la forme d'un produit de nombres premiers, les quatre nombres premiers associés $\pm q$, $\pm qi$ ne comptant naturellement que comme les représentants d'un seul et même nombre premier q. L'ensemble de tous les nombres premiers q du domaine des nombres complexes entiers se compose :

1° De tous les nombres premiers rationnels qui (pris positivement) sont de la forme $4n + 3$;

2° Du nombre $1 + i$, qui divise le nombre premier rationnel $2 = (1 + i)(1 - i) = -i(1 + i)^2$;

3° Des couples de deux facteurs $a + bi$ et $a - bi$, contenus dans tout nombre premier rationnel p de la forme $4n + 1$, et dont la norme $a^2 + b^2 = p$.

L'existence des nombres premiers $a \pm bi$, cités en dernier lieu, laquelle résulte immédiatement du célèbre théorème de Fermat contenu dans l'équation $p = a^2 + b^2$, et entraîne réciproquement ce théorème comme conséquence, se déduit ici sans le secours de ce théorème, avec une merveilleuse facilité, et ce n'est là qu'un premier exemple de la puissance extraordinaire des principes auxquels nous parviendrons par la plus grande généralisation de l'idée de nombre entier.

La congruence des nombres complexes entiers par rapport à un nombre donné de même nature m peut aussi se définir absolument de la même manière que dans la théorie de nombres rationnels; les nombres z, z' sont dits congrus par rapport à m, et l'on pose $z \equiv z'$

(mod. m) lorsque la différence $z - z'$ est divisible par m. Si l'on range les nombres, pris deux à deux, dans la même classe ou dans deux classes différentes, suivant qu'ils sont congrus ou incongrus par rapport à m, le nombre total des classes différentes sera fini, et $= N(m)$. C'est ce qui résulte très-facilement des recherches de la première Section; car le système $\mathfrak{o}$ de tous les nombres complexes entiers $x + yi$ forme un module fini $[1, i]$, et pareillement le système $\mathfrak{m}$ de tous les nombres $m(x + yi)$ divisibles par m forme le module $[m, mi]$, dont la base est liée avec celle de $\mathfrak{o}$ par deux équations de la forme

$$m = a.1 + b.i, \quad mi = -b.1 + a.i;$$

par suite, on a (§ 4, 4°)

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{m}) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = N(m).$$

§ 7. — *Le domaine $\mathfrak{o}$ des nombres $x + y\sqrt{-5}$.*

Il y a encore d'autres domaines numériques qui peuvent se traiter absolument de la même manière. Désignons, par exemple, par θ une racine de l'une des cinq équations

$$\theta^2 + \theta + 1 = 0, \quad \theta^2 + \theta + 2 = 0,$$
$$\theta^2 + 2 = 0, \quad \theta^2 - 2 = 0, \quad \theta^2 - 3 = 0,$$

et faisons prendre à x, y toutes les valeurs rationnelles et entières; les nombres $x + y\theta$ formeront un domaine numérique correspondant. Dans chacun de ces domaines, comme il est aisé de s'en assurer, on peut trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres par un nombre fini de divisions, et il s'ensuit de là immédiatement que les lois générales de la divisibilité coïncident avec celles qui ont lieu pour les nombres rationnels, bien que, dans les deux derniers exemples, apparaisse cette circonstance, que le nombre des unités est infini.

Cette méthode, au contraire, n'est plus applicable au domaine $\mathfrak{o}$ des nombres entiers

$$\omega = x + y\theta,$$

où θ est une racine de l'équation

$$\theta^2 + 5 = 0,$$

x, y prenant encore toutes les valeurs rationnelles et entières. Ici l'on rencontre déjà le phénomène qui a suggéré à Kummer la création des nombres idéaux, et que nous allons maintenant décrire en détail sur quelques exemples.

Les nombres ω du domaine $\mathfrak{o}$, dont il sera exclusivement question dans ce qui va suivre, se reproduisent encore par addition, soustraction et multiplication, et nous définirons, par suite, exactement comme dans ce qui précède, les notions de divisibilité et de congruence des nombres. Si l'on appelle, de plus, norme $N(\omega)$ d'un nombre $\omega = x + y\theta$ le produit $x^2 + 5y^2$ des deux nombres conjugués $x \pm y\theta$, la norme d'un produit sera égale au produit des normes de tous les facteurs; et si μ est un nombre déterminé, différent de zéro, on en conclut, absolument comme ci-dessus, que $N(\mu)$ exprime combien il y a de nombres non congrus par rapport à μ. Si μ est une unité, et partant divise tous les nombres, il faut que l'on ait $N(\mu) = 1$, d'où $\mu = \pm 1$.

Nous appellerons *décomposable* un nombre (différent de zéro et de ± 1), lorsqu'il sera le produit de deux facteurs dont aucun ne sera une unité; dans le cas contraire, le nombre sera dit *indécomposable*. Alors il résulte bien du théorème sur la norme d'un produit que tout nombre décomposable peut être mis sous la forme d'un nombre fini de facteurs indécomposables; mais dans une infinité de cas il se présente ici un phénomène tout nouveau, savoir, qu'un seul et même nombre est susceptible de plusieurs représentations de cette sorte, essentiellement différentes entre elles. Les exemples les plus simples de ces cas sont les suivants. Il est aisé de se convaincre que chacun des quinze nombres suivants :

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 7;$$

$$b_1 = -2 + \theta, \quad b_2 = -2 - \theta; \quad c_1 = 2 + 3\theta, \quad c_2 = 2 - 3\theta;$$

$$d_1 = 1 + \theta, \quad d_2 = 1 - \theta; \quad e_1 = 3 + \theta, \quad e_2 = 3 - \theta;$$

$$f_1 = -1 + 2\theta, \quad f_2 = -1 - 2\theta; \quad g_1 = 4 + \theta, \quad g_2 = 4 - \theta$$

est indécomposable. En effet, pour qu'un nombre premier rationnel p soit décomposable et, par suite, de la forme $\omega\omega'$, il faut que

$N(p) = p^2 = N(\omega)N(\omega')$, et comme ω, ω' ne sont pas des unités, on devra avoir $p = N(\omega) = N(\omega')$, c'est-à-dire que p devra pouvoir se représenter par la forme quadratique binaire $x^2 + 5y^2$. Or les trois nombres premiers 2, 3, 7, comme on le voit par la théorie de ces formes ([1]), ou encore par un petit nombre d'essais directs, ne peuvent pas se représenter de cette manière; ils sont donc indécomposables. Il est aisé de démontrer la même chose, et d'une manière semblable, pour les douze autres nombres, dont les normes sont les produits de deux de ces trois nombres premiers. Mais, malgré l'indécomposabilité de ces quinze nombres, il existe entre leurs produits de nombreuses relations, qui toutes peuvent se déduire des suivantes :

(1) $ab = d_1 d_2, \quad b^2 = b_1 b_2, \quad ab_1 = d_1^2,$

(2) $ac = e_1 e_2, \quad c^2 = c_1 c_2, \quad ac_1 = e_1^2,$

(3) $bc = f_1 f_2 = g_1 g_2, \quad af_1 = d_1 e_1, \quad ag_1 = d_1 e_2.$

Dans chacune de ces dix relations, un même nombre est représenté de deux ou trois manières *différentes* sous la forme d'un produit de deux nombres indécomposables; on voit donc qu'un nombre indécomposable peut très-bien diviser un produit, sans toutefois diviser l'un ou l'autre des facteurs; un tel nombre indécomposable ne possède donc pas la propriété qui, dans la théorie des nombres rationnels, est tout à fait caractéristique pour un *nombre premier*.

Imaginons pour un instant que les quinze nombres précédents soient des nombres *rationnels* entiers; alors, d'après les lois générales de la divisibilité, on déduirait aisément des relations (1) une décomposition de la forme

$$a = \mu\alpha^2, \quad d_1 = \mu\alpha\beta_1, \quad d_2 = \mu\alpha\beta_2,$$
$$b = \mu\beta_1\beta_2, \quad b_1 = \mu\beta_1^2, \quad b_2 = \mu\beta_2^2,$$

et de même, des relations (2) une décomposition de la forme

$$a = \mu'\alpha'^2, \quad e_1 = \mu'\alpha'\gamma_1, \quad e_2 = \mu'\alpha'\gamma_2,$$
$$c = \mu'\gamma_1\gamma_2, \quad c_1 = \mu'\gamma_1^2, \quad c_2 = \mu'\gamma_2^2,$$

où toutes les lettres grecques désignent des nombres rationnels entiers, et il en résulterait immédiatement, en vertu de l'équation

([1]) *Voir* Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 71.

$\mu\alpha^2 = \mu'\alpha'^2$, que les quatre nombres f_1, f_2, g_1, g_2, qui entrent dans les relations (3), seraient également des nombres *entiers*. Ces décompositions se simplifient si l'on introduit, en outre, l'hypothèse que a est un nombre premier avec b et avec c; car on tire de là $\mu = \mu' = 1$, $\alpha = \alpha'$, et l'on obtient les quinze nombres, exprimés comme il suit, au moyen des cinq nombres $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$,

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{llll} & a = \alpha^2, & b = \beta_1\beta_2, & c = \gamma_1\gamma_2; \\ b_1 = \beta_1^2, & b_2 = \beta_2^2; & c_1 = \gamma_1^2, & c_2 = \gamma_2^2; \\ d_1 = \alpha\beta_1, & d_2 = \alpha\beta_2; & e_1 = \alpha\gamma_1, & e_2 = \alpha\gamma_2; \\ f_1 = \beta_1\gamma_1, & f_2 = \beta_2\gamma_2; & g_1 = \beta_1\gamma_2, & g_2 = \beta_2\gamma_1. \end{array}\right.$$

Quoique maintenant nos quinze nombres soient en réalité indécomposables, ils se comportent cependant, chose remarquable, dans toutes les questions de divisibilité relatives au domaine $\mathfrak{o}$, absolument comme s'ils étaient composés, de la manière indiquée ci-dessus, au moyen de cinq *nombres premiers* $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$, différents les uns des autres. Je vais exposer tout à l'heure en détail ce qu'il faut entendre par cette relation des nombres.

§ 8. — *Rôle du nombre 2 dans le domaine $\mathfrak{o}$.*

Dans ce dessein, je remarque avant tout que, dans la théorie des nombres rationnels entiers, on peut reconnaître complétement la constitution essentielle d'un nombre, sans en *effectuer la décomposition* en facteurs premiers, en observant seulement la manière dont il se comporte comme *diviseur*. Si l'on sait, par exemple, qu'un nombre positif a ne divise un produit de deux carrés que si l'un au moins de ces carrés est divisible par a, on en conclut avec certitude que a est égal à 1, ou qu'il est un nombre premier ou le carré d'un nombre premier. Il est pareillement certain qu'un nombre a doit contenir au moins un facteur carré, outre l'unité, lorsqu'on peut démontrer l'existence d'un nombre non divisible par a, et dont le carré est divisible par a. Si l'on peut donc constater, pour un nombre a, l'un et l'autre de ces deux caractères, on en conclut d'une manière sûre que a est le *carré d'un nombre premier*.

Nous allons maintenant examiner, dans ce sens, comment se comporte le nombre 2 dans notre domaine $\mathfrak{o}$ des nombres $\omega = x + y\theta$

Comme deux nombres conjugués quelconques sont congrus par rapport au module 2, on aura

$$\omega^2 \equiv N(\omega) \quad (\text{mod. } 2),$$

et par suite aussi $\omega^2\omega'^2 \equiv N(\omega)N(\omega') \ (\text{mod. } 2)$; maintenant, pour que le nombre 2 divise le produit $\omega^2\omega'^2$, et par suite aussi le produit des deux nombres *rationnels* $N(\omega)$, $N(\omega')$, il faut que l'une au moins de ces normes, et par suite aussi que l'un au moins des deux carrés ω^2, ω'^2 soient divisibles par 2. Si de plus on choisit pour x, y deux nombres impairs quelconques, on obtient un nombre $\omega = x + y\theta$ non divisible par 2, et dont le carré est divisible par 2. En ayant égard aux remarques précédentes sur les nombres rationnels, nous dirons donc que le nombre 2 se comporte dans notre domaine $\mathfrak{o}$ comme s'il était le carré d'un nombre premier α.

Bien qu'un tel nombre premier α n'existe nullement dans le domaine $\mathfrak{o}$, nous n'en introduirons pas moins, comme l'a fait Kummer avec grand succès dans des circonstances semblables, un pareil nombre α sous le nom de *nombre idéal,* et nous nous laisserons d'abord conduire par l'analogie avec la théorie des nombres rationnels, pour définir avec précision la présence du nombre α dans les nombres *existants* quelconques ω du domaine $\mathfrak{o}$. Or, quand un nombre rationnel a est déjà reconnu comme étant le carré d'un nombre premier rationnel α, on peut aisément, *sans même avoir à faire intervenir* α, juger si α est contenu et combien de fois il est contenu comme facteur dans un nombre rationnel entier quelconque z; car il est clair que z est divisible par α^n toutes les fois, et alors seulement, que z^2 est divisible par a^n. Nous étendrons donc ce critérium au cas qui nous occupe, et nous dirons qu'un nombre ω du domaine $\mathfrak{o}$ est *divisible* par la $n^{\text{ième}}$ *puissance* α^n du nombre premier idéal α, lorsque ω^2 sera divisible par 2^n. Le *succès* fera voir que cette définition est très-heureusement (¹) choisie, parce qu'elle conduit à un mode d'expression en harmonie parfaite avec les lois de la théorie des nombres rationnels.

(¹) *Heureusement*, car, par exemple, la tentative de déterminer d'une manière analogue le rôle du nombre 2 dans le domaine des nombres $x + y\sqrt{-3}$ aurait complétement échoué; plus tard nous découvrirons clairement la raison de ce phénomène.

Il s'ensuit d'abord, pour $n = 1$, qu'un nombre $\omega = x + y\theta$ est divisible par α dans le cas, et seulement dans ce cas, où $N(\omega)$ est un nombre pair, et où l'on a, par suite,

$$(\alpha) \qquad x \equiv y \pmod{2}.$$

Le nombre ω *n'est pas* divisible par α, quand $N(\omega)$ est un nombre impair, et que l'on a par suite $x \equiv 1 + y \pmod{2}$; et de là résulte évidemment le théorème dans lequel on reconnaîtra le caractère du nombre idéal α comme nombre premier : « Tout produit de deux nombres non divisibles par α est aussi non divisible par α ».

Relativement aux puissances supérieures de α, on conclut d'abord de la définition qu'un nombre ω divisible par α^n l'est aussi par toutes les puissances inférieures de α, puisqu'un nombre ω^2 divisible par 2^n l'est aussi par toutes les puissances inférieures de 2. Nous allons maintenant, si ω est différent de zéro, chercher l'exposant m de *la plus haute* puissance de α qui divise ω, c'est-à-dire l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui divise ω^2. Soit s l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui divise ω lui-même; on aura

$$\omega = 2^s\omega_1 = 2^s(x_1 + y_1\theta),$$

et l'un au moins des deux nombres rationnels entiers x_1, y_1 sera impair; si les deux sont impairs, ω_1 sera divisible par α, et l'on aura

$$\omega_1^2 = x_1^2 - 5y_1^2 + 2x_1y_1\theta = 2\omega_2,$$

$\omega_2 = x_2 + y_2\theta$ n'étant pas divisible par α, puisque x_2 est pair et y_2 impair; mais si l'un des deux nombres x_1, y_1 est pair, et partant l'autre impair, ω_1 et par suite aussi ω_1^2 ne seront pas divisibles par α. Donc, dans le premier cas, $m = 2s + 1$; dans le second cas, $m = 2s$; mais dans les deux cas $\omega^2 = 2^m\omega'$, ω' désignant un nombre non divisible par α. On voit en même temps que m est aussi l'exposant de la plus haute puissance de 2 qui divise la norme $N(\omega)$; on a donc ce théorème : « L'exposant de la plus haute puissance de α qui divise un produit est égal à la somme des exposants des plus hautes puissances de α qui divisent les facteurs. » Il est pareillement évident que tout nombre ω divisible par α^{2n} est aussi divisible par 2^n; car, si l'exposant désigné plus haut par s était $< n$, les nombres $2s$,

[illegible] $< 2n$, ce qui est contre l'hy-
[illegible] de la définition que, réciproque-
[illegible] 2^n l'est aussi par α^{2n}.
[illegible] ible par α, mais ne l'étant pas par
[illegible] aide du théorème précédent, que la
[illegible] qui a servi de définition pour la di-
[illegible], peut être complétement remplacée

$$\ldots \equiv 0 \pmod{2^n},$$

[illegible] venir le nombre ω qu'à la *première* puis-

[illegible] *nombres 3 et 7 dans le domaine* $\mathfrak{o}$.

[illegible] antités qui entrent dans les équations (4) du
[illegible] *rationnels* entiers, et qu'en même temps a est
[illegible] avec c, il est évident qu'un nombre rationnel
[illegible] sera ou ne sera pas divisible par $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$,
[illegible] ou ne satisfera pas à la congruence correspon-

$$zd_2 \equiv 0, \quad zd_1 \equiv 0 \pmod{b},$$
$$ze_2 \equiv 0, \quad ze_1 \equiv 0 \pmod{c}.$$

...s ont maintenant ceci de particulier, que les nombres ...n'y entrent aucunement par eux-mêmes, et c'est pré... ...ar cela que, dans le cas que nous traitons effectivement, ...it de nombres du domaine $\mathfrak{o}$, elles sont appropriées pour ...ntroduction de quatre nombres idéaux $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$. Nous ... un nombre quelconque $\omega = x + y\theta$ est *divisible* par l'un ...quatre nombres, si ω est une racine de la congruence cor... ...dante

$$(1 - \theta)\omega \equiv 0, \quad (1 + \theta)\omega \equiv 0 \pmod{3},$$
$$(3 - \theta)\omega \equiv 0, \quad (3 + \theta)\omega \equiv 0 \pmod{7}.$$

...ffectuant la multiplication, ces congruences se changent dans

les suivantes :

(β_1) $x \equiv y \pmod{3}$,
(β_2) $x \equiv -y \pmod{3}$,
(γ_1) $x \equiv 3y \pmod{7}$,
(γ_2) $x \equiv -3y \pmod{7}$.

A cela nous rattacherons les remarques suivantes.

Chacune de ces conditions peut être satisfaite par l'un des nombres $\omega = 1 + \theta$, $1 - \theta$, $3 + \theta$, $3 - \theta$, ce nombre ne satisfaisant à aucune des trois autres, et il s'ensuit de là qu'il est légitime d'appeler ces quatre nombres idéaux *différents entre eux.* Comme, en outre, tout nombre ω divisible par β_1 et par β_2 est aussi divisible par 3, puisque l'on doit avoir $x \equiv y \equiv -y \equiv 0 \pmod{3}$, et que réciproquement tout nombre divisible par 3 est aussi divisible par chacun des nombres β_1, β_2, on devrait, par analogie avec la théorie des nombres rationnels, considérer le nombre 3 comme le plus petit commun multiple des deux nombres idéaux β_1, β_2. Mais chacun de ces deux nombres idéaux possède aussi le caractère d'un nombre premier, c'est-à-dire qu'il ne divise un produit $\omega\omega'$ que lorsqu'il divise un au moins des facteurs ω, ω'; si l'on pose, en effet,

$$\omega = x + y\theta, \quad \omega' = x' + y'\theta, \quad \omega'' = \omega\omega' = x'' + y''\theta,$$

on aura

$$x'' = xx' - 5yy', \quad y'' = xy' + yx',$$

et par suite

$$x'' \pm y'' \equiv (x \pm y)(x' \pm y') \pmod{3},$$

ce qui vérifie immédiatement notre assertion, en ayant égard aux congruences ci-dessus (β_1), (β_2). D'après cela, le nombre 3 devra être considéré, à un certain point de vue, comme le produit des deux nombres premiers idéaux différents β_1, β_2.

Comme, de plus, chacun de ces deux nombres premiers idéaux β_1, β_2 est différent (dans le sens indiqué ci-dessus) du nombre premier idéal α introduit plus haut, dès lors, en observant que 2 se comporte comme le carré de α, et que $1 + \theta$ est divisible par α et par β_1, de même que $1 - \theta$ est divisible par α et par β_2, on devra conclure, de l'équation $2.3 = (1 + \theta)(1 - \theta)$, que $1 + \theta$ se comporte

comme le produit de α et de β_1, et $1 - \theta$ comme le produit de α et de β_2. Cette *présomption* se confirme en effet pleinement : tout nombre $\omega = x + y\theta$ divisible par $1 + \theta$ est, en effet, divisible par α et par β_1, puisque

$$x + y\theta = (1 + \theta)(x' + y'\theta),$$

d'où

$$x = x' - 5y', \quad y = x' + y',$$

et par suite

$$x \equiv y \pmod{2}, \quad x \equiv y \pmod{3};$$

et réciproquement, tout nombre $\omega = x + y\theta$, divisible par α et par β_1, c'est-à-dire satisfaisant aux deux congruences précédentes, est aussi divisible par $1 + \theta$, puisque l'on a $y = x + 6y'$, et par suite

$$x + y\theta = (1 + \theta)(x + 5y' + y'\theta).$$

On peut maintenant introduire aussi les *puissances* des nombres premiers idéaux β_1, β_2, comme on l'a fait plus haut pour les puissances du nombre idéal α; par analogie avec la théorie des nombres rationnels, nous définirons la divisibilité d'un nombre quelconque ω par β_1^n ou par β_2^n respectivement par les congruences

$$(\beta_1^n) \qquad \omega(1 - \theta)^n \equiv 0 \pmod{3^n},$$

$$(\beta_2^n) \qquad \omega(1 + \theta)^n \equiv 0 \pmod{3^n},$$

et il en résulterait une suite de théorèmes qui coïncideraient parfaitement avec ceux de la théorie des nombres rationnels. On traiterait de la même façon les nombres premiers idéaux γ_1, γ_2.

§ 10. — *Lois de la divisibilité dans le domaine* $\mathfrak{o}$.

En étudiant d'une manière semblable tout le domaine $\mathfrak{o}$ des nombres $\omega = x + y\theta$, on trouve les résultats suivants :

1° Tous les nombres premiers rationnels positifs qui sont $\equiv 11$, 13, 17, 19 (mod. 20) se comportent aussi, dans le cas actuel, comme des nombres premiers.

2° Le nombre θ, dont le carré $= -5$, possède le caractère d'un nombre premier; le nombre 2 se comporte comme le carré d'un nombre premier idéal α.

3° Tout nombre premier rationnel positif qui est $\equiv 1, 9 \pmod{20}$ peut se décomposer en deux facteurs différents, réellement existants, dont chacun a le caractère d'un nombre premier.

4° Tout nombre premier rationnel positif qui est $\equiv 3, 7 \pmod{20}$ se comporte comme un produit de deux nombres premiers idéaux différents entre eux.

5° Tout nombre existant ω, différent de zéro et de ± 1, est ou un des nombres désignés ci-dessus qui ont le caractère de nombres premiers, ou bien il se comporte, dans toutes les questions de divisibilité, comme s'il était un produit composé d'une manière complétement déterminée de facteurs premiers existants et idéaux.

Mais, pour parvenir à ce résultat et acquérir une certitude complète sur la question de savoir si, en réalité, toutes les lois générales de la divisibilité qui régissent le domaine des nombres rationnels peuvent s'étendre à notre domaine $\mathfrak{o}$ à l'aide des nombres idéaux que nous avons introduits [1], il faut encore, comme on s'en apercevra bientôt quand on essayera une déduction rigoureuse, se livrer à une étude très-approfondie, lors même qu'on voudrait supposer connue ici la théorie des résidus quadratiques et celle des formes quadratiques binaires (théorie qui, réciproquement, se tire avec la plus grande facilité de la théorie générale des nombres algébriques entiers). On peut bien atteindre en toute rigueur le but proposé, en suivant la voie indiquée; mais, comme nous l'avons remarqué dans l'Introduction, la plus grande circonspection est nécessaire pour ne pas se laisser entraîner à des conclusions prématurées, et, en particulier, la notion de *produit* de facteurs quelconques, existants ou idéaux, ne peut être exactement définie qu'à l'aide de détails assez minutieux. A cause de ces difficultés, il semblera toujours désirable de remplacer le nombre idéal de Kummer, qui n'est jamais défini en lui-même, mais seulement comme diviseur des nombres existants ω du domaine $\mathfrak{o}$, par un *substantif* réellement existant, et c'est ce qui peut se faire de plusieurs manières.

---

(1) Il semblera peut-être à quelques personnes évident *a priori* que le rétablissement de cette harmonie avec la théorie des nombres rationnels doit pouvoir *s'imposer*, quoi qu'il arrive, par l'introduction des nombres idéaux; mais l'exemple, déjà donné plus haut, du rôle irrégulier du nombre 2 dans le domaine des nombres $x + y\sqrt{-3}$, suffit bien pour dissiper cette illusion.

On pourrait, par exemple (et, si je ne me trompe, ce serait la voie que Kronecker aurait choisie dans ses recherches), introduire, au lieu des nombres idéaux, des nombres algébriques existants, mais non compris dans le domaine $\mathfrak{o}$, et les *adjoindre* à ce domaine dans le sens que Galois a donné à ce mot. En effet, si l'on pose

$$\beta_1 = \sqrt{-2+\theta}, \quad \beta_2 = \sqrt{-2-\theta},$$

et que l'on choisisse ces radicaux carrés de manière que l'on ait $\beta_1\beta_2 = 3$, on aura

$$\theta^2 = -5, \quad \beta_1^2 = -2+\theta, \quad \beta_2^2 = -2-\theta,$$
$$\beta_1\beta_2 = 3, \quad \theta\beta_1 = -2\beta_1 - 3\beta_2, \quad \theta\beta_2 = 3\beta_1 + 2\beta_2,$$

d'où il s'ensuit que les nombres quadrinômes

$$x + y\theta + z_1\beta_1 + z_2\beta_2,$$

où x, y, z_1, z_2 désignent des nombres rationnels entiers quelconques, se reproduiront par addition, soustraction et multiplication; le domaine $\mathfrak{o}'$ de ces nombres embrasse le domaine $\mathfrak{o}$, et tous les nombres idéaux qu'il fallait introduire dans ce dernier pourront être remplacés par des nombres existants du nouveau domaine $\mathfrak{o}'$. En posant, par exemple,

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2, \quad \gamma_1 = 2\beta_1 + \beta_2, \quad \gamma_2 = \beta_1 + 2\beta_2,$$

toutes les équations (4) du § 7 seront satisfaites; pareillement, les deux facteurs premiers idéaux du nombre 23 dans le domaine $\mathfrak{o}$ seront remplacés par les deux nombres existants $2\beta_1 - \beta_2$ et $-\beta_1 + 2\beta_2$ du domaine $\mathfrak{o}'$, et il en sera de même de tous les nombres idéaux du domaine $\mathfrak{o}$.

Cependant cette voie, bien qu'elle puisse aussi conduire au but, ne me semble pas présenter toute la simplicité désirable, parce que l'on est forcé de passer du domaine donné $\mathfrak{o}$ à un domaine plus compliqué $\mathfrak{o}'$; et il est facile aussi de reconnaître que dans le choix de ce nouveau domaine $\mathfrak{o}'$ il règne un grand arbitraire. Dans l'Introduction, j'ai exposé avec tant de détails le courant d'idées qui m'a conduit à fonder cette théorie sur une tout autre base, savoir, sur la notion de l'*idéal*, qu'il serait superflu d'y revenir ici, et je me bornerai, en conséquence, à éclaircir cette notion par un exemple.

§ 11. — *Idéaux dans le domaine* $\mathfrak{o}$.

La condition pour qu'un nombre $\omega = x + y\theta$ soit divisible par le nombre premier idéal α consiste, d'après le § 8, dans la congruence $x \equiv y$ (mod. 2); donc, pour obtenir le système $\mathfrak{a}$ de tous les nombres ω divisibles par α, on posera $x = y + 2z$, y et z désignant des nombres rationnels entiers quelconques; ce système $\mathfrak{a}$ se compose donc de tous les nombres de la forme $2z + (1 + \theta)y$, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}$ est un *module fini,* dont la base se compose des deux nombres indépendants 2 et $1 + \theta$, et par suite

$$\mathfrak{a} = [2, 1 + \theta].$$

En désignant de même par $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ les systèmes de tous les nombres ω divisibles respectivement par les nombres premiers idéaux β_1, β_2, γ_1, γ_2, on tirera, des congruences correspondantes du § 9,

$$\mathfrak{b}_1 = [3, 1 + \theta], \quad \mathfrak{b}_2 = [3, 1 - \theta],$$
$$\mathfrak{c}_1 = [7, 3 + \theta], \quad \mathfrak{c}_2 = [7, 3 - \theta].$$

Si l'on désigne maintenant par $\mathfrak{m}$ un quelconque de ces cinq systèmes, $\mathfrak{m}$ jouira des propriétés suivantes :

I. Les sommes et les différences de deux nombres quelconques du système $\mathfrak{m}$ seront toujours des nombres de ce même système $\mathfrak{m}$.

II. Tout produit d'un nombre du système $\mathfrak{m}$ et d'un nombre du système $\mathfrak{o}$ est un nombre du système $\mathfrak{m}$.

La première propriété, caractéristique de chaque module, est évidente. Pour constater la seconde propriété relativement au système $\mathfrak{m}$, dont la base se compose des deux nombres μ, μ', il suffit évidemment de démontrer que les deux produits $\theta\mu$, $\theta\mu'$ appartiennent au même système; pour le système $\mathfrak{a}$, cela résulte des deux égalités

$$2\theta = -1.2 + 2(1 + \theta), \quad (1 + \theta)\theta = -3.2 + (1 + \theta),$$

et il en est exactement de même pour les autres systèmes. Mais ces deux propriétés peuvent aussi s'établir sans ces vérifications, en s'appuyant sur ce que chacun des cinq systèmes $\mathfrak{m}$ est l'ensemble de tous les nombres ω du domaine $\mathfrak{o}$ qui satisfont à une congruence

de la forme

$$\nu\omega \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mu),$$

μ, ν étant deux nombres donnés du domaine $\mathfrak{o}$.

Nous appellerons maintenant *tout* système $\mathfrak{m}$, composé de nombres du domaine $\mathfrak{o}$ et jouissant des deux propriétés I et II, un *idéal*, et nous nous poserons d'abord le problème de trouver la *forme* générale de tous les idéaux. En excluant le cas singulier où $\mathfrak{m}$ se compose du seul nombre zéro, et choisissant arbitrairement un nombre μ (différent de zéro), de l'idéal $\mathfrak{m}$, alors, si l'on désigne par μ' le nombre conjugué, la norme $N(\mu) = \mu\mu'$, ainsi que le produit $\theta N(\mu)$, appartiendra aussi, en vertu de II, à l'idéal $\mathfrak{m}$; donc tous les nombres du module $\mathfrak{o} = [1, \theta]$, en les multipliant par le nombre rationnel $N(\mu)$ différent de zéro, se changeront en nombres du module $\mathfrak{m}$, lequel est en même temps un *multiple* de $\mathfrak{o}$; or il s'ensuit de là (§ 3, 2°) que $\mathfrak{m}$ est un module fini, de la forme $[k, l + m\theta]$, k, l, m étant des nombres rationnels entiers, parmi lesquels k et m pourront être choisis *positifs*. Puisque $\mathfrak{m}$ possède déjà, comme module, la propriété I, il ne s'agit plus maintenant que de l'assujettir à la propriété II, qui consiste en ce que les deux produits $k\theta$ et $(l + m\theta)\theta$ appartiennent au même système $\mathfrak{m}$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour cela consistent, comme on le voit sans peine, en ce que k et l soient divisibles par m et que les nombres rationnels entiers a, b, qui entrent dans l'expression

$$\mathfrak{m} = [ma, \; m(b + \theta)],$$

satisfassent, en outre, à la congruence

$$b^2 \equiv -5 \quad (\text{mod. } a);$$

si l'on remplace b par un nombre quelconque qui soit $\equiv b$ (mod. a), l'idéal $\mathfrak{m}$ ne sera pas changé. Les cinq idéaux ci-dessus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ sont évidemment contenus dans cette forme, puisque $(b + \theta)$ peut aussi être remplacé par $-(b + \theta)$.

L'ensemble de tous les nombres conjugués avec les nombres de l'idéal $\mathfrak{m}$ est évidemment aussi un idéal

$$\mathfrak{m}_1 = [ma, \; m(-b + \theta)];$$

deux idéaux de cette sorte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$ peuvent être appelés des idéaux *conjugués*.

Soit μ un nombre quelconque du domaine $\mathfrak{o}$; le système $[\mu, \mu\theta]$ de tous les nombres divisibles par μ formera un idéal, que nous appellerons un *idéal principal* ([1]), et que nous désignerons par $\mathfrak{o}(\mu)$ ou encore par $\mathfrak{o}\mu$; il est facile de lui donner la forme ci-dessus $[ma, m(b+\theta)]$; m est le plus grand nombre rationnel entier qui divise $\mu = m(u+\nu\theta)$, et l'on a, de plus

$$a = \frac{N(\mu)}{m^2}, \quad \nu b \equiv u \pmod{a}.$$

On trouve ainsi, par exemple,

$$\mathfrak{o}(\pm 1) = \mathfrak{o} = [1, \theta],$$

et

$$\mathfrak{o}(2) = [2, 2\theta], \quad \mathfrak{o}(3) = [3, 3\theta], \quad \mathfrak{o}(7) = [7, 7\theta],$$
$$\mathfrak{o}(1 \pm \theta) = [6, \pm 1 + \theta], \quad \mathfrak{o}(3 \pm \theta) = [14, \pm 3 + \theta],$$
$$\mathfrak{o}(-2 \pm \theta) = [9, \mp 2 + \theta], \quad \mathfrak{o}(2 \pm 3\theta) = [49, \pm 17 + \theta],$$
$$\mathfrak{o}(-1 \pm 2\theta) = [21, \pm 10 + \theta], \quad \mathfrak{o}(4 \pm \theta) = [21, \pm 4 + \theta].$$

Comme tous les idéaux sont en même temps des modules, nous dirons (d'après le § 2, 1°) que deux nombres ω, ω' sont *congrus* par rapport à l'idéal $\mathfrak{m}$, et nous poserons $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{m}}$, lorsque la différence $\omega - \omega'$ sera un nombre contenu dans $\mathfrak{m}$; la *norme* $N(\mathfrak{m})$ de l'idéal $\mathfrak{m} = [ma, m(b+\theta)]$ sera le nombre

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{m}) = m^2 a$$

des *classes* dans lesquelles se décompose le domaine $\mathfrak{o}$ par rapport au module $\mathfrak{m}$ (§ 4, 4°). Si $\mathfrak{m}$ est un idéal principal $\mathfrak{o}\mu$, la congruence précédente sera identique avec $\omega \equiv \omega' \pmod{\mu}$, et l'on aura

$$N(\mathfrak{m}) = N(\mu).$$

La norme d'un nombre quelconque $m\{ax + (b+\theta)y\}$ contenu dans l'idéal $\mathfrak{m} = [ma, m(b+\theta)]$ est égale au produit de $N(\mathfrak{m}) = m^2 a$

(1) Si l'on étend la définition de l'idéal au domaine $\mathfrak{o}$ des nombres rationnels entiers, ou à celui des nombres complexes entiers de Gauss, ou à l'un des cinq domaines $\mathfrak{o}$ dont il a été question dans le § 7, on voit aisément que tout idéal est un idéal principal; il est évident aussi que, dans le domaine des nombres rationnels entiers, la propriété II est déjà contenue dans la propriété I.

par la forme quadratique binaire $ax^2 + 2bxy + cy^2$, dont le déterminant, suivant la définition de Gauss, est $b^2 - ac = -5$ (1).

§ 12. — *Divisibilité et multiplication des idéaux dans le domaine* $\mathfrak{o}$.

Je vais maintenant montrer de quelle manière la théorie des nombres $\omega = x + y\theta$ du domaine $\mathfrak{o}$ peut se fonder sur la notion de l'idéal; toutefois, je serai obligé, pour abréger, de laisser au lecteur le soin de développer quelques calculs faciles.

Nous dirons, absolument comme dans la théorie des modules (§ 1, 2°), qu'un idéal $\mathfrak{m}''$ est *divisible* par un idéal $\mathfrak{m}$, quand tous les nombres du premier seront contenus aussi dans le second. D'après cela, un idéal principal $\mathfrak{o}\mu''$ sera toujours divisible par un idéal principal $\mathfrak{o}\mu$ dans le cas, et seulement dans ce cas, où le nombre μ'' sera divisible par le nombre μ; de là résulte que la théorie de la divisibilité des nombres *est contenue* dans celle des idéaux. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'idéal $\mathfrak{m}'' = [m''a'', m''(b'' + \theta)]$ soit divisible par l'idéal $\mathfrak{m} = [ma, m(b + \theta)]$ consiste, comme on l'aperçoit immédiatement, dans les trois congruences

$$m''a \equiv m''a'' \equiv m''(b'' - b) \equiv 0 \pmod{ma}.$$

La définition de la *multiplication* des idéaux est celle-ci : Si μ parcourt tous les nombres de l'idéal $\mathfrak{m}$, et de même μ' tous les nombres de l'idéal $\mathfrak{m}'$, tous les produits $\mu\mu'$ et leurs sommes formeront un *idéal* $\mathfrak{m}''$, qui sera dit le *produit* (2) des facteurs $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$, et que l'on désignera par $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$. On aura évidemment $\mathfrak{o}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'\mathfrak{m}$, $(\mathfrak{m}\mathfrak{m}')\mathfrak{n} = \mathfrak{m}(\mathfrak{m}'\mathfrak{n})$, et de là s'ensuivent, pour les produits d'un nombre quelconque d'idéaux, les mêmes théorèmes que pour les produits de nombres (3); de plus, il est clair que le produit des deux idéaux principaux $\mathfrak{o}\mu$ et $\mathfrak{o}\mu'$ est l'idéal principal $\mathfrak{o}(\mu\mu')$.

---

(1) La théorie générale des formes se simplifie cependant un peu si l'on admet aussi les formes $Ax^2 + Bxy + Cy^2$, où B est impair, et si l'on entend toujours par déterminant de la forme le nombre $B^2 - 4AC$.

(2) La même définition s'applique aussi à la multiplication de deux *modules* quelconques.

(3) *Voir* Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 2.

Soient donnés maintenant deux idéaux,

$$\mathfrak{m} = [ma, m(b+\theta)], \quad \mathfrak{m}' = [m'a', m'(b'+\theta)];$$

on déduira de là leur produit

$$\mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}\mathfrak{m}' = [m''a'', m''(b''+\theta)],$$

à l'aide des méthodes indiquées dans la première Section (§ 4, 5° et 6°); car il est clair d'abord, en vertu de la définition, que le produit $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ est un module fini, dont la base se compose des *quatre* produits

$$mm'aa', \quad mm'a(b'+\theta), \quad mm'a'(b+\theta),$$
$$mm'(b+\theta)(b'+\theta) = mm'[bb'-5+(b+b')\theta],$$

dont *deux* seulement sont indépendants entre eux. On trouve ainsi, par exemple, pour les idéaux considérés plus haut,

$$\mathfrak{b}_1 = [3, 1+\theta], \quad \mathfrak{c}_2 = [7, 3-\theta],$$

le produit

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 = [21, 9-3\theta, 7+7\theta, 8+2\theta];$$

ce module se déduit de celui qui a été considéré à la fin de la première Section (§ 4, 6°), en y faisant $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \theta$, et l'on en tire

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 = [21, -17+\theta] = [21, 4+\theta] = \mathfrak{o}(4+\theta);$$

on obtiendrait absolument de la même manière les résultats suivants, entièrement analogues aux équations hypothétiques (4) du § 7:

$$\mathfrak{o}(2) = \mathfrak{a}^2, \quad \mathfrak{o}(3) = \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \quad \mathfrak{o}(7) = \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2;$$
$$\mathfrak{o}(-2+\theta) = \mathfrak{b}_1^2, \quad \mathfrak{o}(-2-\theta) = \mathfrak{b}_2^2;$$
$$\mathfrak{o}(2+3\theta) = \mathfrak{c}_1^2, \quad \mathfrak{o}(2-3\theta) = \mathfrak{c}_2^2;$$
$$\mathfrak{o}(1+\theta) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{o}(1-\theta) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2;$$
$$\mathfrak{o}(3+\theta) = \mathfrak{a}\mathfrak{c}_1, \quad \mathfrak{o}(3-\theta) = \mathfrak{a}\mathfrak{c}_2;$$
$$\mathfrak{o}(-1+2\theta) = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1, \quad \mathfrak{o}(-1-2\theta) = \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2;$$
$$\mathfrak{o}(4+\theta) = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2, \quad \mathfrak{o}(4-\theta) = \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1;$$

Pour effectuer *en général* la multiplication de deux idéaux quelconques $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$, il faut transformer la base composée des quatre nom-

bres ci-dessus en une autre composée seulement des deux nombres $m''a''$, $m''(b''+\theta)$. On y parvient (en vertu du § 4), au moyen de quatre équations de la forme

$$\begin{aligned}
mm'aa' &= p\ m''a'' + q\ m''(b''+\theta),\\
mm'a(b'+\theta) &= p'\ m''a'' + q'\ m''(b''+\theta),\\
mm'a'(b+\theta) &= p''m''a'' + q''m''(b''+\theta),\\
mm'[bb'-5+(b+b')\theta] &= p'''m''a'' + q'''m''(b''+\theta),
\end{aligned}$$

où p, p', ..., q''' désignent huit nombres rationnels entiers tellement choisis que les six déterminants, formés avec ces nombres,

$$\begin{aligned}
&P = p\,q' - q\,p', \quad Q = p\,q'' - q\,p'', \quad R = p\,q''' - q\,p''',\\
&U = p''q''' - q''p''', \quad T = p'q''' - q'p''', \quad S = p'q'' - q'p'',
\end{aligned}$$

n'admettent aucun diviseur commun. Des quatre équations précédentes, dont chacune se décompose en deux autres, on conclura maintenant sans peine que ces six déterminants sont respectivement proportionnels aux six nombres

$$\begin{aligned}
&a, \quad a', \quad b'+b,\\
&c, \quad c', \quad b'-b,
\end{aligned}$$

c et c' étant déterminés par les équations

$$bb - ac = b'b' - a'c' = -5;$$

or, comme ces six nombres n'admettent non plus aucun diviseur commun ([1]), ils devront coïncider précisément avec ces six déterminants. Il s'ensuit de là, puisque l'on a $q = 0$, et que q', q'', q''' ne peuvent avoir aucun diviseur commun, que l'on déterminera comme il suit le produit $\mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ des deux facteurs donnés $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$. Soit p le plus grand commun diviseur (positif) des trois nombres donnés

$$a = pq', \quad a' = pq'', \quad b + b' = pq''';$$

on aura

$$m'' = pmm', \quad a'' = \frac{aa'}{p^2} = q'q'',$$

([1]) Il n'en serait pas toujours ainsi dans le domaine des nombres $x + y\sqrt{-3}$.

et b'' sera déterminé par les congruences

$$q'b'' \equiv q'b', \quad q''b'' \equiv q''b, \quad q'''b'' \equiv \frac{bb'-5}{p} \pmod{a''};$$

puis on aura en même temps $b''b'' \equiv -5 \pmod{a''}$, c'est-à-dire

$$b''b'' - a''c'' = -5,$$

c'' désignant un nombre rationnel entier, et, d'après la dénomination employée par Gauss ([1]), la forme quadratique binaire (a'', b'', c'') sera *composée* des deux formes (a, b, c) et (a', b', c').

Des valeurs de m'', a'' on tire $m''^2 a'' = m^2 a . m'^2 a'$, d'où ce théorème

$$\mathrm{N}(\mathfrak{m}\mathfrak{m}') = \mathrm{N}(\mathfrak{m})\mathrm{N}(\mathfrak{m}');$$

en outre, il faut remarquer le cas particulier où $\mathfrak{m}'$ est l'idéal $\mathfrak{m}_1$ conjugué avec $\mathfrak{m}$; des formules précédentes on déduit immédiatement ce résultat

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{o}\mathrm{N}(\mathfrak{m}).$$

Les deux notions de la *divisibilité* et de la *multiplication* des idéaux sont maintenant liées entre elles de la manière suivante. Le produit $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ est divisible à la fois par $\mathfrak{m}$ et par $\mathfrak{m}'$, puisque, en vertu de la propriété II des idéaux, tous les produits $\mu\mu'$, dont les facteurs sont contenus respectivement dans $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$, appartiennent également à ces idéaux; on tirerait la même conclusion de la forme de l'idéal-produit trouvée plus haut. Réciproquement, si l'idéal $\mathfrak{m}'' = [m''a'', m''(b''+\theta)]$ est divisible par l'idéal $\mathfrak{m} = [ma, m(b+\theta)]$, il existera un idéal $\mathfrak{m}'$, et un seul, tel que l'on aura $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}''$; si l'on désigne, en effet, par $\mathfrak{m}_1$ l'idéal conjugué de $\mathfrak{m}$, et que l'on forme, d'après les règles précédentes, le produit

$$\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}'' = [m'''a', m'''(b'+\theta)],$$

il résulte, des trois congruences établies au commencement de ce paragraphe, que m''' est divisible par $\mathrm{N}(\mathfrak{m}) = m^2 a$, et par suite que $m''' = m^2 a m'$, m' désignant un nombre entier; en joignant à cela le théorème précédent, que $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{o}(m^2 a)$, on en conclut aisément

([1]) *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 235, 242.

que l'idéal $\mathfrak{m}' = [m'a', m'(b' + \theta)]$, et lui seul, remplit la condition $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}''$. Il en résulte en même temps que l'égalité $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}\mathfrak{m}'''$ entraîne toujours l'égalité $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'''$.

Pour arriver maintenant à la conclusion de cette théorie, il ne nous reste plus qu'à introduire encore la notion suivante : un idéal $\mathfrak{p}$, différent de $\mathfrak{o}$ et n'ayant pour diviseur aucun autre idéal que $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{p}$, sera dit un *idéal premier*. η étant un nombre déterminé, le système $\mathfrak{r}$ de *toutes* les racines ρ de la congruence $\eta\rho \equiv 0$ (mod. $\mathfrak{p}$) formera un idéal, parce qu'il possède les propriétés I et II; cet idéal $\mathfrak{r}$ est un diviseur de $\mathfrak{p}$, puisque tous les nombres contenus dans $\mathfrak{p}$ sont aussi des racines de cette congruence; donc, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, $\mathfrak{r}$ devra être ou $= \mathfrak{o}$ ou $= \mathfrak{p}$. Si le nombre donné η n'est pas contenu dans $\mathfrak{p}$, le nombre 1, contenu dans $\mathfrak{o}$, ne sera pas une racine de la congruence, et partant dans ce cas $\mathfrak{r}$ ne sera pas $= \mathfrak{o}$, mais $= \mathfrak{p}$, c'est-à-dire que toutes les racines ρ devront être contenues dans $\mathfrak{p}$. Ainsi se trouve évidemment établi le théorème suivant ([1]) « : Un produit $\eta\rho$ de deux nombres η, ρ n'est contenu dans un idéal premier $\mathfrak{p}$ que si l'un au moins des deux facteurs est contenu dans $\mathfrak{p}$ ». Et de là résulte immédiatement cet autre théorème : « Si aucun des deux idéaux $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ n'est divisible par l'idéal premier $\mathfrak{p}$, leur produit $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ ne sera pas non plus divisible par $\mathfrak{p}$ »; car, puisqu'il y a dans $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ respectivement des nombres μ, μ' qui ne sont pas contenus dans $\mathfrak{p}$, il existera aussi dans $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ un nombre $\mu\mu'$ qui ne sera pas non plus contenu dans $\mathfrak{p}$.

En combinant le théorème que nous venons de démontrer avec les théorèmes précédents relatifs à la dépendance entre les notions de divisibilité et de multiplication des idéaux, et ayant égard à ce que, en dehors de $\mathfrak{o}$, il n'existe aucun autre idéal dont la norme soit $= 1$, on arrive, par les mêmes raisonnements ([2]) que dans la théorie des nombres rationnels, au théorème suivant : « Tout idéal différent de $\mathfrak{o}$ ou est un idéal premier, ou peut se mettre, et cela d'une seule manière, sous la forme d'un produit d'un nombre fini d'idéaux premiers. » De ce théorème il résulte immédiatement qu'un idéal $\mathfrak{m}''$

([1]) Ce théorème conduit aisément à la détermination de tous les idéaux premiers contenus dans $\mathfrak{o}$, et ceux-ci correspondent exactement aux nombres premiers, existants et idéaux, énumérés dans le § 10.

([2]) *Voir* DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 8.

est toujours divisible par un idéal $\mathfrak{m}$ dans le cas, et seulement dans ce cas, où toutes les puissances d'idéaux premiers qui divisent $\mathfrak{m}$ divisent aussi $\mathfrak{m}''$. Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\mu$ et $\mathfrak{m}'' = \mathfrak{o}\mu''$ sont des idéaux principaux, le même critérium décide aussi de la divisibilité du *nombre* μ'' par le *nombre* μ. Et ainsi la théorie de la divisibilité des nombres dans le domaine $\mathfrak{o}$ se trouve ramenée à des lois fixes et simples.

Toute cette théorie peut s'appliquer presque mot pour mot à un domaine $\mathfrak{o}$ quelconque composé de *tous* les nombres entiers d'un corps quelconque Ω du second degré, quand la notion de nombre *entier* est définie comme elle l'a été dans l'Introduction ([1]). Mais cette base de la théorie, bien qu'elle ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur, n'est nullement celle que je me propose d'établir. On peut remarquer, en effet, que les démonstrations des propositions les plus importantes se sont appuyées sur la représentation des idéaux par l'*expression* $[ma, m(b+\theta)]$ et sur la réalisation effective de la multiplication, c'est-à-dire sur un *calcul* qui coïncide avec la composition des formes quadratiques binaires, enseignée par Gauss. Si l'on voulait traiter de la même manière tous les corps Ω de degré quelconque, on se heurterait à de grandes difficultés, peut-être insurmontables. Mais, lors même qu'il n'en serait pas ainsi, une telle théorie, fondée sur le calcul, n'offrirait pas encore, ce me semble, le plus haut degré de perfection; il est préférable, comme dans la théorie moderne des fonctions, de chercher à tirer les démonstrations, non plus du calcul, mais immédiatement des concepts fondamentaux caractéristiques, et d'édifier la théorie de manière qu'elle soit, au contraire, en état de prédire les résultats du calcul (par exemple, la composition des formes décomposables de tous les degrés). Tel est le but que je vais poursuivre dans les Sections suivantes de ce Mémoire.

(*A suivre.*)

([1]) Le domaine, mentionné plus haut, des nombres $x+y\sqrt{-3}$, où x, y prennent toutes les valeurs rationnelles et entières, *n'est pas* un domaine de cette nature; mais il constitue seulement *une partie* du domaine $\mathfrak{o}$ de tous les nombres $x+y\rho$, ρ étant une racine de l'équation $\rho^2+\rho+1=0$.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CAYLEY (A.). — AN ELEMENTARY TREATISE ON ELLIPTIC FUNCTIONS. — Cambridge, 1876. 1 vol. in-8°, 384 p.

« Le présent Traité », dit au début de sa préface l'éminent géomètre, « est fondé sur le *Traité des fonctions elliptiques* de Legendre et sur les *Fundamenta nova* de Jacobi, ainsi que sur ses Mémoires du *Journal de Crelle :* je n'ai fait comparativement qu'un faible usage des recherches d'Abel et de celles des autres auteurs. »

Le livre de M. Cayley débute par un résumé général de la théorie des fonctions elliptiques, résumé qui va depuis la définition de ces fonctions jusqu'à la théorie de la transformation : c'est, en quelque sorte, une Table des théorèmes, qui permet au lecteur de se retrouver dans toute la théorie et de saisir le lien qui en réunit les diverses parties.

Le théorème sur l'addition remplit le Chapitre suivant : l'auteur en donne six démonstrations distinctes ; en particulier, une démonstration géométrique, due à Jacobi et fondée sur la relation différentielle qui existe entre deux arcs comptés, à partir d'un même point, sur un même cercle et terminés aux points d'intersection de ce cercle et d'une tangente mobile à un autre cercle, conduit, par une généralisation naturelle, au théorème de Landen.

Le troisième Chapitre contient des mélanges sur les arcs d'ellipse et d'hyperbole qui représentent les intégrales elliptiques ; sur la variation de ces intégrales avec l'argument et le module, sur les équations différentielles linéaires qui relient les intégrales complètes et le module, enfin sur les fonctions S introduites par Gudermann, fonctions qui ne diffèrent pas de la tangente et de la sécante hyperbolique de l'argument u et qui s'introduisent naturellement comme limites de $\sin \mathrm{am}\, u$ et de $\cos \mathrm{am}\, u$, lorsque le module tend vers l'unité.

Le quatrième Chapitre commence par le tableau des formules relatives à l'addition et à la soustraction : ces formules conduisent immédiatement à la double périodicité, si l'on connait les valeurs des fonctions sn, cn, dn (M. Cayley emploie la notation de Gudermann) pour les valeurs o, K, $K + iK'$ de l'argument ; l'existence

de la deuxième période se déduit encore des formules de transformation qui relient sn(iu, K), cn(iu, K'), dn(iu, K) et sn(u, K'); vient ensuite naturellement le tableau des valeurs des trois fonctions pour les valeurs de l'argument comprises dans la formule

$$u + (0, 1, 2, 3)K + (0, 1, 2, 3)iK'.$$

Un autre tableau donne les valeurs de snnu, cnnu, dnnu, pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$; quelques considérations générales sur le problème de la multiplication trouvent ensuite leur place, entre autres, les expressions sous formes de produits de facteurs de snnu, cnnu, dnnu, expressions qui conduisent aux produits d'un nombre infini de facteurs par lesquels on peut représenter les fonctions elliptiques.

Le cinquième Chapitre, relatif aux intégrales de seconde et de troisième espèce, $Z(u)$ et $\Pi(u, a)$, débute par les formules qui donnent $Z(u+v)$, $\Pi(u+v, a)$. L'intégrale de troisième espèce est ensuite l'objet d'une étude particulière, dont le point de départ est la relation identique

$$\frac{d\varpi}{1+\rho\varpi^2} = \frac{d\varphi}{\Delta}\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{A}{1+n\sin^2\varphi} + \frac{A'}{1+n'\sin^2\varphi} + \frac{B}{1+m\sin^2\varphi}\right],$$

où $\varpi = \dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\zeta\sin^2\varphi)\Delta}$, et où les constantes ont les valeurs convenables; on en déduit, en intégrant, la relation fondamentale

$$A\Pi n + A'\Pi n' + B\Pi m + \frac{1}{\zeta}F = \int\frac{d\varpi}{1+\rho\varpi^2},$$

d'où se tire en particulier le théorème sur l'addition des paramètres. L'étude de l'interversion de l'argument et du paramètre termine le Chapitre.

Dans le Chapitre sixième, la fonction $\Theta(u)$ étant définie par l'égalité

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\, e^{\int_0^u Z(u)\,du},$$

on donne les expressions des intégrales $Z(u)$, $\Pi(u, a)$ au moyen de la fonction Θ, expressions qui deviennent le point de départ de l'étude des fonctions Θ, H.

Les deux Chapitres suivants sont relatifs à la théorie de la transformation, d'après Jacobi : la théorie générale est d'abord résumée ; les calculs sont ensuite développés pour les ordres 2, 3, 5, 7 de transformation ; le problème est étudié dans sa connexion avec celui de la multiplication. L'équation modulaire, l'équation différentielle qui relie le multiplicateur au module, celle qui relie le nouveau module et l'ancien trouvent là leur place naturelle.

Le neuvième Chapitre concerne les équations aux dérivées partielles données par Jacobi, auxquelles satisfont les fonctions Θ, H, ainsi que les numérateurs et les dénominateurs dans la multiplication et la transformation des fonctions elliptiques.

La transformation d'ordre impair n est ensuite traitée dans son rapport avec la division des périodes par n. — En particulier, la formule à laquelle on est ainsi amené, et qui donne $\operatorname{sn}(nu, k)$ sous forme d'un produit fini de fractions, conduit, en remplaçant u par $\frac{u}{n}$ et en faisant n infini, à l'expression de $\operatorname{sn}(u, k)$ sous la forme d'un produit infini ; de même pour cn et dn : l'identification des produits trouvés avec les quotients de fonctions Θ qui représentent les fonctions elliptiques conduit ensuite à l'expression des fonctions Θ, décomposées en un nombre infini de facteurs.

Les Chapitres XII, XIII et XIV concernent respectivement la réduction à la forme normale de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, la transformation du second degré pour les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, et la moyenne arithmético-géométrique. L'intégration directe de l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$, par le procédé d'intégration bien connu, consistant dans l'identification de cette équation différentielle avec celle qu'on obtient en différentiant l'équation

$$A + 2Bx + Cx^2 = A' + 2B'y + C'y^2 = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions du second degré de y, et A', B', C' les mêmes fonctions de x, est traitée avec des détails intéressants.

Le Chapitre XV se rapporte aux courbes dont l'arc s'exprime par une intégrale elliptique de première espèce, et le Chapitre XVI à

la réduction des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{P}},$$

où

$$P = x(1-x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)(1-\varkappa\lambda x).$$

Enfin le seizième et dernier Chapitre contient quelques détails intéressants relatifs à la transformation linéaire, à la transformation du second ordre, à la combinaison de deux transformations qui sont toutes deux linéaires ou l'une linéaire, l'autre du second ordre ou toutes deux du second ordre.

Il ne nous appartient en aucune façon de dire l'intérêt qui, particulièrement au point de vue de l'Algèbre, s'attache au Livre de M. Cayley. J. T.

HARNACK (Axel). — Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades (¹). — Zur Theorie der ternären cubischen Formen (²).

Dans le premier de ces deux Mémoires, M. Harnack fonde la Géométrie des courbes du troisième degré sur l'expression des coordonnées de leurs points en fonctions elliptiques d'un paramètre unique. Les éléments imaginaires d'une courbe sont représentés, d'après la méthode donnée pour la première fois par M. Klein (*Mathem. Annalen*, t. VII), par leurs *supports* (*Träger*) réels, en sorte que le domaine binaire de la courbe est remplacé par un domaine ternaire réel. De cette façon aussi, la valeur imaginaire de l'intégrale elliptique se trouve représentée par un élément réel du plan. *L'interprétation géométrique d'une relation linéaire quelconque entre deux valeurs du paramètre constitue l'essence des recherches de M. Harnack.* Elles embrassent la théorie des transformations algébriques uniformes et multiformes de la courbe en elle-même et parviennent à la solution d'un problème de Calcul intégral, lié

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX, 1875, p. 1.
(²) *Ibid.*, p. 318.

étroitement à la théorie des formes cubiques ternaires. L'étude algébrique de ce dernier problème est faite dans le second Mémoire, qui contient en même temps de nouvelles relations relatives à un système de formes cubiques ternaires.

La relation la plus simple entre deux valeurs du paramètre, relatives à deux points de la courbe, s'obtient en supposant qu'elles diffèrent d'une demi-période de l'intégrale elliptique : cette relation coïncide avec la propriété géométrique des *couples de points correspondants*. Elle donne un critérium qui permet de séparer les trois espèces de systèmes de rayons en involution, au moyen desquels on peut décrire une courbe du troisième ordre, et relie étroitement les trois espèces de *transformations quadratiques* d'une intégrale elliptique avec le passage des trois courbes tangentielles (courbes de Cayley) conjuguées à une courbe ponctuelle (courbe de Hesse) donnée.

En supposant que les deux arguments v et u relatifs à deux éléments de la courbe sont liés par la relation $v = \pm u + C$, où C est une constante arbitraire contenue dans le parallélogramme des périodes, on obtient tous les groupes de transformations algébriques uniformes de la courbe en elle-même, transformations qui se trouvent séparées en deux suites distinctes, selon que l'on choisit le signe $+$ ou le signe $-$. Par ces transformations uniformes, les éléments réels peuvent généralement être transformés en éléments imaginaires, dont les supports réels sont situés sur une courbe algébrique de sixième classe et de douzième ordre : inversement, un groupe de ces éléments imaginaires, dont les supports sont donnés par les tangentes à l'une de ces courbes, se change dans le système réel.

Les relations covariantes de ce faisceau de courbes de sixième classe avec la courbe fondamentale sont contenues dans les deux théorèmes suivants :

1° Parmi les six tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque de la courbe du troisième ordre à l'une quelconque de ces courbes, on peut toujours en trouver quatre, telles que leur rapport anharmonique soit le même pour tous les points de la courbe fondamentale.

2° Les trois courbes des faisceaux, tangentes à une droite quelconque du plan, y déterminent trois points, tels que chacun soit, par rapport aux deux autres, conjugué harmonique de l'un des trois points où la droite rencontre la courbe fondamentale.

La première proposition permet d'obtenir, au moyen d'une élimination, l'équation algébrique du faisceau de courbes; la deuxième conduit à l'équation différentielle de ce faisceau, sous la forme d'un connexe covariant par rapport à la courbe fondamentale : cette équation s'intègre au moyen d'une élimination algébrique.

La relation entre deux points d'une courbe du troisième ordre, dont les paramètres u et v satisfont à l'équation $v = \rho u + C$, ne conduit à des courbes algébriques que si ρ est un nombre commensurable. A chaque valeur de ρ correspond un faisceau de courbes dont six touchent une droite arbitraire du plan; ces groupes de six points constituent des formes covariantes par rapport aux trois points fondamentaux où la courbe du troisième ordre coupe la droite. Les équations différentielles de tous ces faisceaux de courbes sont par suite contenues comme *connexes* dans le système de formes ternaires cubiques.

On obtient l'équation de ces connexes, dont les *coïncidences principales* (*Hauptcoincidenzen*) sont ainsi intégrées, en formant l'équation cubique par laquelle sont représentées les valeurs fondamentales des différentielles elliptiques toujours finies aux points d'intersection d'une droite et de la courbe. Cette équation embrasse tous les théorèmes qui précèdent et peut être regardée comme fondamentale dans la représentation des courbes du troisième ordre au moyen d'un paramètre.

ЖУКОВСКІЙ (Н.-Е.). — Кинематика жидкаго тѣла. — Москва, 1876 (¹).

Ce Mémoire est précédé d'une étude consciencieuse et détaillée des nombreux travaux en rapport avec le sujet que l'auteur se propose de traiter. Il espère que le rapprochement de l'Hydrodynamique avec la Cinématique des systèmes variables permettra de réaliser dans la marche de l'Hydrodynamique des progrès considérables.

(¹) JOUKOVSKY (N.-E.), *Cinématique d'un corps liquide*; 1876, 155 p. grand in-8°. (Extrait du *Математическій Сборникъ*, t. VIII, fasc. 1 et 2.)

Tous les travaux relatifs à ce sujet peuvent être divisés, d'après l'auteur, en deux catégories : 1° dans les uns on étudie le mouvement des systèmes variables les plus simples ; 2° dans les autres on se borne à des considérations générales sur le mouvement d'un corps variable d'une manière continue : ces derniers, du reste, se trouvent, dans la plupart des cas, renfermés dans les Ouvrages relatifs à l'Hydrodynamique ou à la théorie de l'élasticité.

Voici un bref aperçu historique des travaux de ces deux catégories :

En 1830, M. Chasles [1] a découvert les principales propriétés des déplacements finis d'une figure semblable à elle-même, en démontrant l'existence d'un point et d'un plan fixes. En 1860 et 1861, parurent les travaux de Dirichlet [2] et de Brioschi [3] sur le mouvement d'un ellipsoïde liquide, dans lesquels on indique certaines propriétés d'une figure variable qui se déplace de manière que ses nouvelles coordonnées soient des fonctions linéaires des anciennes.

Depuis 1861 jusqu'en 1868, Schönemann [4], Petersen [5], Durrande [6], Wiener [7], Affolter [8] publièrent une série de Mémoires sur le mouvement d'une figure plane qui reste semblable à elle-même. En 1867, Thomson et Tait publient leur *Treatise on natural Philosophy* qui contient une étude circonstanciée des déplacements finis des corps homographiques ; ils appellent ainsi les figures variables, dont les nouvelles coordonnées sont des fonctions linéaires des anciennes. Dans le courant de la même année,

---

(1) Chasles, *Note sur les propriétés générales de deux corps semblables entre eux et placés d'une manière quelconque dans l'espace*, etc. (*Bulletin des Sciences mathématiques de Férussac*, année 1830).

(2) Dirichlet, *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik* (*Journal de Borchardt*, t. 58).

(3) Brioschi, *Développements relatifs aux recherches de Dirichlet* (*Journ. de Borchardt*, t. 59).

(4) Schönemann, *Ueber die Bewegung veränderlicher ebener Figuren*, etc. (*Programm des Gymnasiums zu Brandenburg für* 1861-1862).

(5) Petersen, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. V.

(6) Durrande, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VI.

(7) Wiener, *Sul moto di una figura piana che, mantenendosi simile a se stessa*, etc. (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. I).

(8) Affolter, *Grunert's Archiv der Mathematik*, 55. Theil.

Picart (¹), en prenant pour point de départ les idées générales sur les systèmes homographiques, est parvenu à établir les propriétés connues du mouvement d'un système invariable. En 1871 et 1872, Durrande (²) a présenté à l'Académie de Paris trois études approfondies sur les vitesses et les accélérations d'un système homographique. Enfin, en 1873 et 1874, paraissent les travaux de Liguine (³) et de Burmester (⁴) sur le déplacement d'une figure plane collinéairement variable. En partant des notions générales sur ces figures, Liguine arrive aux figures semblables; Burmester suit une méthode inverse et des figures semblables passe aux figures homographiques et collinéaires.

Les travaux de la deuxième catégorie ont commencé à paraître simultanément avec ceux de la première. Depuis 1827 jusqu'en 1841, Cauchy (⁵) a inséré dans ses *Exercices* une série d'études sur la condensation, la dilatation et la rotation d'un point matériel d'un corps variable. En 1858, Helmholtz (⁶) publia son Mémoire *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen*, dans lequel les idées de Cauchy sur la rotation d'un point matériel furent largement appliquées et développées en une théorie nouvelle, celle des tourbillons.

Cette théorie a servi de base à de nouveaux travaux parus en 1861, 1862, 1867 et 1868, dont les auteurs sont Hankel (⁷),

---

(¹) Picart, *Nouvelle théorie de déplacement continu d'un corps solide.* (*Nouv. Ann. de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. VI).

(²) Durrande, (*a*) *Extrait d'une théorie de déplacement d'une figure qui se déforme* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIII). — (*b*) *Propriétés générales d'une figure qui se déforme.* (*Ibid.*, t. LXXIV). — (*c*) *De l'accélération dans le déplacement d'un système de points qui reste homographique à lui-même.* (*Ibid.*, t. LXXV).

(³) Liguine, *Nouv. Ann. de Mathématiques*, 1873.

(⁴) Burmester, *Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung affinveränderlicher ebener Systeme.* (*Zeitschrift von Schlömilch*, 19. J., 6. Heft).

(⁵) Cauchy, (*a*) *Sur la condensation et la dilatation des corps solides.* (*Exercices de Mathématiques*, 2ᵉ année). — (*b*) *Sur quelques théorèmes relatifs à la condensation ou à la dilatation des corps solides.* (*Ibid.*, 3ᵉ année). — (*c*) *Sur les corps solides ou fluides dans lesquels la condensation ou la dilatation linéaire est la même en tout sens autour de chaque point.* (*Ibid.*, 4ᵉ année). — (*d*) *Mémoire sur les dilatations, les condensations et les rotations produites par un changement de forme dans un système de points matériels.* (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II).

(⁶) Helmholtz, *Journal de Borchardt*, t. 55.

(⁷) Hankel, *Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten.* Göttingen, 1861.

Roch (¹), Lipschitz (²), Thomson (³). Tous ces ouvrages complètent et développent les considérations analytiques dont Helmholtz s'était servi pour l'établissement de ses théorèmes de Cinématique. En 1868, Bertrand (⁴) a découvert, pour le cas d'un point matériel, le théorème des plans de direction constante, trouvé déjà, un an auparavant, par Thomson et Tait pour le cas d'un système homographique. La polémique connue entre Bertrand et Helmholtz, provoquée par quelques remarques insérées dans le Mémoire cité, a considérablement contribué à l'éclaircissement du problème de la rotation d'un point matériel. En 1870, à propos d'un problème d'Hydrodynamique, résolu par Kirchhoff, Boltzmann (⁵) publia un Mémoire dont le commencement contient une étude du mouvement sans rotation, qui serait possible dans un liquide incompressible remplissant un espace multiplement connexe. En 1871, parut le bel ouvrage de Beltrami (⁶) *Dell' Idrodinamica razionale*, dont les deux premiers Chapitres sont consacrés à la cinématique des liquides, exposée par une méthode rigoureusement analytique. Enfin la *Physique* de Kirchhoff (⁷), parue en 1874, renferme plusieurs considérations intéressantes sur le mouvement des liquides, sans compression et sans rotation. L'auteur trouve que l'Ouvrage de Beltrami ne laisse rien à désirer au point de vue de l'élaboration du sujet et de la profondeur des idées; il regrette seulement que le savant italien n'ait pas inséré dans la Cinématique le Chapitre sur les accélérations, dont l'étude géométrique peut, d'après l'auteur, éclaircir le mieux les difficiles problèmes de l'Hydrodynamique.

Dans son Mémoire, M. Joukovsky se propose de donner un

(¹) Roch, *Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molekular-physikalischen Fernewirkungen.* (*Journ. de Borchardt*, t. 61).

(²) Lipschitz, *Beitrag zur Theorie der linearen partialen Differentialgleichungen.* (*Ibid.*, t. 69).

(³) Thomson, *On vortex motion.* (*Trans. de la Société d'Édimbourg*, t. XXV).

(⁴) Bertrand, *Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluide.* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI.)

(⁵) Boltzmann, *Ueber die Druckkräfte, welche auf Ringe wirksam sind, die in bewegte Flüssigkeit tauchen.* (*Journal de Borchardt*, t. 78.)

(⁶) Beltrami, *Dell' Idrodinamica razionale.* (*Memorie della Accademia di Bologna*, 3ᵉ série, t. I et II).

(⁷) Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik.* Leipzig, 1874.

aperçu de la théorie des vitesses et des accélérations d'un système variable, pouvant servir d'introduction à l'Hydrodynamique; de sorte que son travail offre des matériaux pour la théorie générale de la Cinématique d'un corps continu. Il est divisé en quatre Chapitres :

Dans le Chapitre I, l'auteur examine le mouvement d'un point matériel liquide, en s'appuyant sur les travaux de Cauchy, de Helmholtz, de Bertrand, de Beltrami et de Durrande. L'exposition du sujet est particulièrement remarquable, parce qu'on étudie d'abord le mouvement d'un point sans rotation et l'on examine ensuite la modification du mouvement dès que la rotation du point a lieu.

Le Chapitre II contient la théorie d'un filet infiniment mince, coïncidant avec les travaux de Kummer et de Mannheim sur les faisceaux de rayons infiniment minces; l'exposition des propriétés fondamentales des surfaces de tourbillon, et l'étude du mouvement d'un liquide incompressible dont les éléments ne sont animés d'aucun mouvement de rotation. L'auteur profite ici des travaux de Kleitz (¹), de Thomson et de Haton de la Goupillière (²). Il donne en outre plusieurs démonstrations géométriques de théorèmes sur les lignes isothermes, trouvés par Haton de la Goupillière à l'aide de la théorie des quantités complexes.

Le Chapitre III, ayant pour titre *Décomposition de l'écoulement des liquides*, contient une exposition succincte des travaux de Helmholtz, de Roch, de Lipschitz, de Boltzmann et de Beltrami, relatifs au problème de la détermination des vitesses à l'intérieur d'une masse liquide, lorsqu'on connaît les vitesses à la surface, et les coefficients de la dilatation cubique et de la rotation des points à l'intérieur. L'auteur essaye ici de remplacer les analogies magnétiques et électriques par des représentations cinématiques à l'aide de deux types de mouvement, qu'il désigne sous les noms de *mouvements de tourbillon* et *d'écoulement*.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude des accélérations. Après avoir examiné certaines propriétés des accélérations des points

(¹) Kleitz, *Étude sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement, et application à l'Hydrodynamique*. Paris, 1873.

(²) Haton de la Goupillière, *Mémoire sur la théorie du potentiel cylindrique*.

liquides, indiquées par Helmholtz, Thomson et Lipschitz, l'auteur applique à leur détermination les principes exposés dans le troisième Chapitre. Cette application, indiquée, d'après l'auteur, par Lipschitz, Bobylef et Preobrajensky, conduit au résultat suivant : « Si les accélérations complètes des points d'un liquide admettent une fonction potentielle, et si l'on connaît les vitesses dans toute la masse et les valeurs de cette fonction pour les surfaces libres, les accélérations dans l'intérieur du liquide sont complétement déterminées. »

Le quatrième Chapitre se termine par une étude du mouvement permanent d'un liquide incompressible, dans l'hypothèse de l'existence de la fonction de forces. Comme cette étude contient principalement la partie originale du travail que nous analysons, nous allons en exposer brièvement les principaux résultats.

Voici les notations employées par l'auteur :

(s_1) famille de trajectoires d'un mouvement permanent;

(s_2), (s_3) deux familles de lignes tracées sur les surfaces de trajectoires, orthogonalement à (s); on admet en outre qu'au point considéré les lignes s_2 et s_3 sont mutuellement perpendiculaires;

$\frac{1}{R_p^q}$ projection de la mesure de courbure de la ligne s_p sur la tangente à la ligne s_q;

$\frac{1}{h_p^q}$ mesure de la torsion géodésique de la ligne s_p sur la surface (s_p, s_q);

$\frac{1}{k}$ et $\frac{2\pi}{H}$ deux quantités, dont la première mesure l'élargissement du filet, et la dernière sa détorsion; ces quantités sont déterminées par les formules

$$\frac{4}{k} = -\left(\frac{1}{R_2^1} + \frac{1}{R_3^1}\right), \quad \frac{4\pi}{H} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_1^3},$$

où s_2 et s_3 sont supposées mutuellement perpendiculaires;

v vitesse d'un point liquide;

p, q, r vitesses angulaires de la rotation d'un point liquide autour

de la tangente à s_1 et des normales aux surfaces $(s_1 s_3)$ et $(s_1 s_2)$;

g accélération d'un point liquide;

g_1, g_2, g_3 projections de g sur les tangentes à s_1, s_2, s_3;

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ valeurs particulières de p, q, r dans le cas où les projections des vitesses sur les tangentes à s_1, s_2, s_3 seraient respectivement

$$-\frac{1}{k}, \quad \frac{1}{R_1^2}, \quad \frac{1}{R_1^3};$$

d_1, d_2, d_3 signes de différentiation dans le déplacement suivant les arcs ds_1, ds_2, ds_3.

L'étude géométrique du problème du mouvement permanent d'un liquide incompressible conduit facilement aux formules suivantes (1) et (2) :

$$(1) \qquad \frac{d_1 v}{ds_1} = -\frac{v}{k}, \quad \frac{d_2 v}{ds_2} = \frac{v}{R_1^2} - 2r, \quad \frac{d_3 v}{ds_3} = \frac{v}{R_1^3} + 2q,$$

$$(2) \qquad g_1 = -\frac{v^2}{k}, \quad g_2 = \frac{v^2}{R_1^2}, \quad g_3 = \frac{v^2}{R_1^3}.$$

Dans l'hypothèse où g admet une fonction potentielle, on tire des équations (2) trois conditions, qui, par suite de la position mutuellement orthogonale des éléments ds_1, ds_2, ds_3, peuvent se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} \Omega_1 + \dfrac{1}{R_1^3}\dfrac{d_2 \log v}{ds_2} - \dfrac{1}{R_1^2}\dfrac{d_3 \log v}{ds_3} = 0, \\ \Omega_2 - \dfrac{1}{k}\dfrac{d_3 \log v}{ds_3} - \dfrac{1}{R_1^3}\dfrac{d_1 \log v}{ds_1} = 0, \\ \Omega_3 + \dfrac{1}{R_1^3}\dfrac{d_1 \log v}{ds_1} - \dfrac{1}{k}\dfrac{d_2 \log v}{ds_2} = 0. \end{cases}$$

En combinant les équations (3) et (1), on obtient les équations

$$(4) \qquad \frac{\Omega_1}{k} + \frac{\Omega_2}{R_2^1} + \frac{\Omega_3}{R_3^1} = 0,$$

et

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d_1 \log \nu}{ds_1} &= -\frac{1}{k}, \\ \frac{d_2 \log \nu}{ds} &= \frac{1}{R_1^2} - \Omega_3 : \frac{1}{k}, \\ \frac{d_3 \log \nu}{ds_3} &= \frac{1}{R_1^3} + \Omega_3 : \frac{1}{k}. \end{aligned}\right.$$

L'équation (4) est indépendante de ν, elle limite donc le choix de la famille s. En outre, les conditions d'intégrabilité des équations (5) conduisent aux trois nouvelles conditions limitant s. L'auteur donne à ces conditions la signification cinématique suivante : lorsqu'un liquide se meut de façon que les projections des vitesses sur les tangentes à s_1, s_2, s_3 soient respectivement

$$-\frac{1}{k}, \quad \frac{1}{R_1^2} - \Omega_3 : \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{R_1^3} + \Omega_2 : \frac{1}{k},$$

les molécules de ce liquide ne sont animées d'aucun mouvement de rotation.

Étant donnée une famille s, satisfaisant aux conditions énoncées, la valeur de ν sera déterminée par l'intégrale de la différentielle complète

$$(6)\quad d \log \nu = -\frac{1}{k} ds_1 + \left(\frac{1}{R_1^2} - \Omega_3 : \frac{1}{k}\right) ds_2 + \left(\frac{1}{R_1^3} + \Omega_2 : \frac{1}{k}\right) ds_3,$$

où ds_1, ds_2, ds_3 doivent être exprimés en fonctions des coordonnées du point.

Quant aux valeurs de p, q, r, on peut les déterminer directement en fonction de ν d'après les formules

$$(7)\quad p = \frac{2\pi}{H}\nu, \quad q = \frac{\Omega_2 \nu}{2} : \frac{1}{k}, \quad r = \frac{\Omega_3 \nu}{2} : \frac{1}{k}.$$

Dans le cas particulier où l'on a une famille de surfaces

$$\rho = \text{const.}$$

orthogonales à (s), on obtient

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{2\pi}{H} = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \dfrac{h}{2}\dfrac{d_3}{ds_3}\left(\dfrac{\Delta_2\rho}{h^2}\right), \\ \Omega_3 = \dfrac{h}{2}\dfrac{d_2}{ds_2}\left(\dfrac{\Delta_2\rho}{h^2}\right) \end{cases}$$

où h et $\Delta_2\rho$ sont le premier et le second paramètre de la fonction ρ.

On distingue dans l'hypothèse ci-dessus deux cas :

1° Si $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$, surfaces isothermes orthogonales. Le mouvement permanent a lieu sans rotation de molécules.

2° Si Ω_2 et Ω_3 sont différents de zéro, les points liquides sont animés de mouvements de rotation autour de certaines lignes de tourbillon (6), lesquelles, d'après les formules (7), (8) et (4), sont perpendiculaires aux plans osculateurs de lignes (s). En vertu du théorème de Helmholtz relatif aux tourbillons, les lignes (6) sont situées sur les surfaces des trajectoires dont les lignes s sont, d'après ce qui a été dit plus haut, des courbes géodésiques. Ensuite, d'après les formules (5) et (8), on peut conclure que les valeurs de

$$v \quad \text{et} \quad \frac{\Delta_1 s}{h^2}$$

sont constantes pour chacune des lignes σ.

Il reste à remarquer que l'auteur exclut le cas où $\frac{1}{k} = 0$.

N. Bougaïef.

D'OVIDIO (Enrico). — Le proprietà fondamentali delle curve di second'ordine, studiate sulla equazione generale di secondo grado in coordinate cartesiane. Lezioni date nella Regia Università di Torino. — Roma-Torino-Firenze, E. Loescher, 1876. 1 vol. in-8°, 144 p.

L'auteur, en rédigeant ce travail, a eu pour but de montrer comment les méthodes classiques fondées sur l'emploi des coordonnées cartésiennes peuvent se prêter à l'introduction des procédés de

l'Analyse moderne, et d'initier ainsi de bonne heure les élèves à la pratique des méthodes de la nouvelle Géométrie analytique. La discussion générale de l'équation du second degré entre deux variables est faite avec plus de symétrie qu'on n'en met ordinairement; M. d'Ovidio a pris à tâche d'y faire pénétrer systématiquement la notion des invariants, sans sortir du programme d'un cours élémentaire et du système cartésien; il a donné aussi quelques indications sur les coordonnées tangentielles.

Deux droites, formant avec les deux tangentes (réelles ou imaginaires) issues de leur point de concours un faisceau harmonique, sont dites *conjuguées* par rapport à la courbe du second degré. Par un point quelconque on peut mener, en général, un couple et un seul de droites conjuguées rectangulaires. Il existe quatre points du plan par chacun desquels on peut mener une infinité de ces couples : ce sont les *foyers* de la courbe. De cette définition l'auteur tire facilement la détermination et les propriétés des foyers, sans être obligé de particulariser la forme de l'équation.

L'Ouvrage se termine par la réduction de l'équation du second degré à des formes plus simples, et par un recueil d'exercices sur les diverses parties de la théorie.

On voit, par ces courtes indications, que l'étude de ce mince volume est une excellente préparation à la lecture des Traités développés, comme ceux de Salmon, et nous souhaitons que M. d'Ovidio y donne bientôt une suite, relative aux surfaces de second degré.

SAINT-GERMAIN (A. DE), professeur à la Faculté des Sciences de Caen, ancien maître de conférences à l'École des Hautes Études de Paris. — RECUEIL D'EXERCICES SUR LA MÉCANIQUE RATIONNELLE. — Paris, Gauthier-Villars, 1876; 1 vol. in-8°, VIII-456 p.

L'auteur s'est proposé de choisir et de développer les questions qu'il traite dans cet Ouvrage, de manière à le rendre spécialement utile aux personnes qui, possédant les éléments de l'Analyse infinitésimale, veulent faire une étude sérieuse de la Mécanique rationnelle. On a pensé qu'en présentant sur un même sujet un trop grand nombre de problèmes résolus on ne ferait qu'embarrasser le

choix de l'étudiant et fatiguer son attention; on a préféré développer avec soin un plus petit nombre d'applications, pourvu qu'elles fussent assez importantes et assez variées pour aider à comprendre toutes les parties de la théorie à laquelle elles se rapportent et en montrer toute la portée. On a écarté les questions tout à fait élémentaires, aussi bien que celles qui sont trop difficiles et trop compliquées pour être de simples exercices; aussi a-t-on pu, dans un volume relativement peu étendu, consacrer un Chapitre à toutes les théories enseignées dans les cours ordinaires de Mécanique rationnelle, et l'auteur ose-t-il espérer que l'étudiant aura quelque profit à lire la plus grande partie de son Livre. D'autre part, on sait que le premier objet de celui qui veut résoudre un problème de Mécanique est de le ramener à une question d'Analyse ou, plus rarement, de Géométrie; toutefois, si le philosophe peut estimer qu'on a fait un grand pas en réduisant une question de science appliquée à une question de Mathématiques pures, ce résultat est loin de satisfaire l'esprit de celui qui s'est posé le problème. Il faut chercher à résoudre les équations obtenues, ou à les intégrer quand elles renferment des dérivées, pour se faire une idée le plus précise possible sur la valeur des inconnues du problème, sur la nature du mouvement qu'on y considère, sur la forme des courbes et des surfaces qui s'y rapportent. Les problèmes qui conduiraient à des équations trop compliquées pour qu'on y pût démêler des résultats ayant une signification mécanique ne sauraient être regardés comme résolus, et l'auteur les a proscrits de son livre; il a toujours cherché à résoudre ou à intégrer les équations qu'il obtient, et à en discuter les résultats aussi complétement que possible. Cette préoccupation, tout en rendant les solutions plus complètes au point de vue de la Mécanique, a encore l'avantage de fournir d'utiles exercices d'Analyse. Quand on arrive à des équations qu'on ne sait pas résoudre rigoureusement, à des éliminations ou à des quadratures inexécutables, on ne doit pas toujours désespérer d'obtenir des résultats nets et intéressants au point de vue de la Mécanique; de nombreux exemples mettent en évidence cette importante vérité. Ainsi il est rare qu'on puisse avantageusement résoudre les équations de degré supérieur au deuxième; mais si l'on a bien séparé les racines, si l'on a déterminé les conditions auxquelles elles sont admissibles, ne peut-on regarder ces résultats comme aussi satisfaisants que si l'on

avait les valeurs explicites des inconnues, compliquées de radicaux et de transcendantes ? Une équation différentielle où les variables sont séparées peut très-bien faire connaître la loi d'un mouvement, et souvent on n'a pas à regretter de ne pouvoir effectuer l'intégration : qu'on ait, par exemple, entre le temps et la distance d'un mobile à un point fixe une relation de la forme

$$dt = x^m dx \sqrt{(x-a)(b-x)},$$

cette équation n'indique-t-elle pas un mouvement oscillatoire avec plus de clarté que son intégrale ? Enfin on trouvera plusieurs courbes dont la forme est indiquée avec précision, bien qu'on n'ait pas leur équation explicite, mais seulement la valeur des coordonnées d'un quelconque de leurs points en fonction d'un paramètre variable, qu'on s'est gardé d'éliminer, même dans les cas où l'on aurait pu le faire.

Au début de chaque Chapitre sont rappelés très-succinctement les résultats de la théorie sur lesquels on doit s'appuyer pour en faire les applications. Un petit nombre de questions de cours ont été développées quand l'auteur a cru devoir recommander pour elles un certain mode d'exposition, soit qu'il lui fût personnel, soit qu'il ne lui parût pas aussi généralement répandu qu'il mérite de l'être. Une série d'exercices proposés à la fin des Chapitres et quelques résultats énoncés sans démonstration dans les problèmes résolus fourniront au lecteur des matières suffisantes de travail, outre qu'il pourra s'exercer à résoudre lui-même les questions traitées dans l'Ouvrage.

Il n'y a pas lieu, pour un livre de problèmes, de s'inquiéter si l'étude de l'équilibre doit ou non précéder celle du mouvement, et c'est pour suivre l'ordre le plus anciennement adopté qu'on a commencé par la Statique. Il est difficile de séparer les applications qui se rapportent soit à la Cinématique, soit à la Dynamique ; on a cependant essayé de donner une série assez importante et presque complétement nouvelle de problèmes relatifs à la Cinématique, qui souvent est enseignée à part ; enfin on a relégué dans un dernier Chapitre les équations générales de la Mécanique : l'équation des vitesses virtuelles, le principe de d'Alembert, les équations de Lagrange et les équations canoniques ; ces théories sont très-remar-

quables par leur généralité, mais elles fournissent des solutions moins directes que les méthodes proprement dites de la Mécanique, et sont un peu, par rapport à cette science, ce que fut la méthode de Descartes par rapport à la Géométrie : au reste, on a généralement suivi l'ordre du cours professé à la Faculté de Paris par M. Darboux. On a laissé de côté l'Hydraulique, parce qu'elle ne fait pas véritablement partie de la Mécanique rationnelle, parce qu'on lui emprunte bien rarement des sujets de composition dans les examens de l'Université française, et surtout parce qu'on ne voulait pas trop augmenter l'étendue de l'Ouvrage.

Six Chapitres sont consacrés à la Statique : le premier, relatif à l'équilibre d'un point, comprend plusieurs problèmes nouveaux qu'on a essayé de ne pas donner trop simples pour le lecteur auquel ils s'adressent. Dans le Chapitre II (composition des forces parallèles), on indique, entre autres choses, quelques applications de la Statique à la démonstration de théorèmes de Géométrie, et l'on calcule, dans une certaine hypothèse, les charges éprouvées par plusieurs appuis qui supportent une table pesante. Le Chapitre III est consacré à la recherche des centres de gravité dans des cas très-variés. Le Chapitre IV (composition des forces quelconques appliquées à un solide) renferme des théorèmes généraux sur cette question, et des exercices sur l'équilibre d'un ou plusieurs corps, avec ou sans frottement. Dans le Chapitre V (équilibre des fils), signalons un problème relatif aux ponts suspendus, où une application numérique indique la valeur des constantes introduites par l'intégration. Au Chapitre VI, on a calculé directement l'attraction de plusieurs solides; on a essayé d'établir rigoureusement et d'appliquer les propriétés fondamentales du potentiel; mais il était impossible d'aborder les théories si remarquables dont l'étude de cette fonction a enrichi la Physique mathématique.

Trois Chapitres seulement sont consacrés à la Cinématique : le Chapitre VII roule sur les propriétés du mouvement d'un point dont la trajectoire est donnée, la recherche des tangentes et des rayons de courbure, les accélérations des divers ordres, et la méthode de Roberval généralisée. Le Chapitre VIII (mouvement d'une figure dans un plan) contient des exercices sur les roulettes et, en particulier, sur celles qui résultent du roulement d'une ellipse sur une droite. Le Chapitre IX rappelle les propriétés fondamentales

du mouvement des solides, et renferme un petit nombre de problèmes; mais, pour ne pas sortir du plan de l'Ouvrage et pour éviter de trop longs développements, on a dû sacrifier les intéressants théorèmes établis par MM. Chasles et Mannheim.

Les problèmes sur la Dynamique forment sept Chapitres. Dans le Chapitre X, on considère le mouvement d'un point libre, auquel peut se rattacher le mouvement d'un corps pesant sur un plan incliné dépoli; on y donne le théorème de M. Bertrand sur la force la plus générale qui peut produire un mouvement toujours périodique. Le Chapitre XI se rapporte au déplacement d'un point sur une courbe polie ou dépolie; on y apprend à déterminer la brachistochrone dans un cas très-étendu et sans le secours du calcul des variations; puis vient le mouvement d'un point sur une surface : étude complète du mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde, lignes géodésiques sur l'ellipsoïde, etc. Le Chapitre XIII traite du mouvement relatif, au point de vue cinématique et dynamique; on y trouve une démonstration remarquable du théorème de Coriolis. Le Chapitre XIV, le plus considérable du Livre, contient sur le mouvement des systèmes matériels une série de problèmes dont la solution est fournie par les principes généraux de la Dynamique : principe des forces vives, théorèmes sur le mouvement du centre de gravité, équation des aires. Le Chapitre XV commence par la recherche des moments d'inertie; on y donne ensuite des exemples du mouvement d'un solide qui a un axe fixe, un point fixe, ou enfin qui est parfaitement libre; signalons une démonstration des équations d'Euler et de M. Resal, un problème sur le mouvement d'un anneau, et quelques questions relatives aux forces instantanées. Dans le XVIe et dernier Chapitre, on applique à un petit nombre d'exemples le théorème des vitesses virtuelles, le principe de d'Alembert, les équations de Lagrange, qui sont établies par une méthode simple; on a dû s'étendre très-peu sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations canoniques; mais l'auteur espère avoir donné sur ce point des renseignements dont lui sauront gré ceux qui doivent aborder ces théories difficiles.

TISSERAND (F.) — Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal. — Paris, Gauthier-Villars; 1877. 1 vol. in-8°, 388 p.

Ce sont les conférences qu'il a faites pendant plusieurs années à l'École des Hautes Études de Paris qui ont donné à M. Tisserand l'occasion de réunir la collection d'exercices qu'il donne aujourd'hui au public; son livre s'ajoute ainsi à celui, d'origine semblable, qu'a publié M. A. de Saint-Germain sur la Mécanique rationnelle.

M. Tisserand donne son *Recueil* comme faisant suite à celui de M. Frenet, dont M. Gauthier-Villars a donné récemment une troisième édition : dans ces matières, l'abondance ne nuirait pas; mais, à coup sûr, les deux livres ne font pas double emploi : aucun exercice ne leur est commun, et le nouveau *Recueil* s'adresse à des lecteurs plus avancés dans l'étude des Sciences mathématiques.

Les problèmes y sont suivis de leurs solutions; l'élégance et les rigueurs de ces solutions, le soin avec lequel les discussions sont développées et achevées feraient regretter qu'il en fût autrement. L'auteur a en outre indiqué un certain nombre d'applications dont les lecteurs studieux feront leur profit.

L'Ouvrage est divisé en trois Parties relatives au *Calcul différentiel*, au *Calcul intégral*, à l'*Application du Calcul intégral à la solution de questions diverses concernant les courbes et les surfaces*.

La première Partie (de la page 1 à la page 126) contient 55 problèmes, sans compter les applications. Les problèmes numérotés de 1 à 9 concernent l'étude de la variation des fonctions et la séparation des racines de diverses équations transcendantes ; notons en passant la recherche du nombre de racines imaginaires de l'équation $\tang z = hz$, d'après Cauchy (1[er] volume des anciens *Exercices de Mathématiques*). Les problèmes 10 à 19 sont relatifs aux dérivées $n^{\text{ièmes}}$; puis viennent quelques exercices sur les dérivées des fonctions de plusieurs variables, sur l'application de la formule de Maclaurin, sur les maxima et minima des fonctions de plusieurs variables (20-31), sur des lieux relatifs au contact des divers ordres (32-37), sur les développées, les enveloppes, les caustiques (38-46), sur l'hélice (48-51), sur les rayons de courbure principaux

de l'ellipsoïde (52-53); la démonstration de cette proposition : *Toute surface développable qui admet une seule ligne de courbure plane est un hélicoïde développable,* et la recherche des trajectoires des génératrices rectilignes d'un hélicoïde développable terminent cette première Partie.

Les problèmes 1 à 9 de la deuxième Partie concernent les intégrales définies et la recherche des valeurs moyennes de certaines fonctions : on remarquera en particulier les égalités

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{U}_m\,\mathrm{U}_n\,dx = 0\ (m \gtrless n),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{U}_n^2\,dx = 2.4.6\ldots 2n.\sqrt{\pi},$$

relatives aux polynômes U_m, U_n définis par les égalités

$$\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = e^{-x^2}\mathrm{U}_m, \quad \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = e^{-x^2}\,\mathrm{U}_n,$$

et la détermination de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}\,dx,$$

telle que M. Hermite l'a donnée dans le *Bulletin*, t. I, p. 322.

Les problèmes 10 à 18 concernent les déterminations de longueurs d'arcs, d'aires de courbes et de surfaces, de certaines intégrales, entre autres de l'intégrale $\int \frac{d\mathrm{S}}{\mathrm{P}}$ étendue à tous les points de la surface d'un ellipsoïde, $d\mathrm{S}$ désignant l'élément de surface et P la distance du plan tangent à cet élément du centre. Notons ensuite la question suivante : a, b, a', b' désignant des nombres commensurables, dans quels cas l'intégrale générale de l'équation

$$(ax + by)\,dx + (a'x + b'y)\,dy = 0$$

est-elle algébrique ? Les questions 20 à 30 sont relatives aux équations différentielles à une seule variable indépendante et par-

ticulièrement aux équations linéaires ; l'auteur s'occupe ensuite de la détermination de fonctions d'après certaines conditions (31-33) : par exemple, trouver les fonctions les plus générales f et φ telles que, quels que soient x et y, on ait

$$(x^2 - y^2)[f(x+y) + \varphi(x-y)] = F(x) - \Phi(y),$$

F et Φ désignant de nouvelles fonctions qu'il faudra déterminer, question inspirée par la solution donnée par Jacobi du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes suivant la loi de Newton. Enfin quelques exercices sur les équations aux dérivées partielles (34-41) terminent cette seconde Partie.

Les problèmes 1 à 19 de la troisième Partie conduisent presque tous à des équations différentielles ordinaires entre deux variables ; dans les énoncés figurent les rayons de courbure, les angles que les normales ou les tangentes font avec certaines directions, ou les segments qu'elles déterminent sur certaines droites, etc., les derniers concernant la recherche des trajectoires ; puis viennent quelques exercices sur les roulettes (10-24), sur les courbes présentant certaines relations avec leurs développées (25-29) ; notons en particulier la recherche des courbes égales à leurs développées, et le problème suivant : « Trouver une courbe telle qu'un point quelconque de cette courbe, le centre de courbure de la développée ou de la développée seconde, le centre de courbure de la quatrième développée, etc., soient en ligne droite. » Les problèmes (31-34) concernent la recherche d'une courbe d'après certaines relations avec les coniques qui ont avec elle, en chacun de ces points, un contact du quatrième ordre. On trouvera ensuite (35-47) une série de questions relatives aux courbes rapportées en coordonnées polaires. Les problèmes 48 à 59 concernent les courbes dans l'espace et les surfaces, les lignes de courbure, les lignes géodésiques, asymptotiques, les trajectoires. Les exercices (62-70), qui terminent le livre de M. Tisserand, seront particulièrement remarqués : ils conduisent en général à des équations aux dérivées partielles, et touchent à la théorie des surfaces orthogonales ; il convient de les citer tous.

« Montrer que la famille des surfaces $\alpha = \frac{xy}{z}$ fait partie d'un système triple orthogonal, et trouver les deux autres familles du sys-

tème; même question :

$$\text{pour les sphères } \alpha = \frac{x^2+y^2+z^2}{x},$$

$$\text{pour les cônes } \alpha = \frac{xy}{z^2},$$

$$\text{pour les surfaces } \alpha = xyz. \text{ »}$$

« Déterminer les fonctions $X = f(x)$, $Y = \varphi(y)$, $Z = \psi(z)$, de façon que le système de surfaces

$$\frac{X}{\rho-a}+\frac{Y}{\rho-b}+\frac{Z}{\rho-c}=1,$$

$$\frac{X}{\mu-a}+\frac{Y}{\mu-b}+\frac{Z}{\mu-c}=1,$$

$$\frac{X}{\nu-a}+\frac{Y}{\nu-b}+\frac{Z}{\nu-c}=1$$

soit orthogonal. »

« Déterminer la fonction U de x, y, z, de façon que le système

$$\frac{x^2}{\rho-a}+\frac{y^2}{\rho-b}+\frac{z^2}{\rho-c}=U,$$

$$\frac{x^2}{\mu-a}+\frac{y^2}{\mu-b}+\frac{z^2}{\mu-c}=U,$$

$$\frac{x^2}{\nu-a}+\frac{y^2}{\nu-b}+\frac{z^2}{\nu-c}=U$$

soit orthogonal. »

« Déterminer les fonctions φ, ψ de façon que la famille de surfaces représentée par l'équation $\alpha = \varphi(z)\,\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ fasse partie d'un système orthogonal; trouver deux autres familles du système. »

J. T.

SALMON (George). — LESSONS INTRODUCTORY TO THE MODERN HIGHER ALGEBRA. 3e édition. — Dublin, 1876. 1 vol. in-8°, 318 p.

Nous devons signaler la troisième édition des *Leçons d'Algèbre supérieure*, de M. Salmon, ouvrage dont les éditions antérieures sont devenues classiques et que l'éminent géomètre anglais n'a pas négligé de mettre en rapport avec les progrès récents de la Science.

LETTRES INÉDITES DE JOSEPH-LOUIS LAGRANGE A LÉONARD EULER, tirées des Archives de la Salle des conférences de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, et publiées par B. BONCOMPAGNI. — Saint-Pétersbourg. Expédition pour la confection des papiers de l'État. Atelier héliographique dirigé par G. Scamoni. MDCCCLXXVII. — 52 p. in-4.

Ce Recueil contient la reproduction photohéliographique de onze Lettres de Lagrange à Euler. Dans la première de ces Lettres, Lagrange parle de la formule de Leibnitz, à peu près dans les mêmes termes que dans la célèbre Lettre à Fagnano, postérieure de quelques jours. La seconde Lettre est très-importante pour l'histoire du Calcul des variations. La dernière est datée de Turin, le 14 juin 1762. Cette publication est un nouveau service dont l'histoire des sciences est redevable aux soins éclairés de M. le prince Boncompagni, et dont les géomètres lui seront vivement reconnaissants.

MÉLANGES.

ADDRESS BY PROFESSOR ADAMS, PRESIDENT OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY, DELIVERED AT THE ANNUAL GENERAL MEETING, FEBRUARY 1876, ON PRESENTING THE GOLD MEDAL OF THE SOCIETY TO M. LE VERRIER.

La Société Royale Astronomique de Londres, dans sa séance annuelle de 1876, a récompensé par la médaille d'honneur les beaux travaux de M. Le Verrier sur les grandes planètes supérieures, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. M. Adams, dont le nom a

figuré glorieusement dans l'histoire de la grande découverte incontestablement due à notre illustre compatriote, s'est trouvé chargé, comme président, d'exprimer à son heureux émule l'admiration et la reconnaissance des astronomes de tous pays. Le discours de M. Adams est un résumé savant et complet; l'abondance des détails y soutient les vues d'ensemble pour en accroître la précision et la clarté. Nous sommes heureux d'en reproduire ici les principaux traits; on y trouve, en même temps qu'une excellente analyse, l'expression sincère et motivée d'une admiration sympathique et reconnaissante pour le plus grand service qui, depuis bien des années et dans toute l'Europe, ait été rendu à l'Astronomie.

En 1868, déjà, la Société avait donné la médaille d'or aux travaux de M. Le Verrier sur Mercure, Vénus, la Terre et Mars, et un Rapport motivé de M. Pritchard lui avait présenté le tableau des progrès apportés par notre compatriote dans la théorie de cette première moitié de notre système. Parmi les résultats universellement acceptés de ce premier travail, il faut citer la nécessité d'accroître le mouvement séculaire des périhélies de Mercure et de Mars. Cet accroissement est indispensable et reconnu suffisant pour le parfait accord de la théorie avec les observations. Les forces connues et les masses visibles ne l'expliquent pas cependant, et M. Le Verrier n'a pas hésité, avec la légitime hardiesse qui lui avait déjà brillamment réussi, à affirmer l'existence de masses appréciables et encore inconnues dans le voisinage des orbites de Vénus et de Mars.

L'accroissement de la masse jusqu'ici adoptée pour la Terre justifie, à l'égard de Mars, cette assertion si finement et si savamment motivée, et l'accroissement bien certain aujourd'hui de la parallaxe solaire s'y rattache directement. La théorie de Vénus et celle de la Lune conduisent aux mêmes conclusions directement vérifiées, car à une hauteur suffisante tout se rejoint, par les belles expériences de Foucault et par celles de M. Fizeau, récemment reprises par M. Cornu, sur la vitesse de la lumière.

Les masses qui, dans le mouvement de Mercure, produisent les changements reconnus nécessaires sont signalées déjà et activement recherchées; la théorie corrigée par M. Le Verrier est d'ailleurs trop parfaite et les observations trop précises pour qu'il soit possible de conserver un doute sur l'existence de petites planètes, ou d'une matière autrement constituée, dans l'intérieur de l'orbite de Mercure.

La découverte de Neptune n'a pas été, on le voit, le résultat d'une inspiration heureuse et fortuite; l'esprit investigateur et patient qui, ne pouvant expliquer le mouvement d'Uranus par les forces connues du système du monde, a osé affirmer l'existence d'une masse perturbatrice, poursuit sans relâche, depuis trente ans, l'application des mêmes méthodes, en proclamant, avec une confiance de mieux en mieux justifiée, les conséquences, imprévues ou non, de ses pénibles et savants calculs.

M. Le Verrier a présenté, le 20 mai 1872, à l'Académie des Sciences, la première Partie de son grand Mémoire sur Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, contenant l'expression algébrique de la fonction perturbatrice ainsi que l'expression en fonction du temps, et pour une période indéfinie, des inégalités qui en résultent. Il s'était imposé une tâche plus grande encore, et, pour la continuer, il fallait : 1° calculer les formules et les réduire en Tables provisoires; 2° rassembler toutes les observations exactes des quatre planètes et les discuter à nouveau pour bien rapporter les positions à un même système de coordonnées; 3° au moyen de Tables provisoires, calculer les positions apparentes des planètes pour l'époque des observations; 4° comparer les positions observées avec les positions calculées, en conclure les corrections des éléments elliptiques des quatre planètes, et vérifier si l'accord est parfait; 5° dans le cas contraire, en rechercher les causes.

Ce vaste programme est aujourd'hui complétement rempli pour Jupiter et pour Saturne, et bien près de l'être pour Uranus et Neptune.

Dès le 26 août 1872, M. Le Verrier présentait à l'Académie un Mémoire fondamental sur la théorie des planètes Jupiter et Saturne, si intimement liées l'une à l'autre. Trois mois plus tard, le 11 novembre de la même année, il présentait la détermination des variations séculaires des quatre planètes, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, qui, liées également les unes aux autres, résultent d'une même analyse; mais cette partie de l'œuvre est une introduction seulement à l'étude détaillée de chaque planète.

Le 17 mars 1873, M. Le Verrier présentait à l'Académie la théorie complète de Jupiter, et le 14 juillet suivant, celle de Saturne.

Le 12 juin 1874, il donnait les Tables de Jupiter comprenant la

comparaison de la théorie avec les observations de Greenwich de 1750 à 1830, et de 1836 à 1869, et avec celles de Paris de 1837 à 1867.

Le 9 novembre 1874, il donnait la théorie d'Uranus en tenant compte des perturbations auxquelles on doit la découverte de Neptune.

Le 14 décembre 1874, enfin, M. Le Verrier donnait, dans la théorie de Neptune, le dernier chapitre et la conclusion de son immense travail.

« Qu'un seul homme », s'écrie M. Adams, « ait eu assez de force et de persévérance pour parcourir ainsi d'un pas assuré la totalité du système solaire en calculant avec la dernière exactitude, et sans en oublier aucune, toutes les perturbations qui peuvent exercer une influence sur chaque planète, c'est ce qu'on aurait cru impossible, si le résultat n'était aujourd'hui sous nos yeux. »

Les Mémoires de M. Le Verrier sont imprimés dans les *Annales de l'Observatoire;* ils ont pour base le développement de la fonction perturbatrice donné dans le premier volume de cette belle collection, dont les treize volumes, actuellement publiés par M. Le Verrier, sont presque exclusivement son œuvre.

Le XVIII[e] Chapitre des *Recherches* de M. Le Verrier, qui forme presque la totalité du X[e] volume des Mémoires, est consacré à la détermination de l'action mutuelle de Jupiter et de Saturne.

M. Adams analyse cette théorie compliquée avec la connaissance profonde de tous les détails; mieux qu'aucun autre il pouvait apprécier les difficultés si habilement et si patiemment surmontées.

La masse de Jupiter est plus de trois cents fois et celle de Saturne plus de cent fois égale à celle de la Terre. Il en résulte donc des conditions toutes particulières dans l'étude des perturbations, et la nécessité de pousser le développement beaucoup plus loin que dans la théorie des autres planètes.

Une autre circonstance apporte à la théorie de Jupiter une difficulté spéciale : le moyen mouvement de Jupiter et celui de Saturne ont un rapport simple, celui de cinq à deux à très-peu près, et cette circonstance rend les effets de l'attraction mutuelle très-différents de ce qu'ils seraient, si le rapport était incommensurable ou exprimé par une fraction à termes considérables. A une position donnée de l'une des planètes correspondent, en effet, un petit

nombre de positions de l'autre; quand Saturne, ayant accompli sa révolution, revient au même point de son orbite, Jupiter a fait deux tours et demi et se place à peu près au point diamétralement opposé de la sienne, et, quand Saturne, accomplissant une seconde révolution, reprend pour la seconde fois la même place, Jupiter se retrouve également à la sienne après avoir fait cinq fois le tour de son orbite. Si, au contraire, les mouvements pouvaient être regardés comme incommensurables, comme le sont, par exemple, ceux de Mars et Jupiter, à une position donnée de l'une des planètes correspondraient, dans la série des siècles, toutes les positions possibles de l'autre dans son orbite, et les perturbations séculaires seraient les mêmes que si la planète troublante était remplacée par un anneau continu dont la densité, à chaque point, serait en raison inverse de la vitesse avec laquelle la planète le traverse. A ce fait géométrique correspondent, dans les calculs, des particularités très-différentes dans les deux cas, et la présence de dénominateurs très-petits donne de l'importance à certains termes, qui sans cela seraient insignifiants.

La grande difficulté et le grand mérite du travail de M. Le Verrier peuvent se résumer dans cette circonstance singulière que, sans posséder la solution théorique exacte du problème, qui dépasse de bien loin les ressources actuelles de la Science, il veut obtenir et il obtient les résultats numériques avec une exactitude comparable à celle des meilleures observations. Il faut, pour atteindre un tel but, tenir compte du carré et des puissances supérieures des forces perturbatrices, et la complication du problème en est singulièrement accrue.

On partage en deux classes les termes qui expriment la variation des éléments : les termes périodiques, qui, contenant la longitude moyenne de l'une des planètes étudiées, varient et changent de signe pendant la durée d'une révolution, et les termes séculaires, qui, contenant seulement les éléments des orbites, varient avec une extrême lenteur. Tous contiennent d'ailleurs en facteur la masse de l'une des planètes perturbatrices. Si cette masse est très-petite, les inégalités périodiques le sont également, et l'on peut, en les calculant, traiter comme des constantes les éléments qui y figurent, et obtenir, en même temps, les inégalités séculaires sans tenir compte des termes périodiques. Mais, pour des masses trou-

blantes aussi considérables que celles de Jupiter et de Saturne, les résultats ainsi obtenus doivent être pris seulement pour une première approximation; pour en obtenir une seconde, il faut substituer aux éléments, dans le second membre de l'équation, leur partie séculaire augmentée de la partie périodique approximativement calculée, et de là l'introduction du carré des masses et de leurs produits deux à deux. Dans ces termes nouveaux figurent les produits des sinus ou cosinus des multiples de la longitude moyenne. Quand les multiples sont différents, les produits, par une formule élémentaire bien connue, peuvent se remplacer par une somme, et les termes ne perdent pas leur caractère périodique avec des signes alternativement positifs et négatifs; mais, quand l'argument est le même, on obtient le carré d'un sinus ou d'un cosinus qui conserve toujours le même signe, et dont l'application de la même formule détache un terme constant qui doit se joindre aux termes séculaires.

L'introduction des variations périodiques des éléments dans les inégalités séculaires fait naître à son tour des termes périodiques.

Quand les masses troublantes sont celles de Jupiter ou de Saturne, une troisième approximation est nécessaire, et elle introduit des termes de l'ordre du cube des masses. Le nombre de ces termes s'accroît très-rapidement, et les calculs seraient véritablement inextricables, sans l'habileté avec laquelle l'auteur sait discerner, pour les conserver seuls, ceux dont l'influence est appréciable.

M. Le Verrier s'est imposé une condition difficile, et qui accroît singulièrement l'importance de son œuvre : il a voulu obtenir des formules applicables à toutes les époques et qui rendissent possible la comparaison de la théorie avec les observations, quelle qu'en soit la date.

Si l'on se bornait aux termes du premier degré, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites, et du premier ordre par rapport aux masses, les équations s'intégreraient exactement, et l'on aurait, pour une période indéfinie, les valeurs des divers éléments. Mais les termes de degré supérieur sont trop considérables pour qu'on les néglige, et leur présence rend l'intégration rigoureuse impossible.

M. Le Verrier y supplée très-heureusement par la méthode des quadratures; il a déterminé les éléments de chaque orbite pour une période de 2000 ans, commençant en 1850.

Les masses des planètes sont un élément important de ces calculs; si les progrès de la Science et la comparaison des résultats avec l'observation conduisent un jour à changer les valeurs acceptées, les formules de M. Le Verrier sont préparées de manière à permettre le calcul immédiat des corrections qui doivent en résulter, et si, dans 2000 ans, comme le remarque M. Adams, un astronome ayant sous les yeux les formules de M. Le Verrier mesure directement les éléments des diverses orbites, il pourra, dans le cas où ils ne s'accorderaient pas avec les prévisions de notre illustre compatriote, trouver avec certitude la cause de la divergence et, par un calcul exact des masses, rétablir la concordance.

Le XII[e] volume des *Annales de l'Observatoire* est consacré précisément à la comparaison de la théorie de Jupiter avec les observations. Les observations employées sont celles de Greenwich de 1750 à 1830 et de 1836 à 1869, celles de Paris de 1837 à 1867. Les équations de condition sont divisées en deux séries qui correspondent aux observations de 1750 à 1830, et en deux autres qui correspondent à l'intervalle de 1836 à 1869. Dans chacune de ces séries les équations sont divisées en huit groupes correspondant aux diverses distances de la planète à son périhélie, zéro à 45 degrés, 45 à 90 degrés, etc.

On forme ainsi quatre équations résultantes, qui donnent les corrections de l'époque, du moyen mouvement, de l'excentricité et de la longitude du périhélie en fonction de la correction à faire à la masse de Saturne, qui demeure comme une dernière inconnue. La substitution des résultats, dans les équations relatives aux observations modernes, conduit à diminuer la masse de Saturne adoptée par Bouvard de la $\frac{1}{200}$ partie environ de sa valeur. Bessel, au contraire, par l'étude de l'un des satellites, avait cru devoir l'augmenter de $\frac{1}{350}$.

Les équations relatives à la latitude sont traitées de la même manière et groupées suivant la distance de la planète à son nœud ascendant. Les corrections de l'inclinaison et de la longitude sont obtenues séparément, au moyen des observations anciennes et modernes. L'accord est très-satisfaisant.

Les Tables ont été calculées spécialement pour les années comprises entre 1850 et 2350. Un simple changement de signe dans la valeur du temps permet néanmoins de les étendre aux années anté-

rieures à 1850. Pour les deux derniers siècles, elles ont ainsi une précision suffisante, puisqu'elle égale celle des observations elles-mêmes; pour les époques antérieures, elle les surpasse de beaucoup.

Le XIII[e] volume est consacré aux théories d'Uranus et de Neptune. La théorie de ces planètes présente de grandes difficultés: le moyen mouvement de Neptune est moitié environ de celui d'Uranus, et il en résulte, dans les termes du second ordre, des inégalités très-sensibles.

Les éléments elliptiques actuels de Neptune et d'Uranus ne sont pas encore connus avec une précision suffisante.

La méthode employée pour traiter en même temps les théories de Neptune et d'Uranus a la plus grande ressemblance avec celle qui a servi pour Jupiter et Saturne.

La comparaison de la théorie de Saturne avec les observations laisse, pour certaines périodes seulement, subsister des différences plus grandes que d'habitude; dans les trente-deux années comprises entre 1837 et 1869, la différence est moindre que 2″,5, à l'exception des années 1839 et 1849, pour lesquelles elle s'élève à 4″,5.

Pour les observations anciennes, particulièrement celles de Maskelyne, elle s'élève jusqu'à 9 secondes d'arc.

M. Le Verrier n'est pas habitué à de telles anomalies, et, pour en découvrir l'origine, il n'a pas reculé devant des calculs nouveaux, qui, par des procédés entièrement différents, lui ont donné des résultats conformes aux premiers pour les inégalités périodiques, et fort peu différents pour les inégalités séculaires. La nature des différences rend d'ailleurs peu probable qu'elles puissent être attribuées à la théorie. L'erreur en effet qui, en 1839, est positive et égale à 4″,4, devient négative et égale à 5 secondes en 1844, et rien n'indique dans les développements la cause vraisemblable d'une variation aussi brusque et aussi considérable. M. Le Verrier incline en conséquence, malgré l'accord des observations de Paris et de Greenwich, à reporter sur elles la plus grande partie de cette anomalie. Il s'agit de Saturne, on ne doit pas l'oublier, et la présence de l'anneau rend les observations plus incertaines que pour toute autre planète.

Les Tables de Saturne comparées à l'observation se prêtent diffi-

Il termine le Chapitre en établissant que, pour une masse déterminée, il n'existe qu'une fonction v satisfaisant à cette dernière relation, continue dans tout l'espace ainsi que ses dérivées premières, et telle que les six quantités xv, yv, zv, $x^2\frac{\partial v}{\partial x}$, $y^2\frac{\partial v}{\partial y}$, $z^2\frac{\partial v}{\partial z}$ restent finies quand le point attiré s'éloigne indéfiniment.

Chapitre II. — Au moyen des propriétés caractéristiques du potentiel, Dirichlet démontre l'exactitude des formules très-simples qui représentent le potentiel d'un ellipsoïde homogène sur un point. Ce potentiel est de la forme

$$G - Lx^2 - My^2 - Nz^2,$$

G, L, M, N étant des intégrales définies prises de zéro à ∞ quand le point est intérieur, de σ à ∞ quand il est extérieur, σ étant le paramètre de l'ellipsoïde homofocal au premier et passant par le point donné. Il en conclut que l'attraction sur un point intérieur est la même pour tous les ellipsoïdes concentriques et homothétiques, et que, par suite, l'action d'une couche homogène limitée par deux tels ellipsoïdes est nulle. Dirichlet dit que personne n'a cherché l'action d'une telle couche sur un point extérieur, et il en donne l'expression. Le Dr Grube relève cette assertion, et rappelle que la question avait été antérieurement traitée par Poisson et par M. Chasles, qui avaient donné au résultat des énoncés géométriques très-simples.

Chapitre III. — La considération d'une couche solide infiniment mince conduit au potentiel d'une surface dont chaque élément aurait une certaine masse. Ce potentiel a les propriétés caractéristiques suivantes : 1° il est partout continu; 2° hors de la surface, toutes ses dérivées sont partout continues; 3° si le point (x, y, z) est situé hors de la surface, on a

$$(a)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0;$$

4° si le point se meut sur une normale à la surface, le potentiel dépend de la distance p de ce point à un point fixe de cette normale; $\frac{\partial v}{\partial p}$ est discontinu quand on traverse la surface, et, si α indique le

pied de la normale, on a

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\alpha+\iota} - \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\alpha-\iota} = -4\pi k,$$

relation due à Laplace; 5° $xv, yv, zv, x^2\frac{\partial v}{\partial x}, y^2\frac{\partial v}{\partial y}, z^2\frac{\partial v}{\partial z}$ restent finies quand le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment.

Chapitre IV. — Pour étudier le potentiel d'une surface sphérique de rayon R, il faut développer suivant les puissances ascendantes de α la fonction $(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$. Si P_n est le coefficient de α^n, P_n est un polynôme entier en $\cos\gamma$, du degré n, et dont la valeur est toujours comprise entre -1 et $+1$. Au moyen de ces fonctions P_n, on développe v suivant les puissances ascendantes de $\frac{\rho}{R}$, si le point est intérieur, de $\frac{R}{\rho}$ dans le cas contraire. Le coefficient U_n du terme général de l'un ou l'autre de ces développements est

$$\int\int k' P_n(\cos\gamma)\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$$

ρ', θ' et φ' étant les coordonnées polaires d'un point de la sphère, γ l'angle que le rayon vecteur ρ' fait avec ρ. L'application du théorème de Laplace conduit à la relation

$$(b) \qquad k = \frac{1}{4\pi}\sum_{0}^{\infty}(2n+1)U_n.$$

Le potentiel v d'un solide ou d'une surface sur un point extérieur satisfait à la relation (a). A l'aide d'un théorème de Green qui relie deux intégrales étendues au volume d'un corps solide à une autre relative à sa surface, Dirichlet exprime cette relation au moyen des coordonnées polaires ρ, θ, ψ. Remplaçant dans la relation nouvelle le potentiel d'une surface sphérique par son développement suivant les puissances de ρ, il en conclut une équation aux dérivées partielles du second ordre, à laquelle satisfait la fonction U_n. Les solutions de cette équation, entières par rapport à $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, sont les fonctions sphériques d'ordre n. Elles jouissent des propriétés suivantes :

1° $$\int\int U_m U_n \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 0.$$

l'intégrale étant étendue à toute la sphère.

2° Toute combinaison linéaire de deux fonctions sphériques du même ordre est une fonction sphérique du même ordre; il en est de même des dérivées d'une fonction sphérique par rapport à des paramètres.

3° $$U_m = \frac{2m+1}{4\pi}\int d\sigma' U'_m P_m(\cos\gamma),$$

l'intégrale s'étendant à toute la sphère.

4° Une fonction sphérique d'ordre m est susceptible d'une infinité de formes, à cause de la relation

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 = 1;$$

en particulier on peut la ramener au degré m, tous les termes étant de même parité; on peut aussi la rendre homogène, du degré m.

La formule (b) exprime le célèbre théorème relatif au développement en série d'une fonction de deux variables θ et φ, déterminée pour toutes les valeurs de θ et φ et continue. Dirichlet n'avait pas donné dans son cours sa démonstration relative à la convergence de la série. M. Grube l'a reproduite en note. Enfin le Chapitre se termine par l'expression générale de U_m.

Chapitre V. — Ce Chapitre est consacré à l'étude de la distribution de l'électricité : 1° sur une sphère soumise à l'influence d'un corps non conducteur; les calculs sont terminés dans le cas où le corps non conducteur se réduit à un point; 2° sur les surfaces limites d'un solide limité par deux sphères concentriques, soumis à l'action d'un corps non conducteur placé dans l'intérieur; 3° sur deux sphères. A cette occasion, Dirichlet présente des considérations très-intéressantes sur les équations fonctionnelles.

Chapitre VI. — Dans ce Chapitre, se trouve la démonstration du théorème suivant, connu sous le nom de *principe de Dirichlet :* « Pour un corps fini déterminé, il existe toujours une fonction v de x, y, z, continue, ainsi que ses dérivées, dans tout l'espace, ayant pour chaque point du corps une valeur déterminée, et satisfaisant dans tout l'espace, excepté dans l'intérieur du corps, à la relation (a) ».

Chapitre VII. — Enfin l'Ouvrage se termine par l'application des principes précédents au magnétisme, et en particulier au magnétisme terrestre. B. B.

Dr KÖNIG GYULA, müegyetemi ny. r. tanár. — BEVEZETÉS A FELSŐBB ALGEBRÁBA. *Első kötet :* AZ ALGEBRAI ANALYSIS ELEMEI. — Budapest, 1877. Az Eggenberger-féle könyvkerseskedés kiadása. (Hoffmann és Molnár) (¹).

Ce Livre est le résumé des leçons faites chaque année par l'auteur à l'Institut Polytechnique de Budapest sur l'objet indiqué par le titre; cela explique le point de vue où l'auteur s'est placé et le but qu'il a poursuivi. Tandis que les théories de la Géométrie analytique et du Calcul différentiel ont été si souvent exposées dans des Traités systématiques, les livres élémentaires considèrent à peine l'Analyse algébrique comme une branche des Sciences mathématiques ayant une existence propre, et ils se contentent de donner les calculs d'opérations les plus simples; d'autre part, les grands Traités, tels que celui de Serret, ne sont pas propres à être déjà mis entre les mains d'un élève de l'enseignement moyen. Ces considérations ont engagé l'auteur à tenter ce qui, dans le domaine de la Géométrie, a été non-seulement tenté, mais encore exécuté avec un brillant succès, savoir d'introduire dans les doctrines enseignées depuis longtemps les considérations modernes et leurs résultats.

L'Ouvrage entier se composera de deux volumes, dont le premier vient de paraître. Son titre spécial, *Analyse algébrique,* ne répond pas, il est vrai, complétement au contenu des Ouvrages publiés jusqu'ici sous ce titre. Ce que l'auteur s'est proposé en l'écrivant peut être exprimé sommairement en disant qu'il a voulu traiter d'une manière approfondie les parties de l'Algèbre qui, partant de commencements imperceptibles, se sont développées en doctrines d'une haute portée, ayant leur domaine distinct. Il s'est partout

(¹) Dr JULIUS KÖNIG, professeur à l'Institut Royal Polytechnique de Hongrie. — *Introduction à l'Algèbre supérieure.* 1re PARTIE : Éléments d'Analyse algébrique. — Budapest, 1877, librairie Eggenberger (Hoffmann et Molnár). 1 vol. in-8°, 266 p. (Analyse rédigée d'après des Notes fournies par l'auteur.)

attaché à faire ressortir le but et les méthodes de chaque théorie, et à rehausser par là l'intérêt du sujet.

Ainsi le Chapitre I commence par les propriétés des nombres entiers, en établissant d'une manière rigoureuse les lois de la divisibilité; il traite des fonctions arithmologiques qui expriment le nombre et la somme des diviseurs, ainsi que de la fonction $\varphi(m)$, et termine par les propriétés simples des nombres congrus, jusqu'au théorème de Fermat inclusivement.

Dans le Chapitre II se trouve la théorie des fractions continues. Elle commence par une exposition détaillée des théorèmes relatifs aux fractions continues finies, à la suite de laquelle l'auteur traite de la théorie des congruences du premier degré à plusieurs inconnues; puis il fait connaître les recherches les plus simples sur la convergence des fractions continues infinies dont les numérateurs sont égaux à l'unité, en ne les étudiant toutefois que comme fondement de la théorie des fractions continues périodiques. La démonstration du théorème que toute irrationnelle du second degré peut être exprimée par une fraction continue périodique a été donnée sous une forme plus courte que la forme habituelle, et qui mérite une attention particulière.

Ensuite vient la résolution de l'équation de Pell, comme application de cette théorie et en même temps comme base de la résolution des équations indéterminées du second degré. Quelques formes d'équations indéterminées de degré supérieur, résolubles aussi d'une manière élémentaire, terminent ce Chapitre.

Le Chapitre III traite des combinaisons; il commence par la théorie des permutations, puis développe les lois des inversions qui s'y produisent. En s'appuyant sur ces théorèmes, l'auteur a cherché à incorporer dans cette exposition élémentaire la théorie des substitutions, devenue si importante pour la théorie des équations. Il donne ensuite la décomposition d'une substitution quelconque en substitutions cycliques, la multiplication de deux substitutions quelconques, et leur décomposition finale en transpositions; puis la définition de l'ordre d'une substitution, sa détermination, et la décomposition en facteurs premiers. La question de la commutativité des facteurs conduit à la théorie des substitutions semblables. L'exposé se termine par les propriétés les plus simples des groupes de substitutions, parmi lesquels l'auteur traite spécialement celui qui con-

tient la moitié du nombre total des substitutions. A la théorie des substitutions se rattachent une exposition détaillée des propriétés des coefficients binomiaux; la théorie des suites arithmétiques d'ordre supérieur, considérée en même temps comme une théorie des différences finies; la théorie des nombres figurés, et finalement une courte déduction des formules des combinaisons avec répétitions.

Ces trois Chapitres se relient entre eux comme comprenant la théorie des nombres discrets, et maintenant, par la théorie des nombres complexes, le Chapitre IV va préparer le passage à une autre doctrine. Ce Chapitre commence par les éléments du calcul des opérations; il donne ensuite la représentation géométrique des nombres complexes, et les théorèmes connus qui en dépendent. Vient ensuite la théorie des équations binômes, d'où l'on a naturellement exclu, pour la donner plus tard, la question de leur résolution algébrique; puis la théorie des racines de l'unité, et enfin les formules trigonométriques de sommation, qui se déduisent si facilement de ce qui précède.

Le Chapitre V expose les opérations algébriques que l'on peut exécuter sur les équations, en tant que ces opérations ne supposent pas connue la théorie proprement dite des équations; la méthode de division de Horner; la décomposition en facteurs quand les racines sont supposées déjà connues; la détermination des racines en nombres entiers; la multiplication, la division, l'accroissement et la diminution des racines, la formation de l'équation réciproque; les cas les plus simples des problèmes d'élimination, et enfin les formes homogènes.

Comme suite à ce Chapitre, le Chapitre VI donne la résolution des équations jusqu'au quatrième degré inclusivement, où, en outre de l'exposition détaillée des anciennes méthodes, nous remarquons encore les méthodes de Cayley, conçues dans l'esprit de la nouvelle Algèbre, et présentées sous une forme élémentaire.

Les Chapitres suivants développent une théorie des suites infinies d'opérations.

Dans le Chapitre VII, après une étude de la notion de limite, et les critériums de la convergence conditionnelle ou absolue des séries infinies, vient la théorie des séries de puissances, et finalement la multiplication des séries.

Le Chapitre VIII passe en revue les séries de puissances les plus importantes. On y prend pour base l'équation fonctionnelle connue

de la quantité exponentielle ; puis on traite avec détail la série binomiale, d'où l'on passe à la série exponentielle, moyennant l'expression-limite connue. Il est peut-être superflu de faire remarquer que l'auteur a attaché une importance toute particulière à la rigueur de ces démonstrations. Ensuite on traite la théorie de la fonction exponentielle, et le nombre e, la définition algébrique des fonctions trigonométriques et hyperboliques, la dépendance entre ces deux espèces de fonctions, et l'on établit après cela les séries finies pour $\sin^a x$, $\cos^b x$, selon la méthode d'Hermite. On parle alors de la série logarithmique, du passage à la détermination de π, et l'on termine par un court exposé de la série hypergéométrique introduite par Gauss.

Le Chapitre IX, contenant la théorie des produits infinis et des fractions continues infinies, ne doit être considéré que comme un appendice. Une étude vraiment systématique et rigoureuse de ces formes appartient au domaine de la théorie des fonctions, tandis qu'ici l'on n'a admis que les propositions qui se rapportent à l'ordre d'idées du Livre et qui peuvent se déduire de ce qui précède ; nous trouvons ainsi l'étude de la convergence des produits infinis, les produits infinis de sinus et de cosinus, la transformation des séries en fractions continues et les applications les plus importantes qui peuvent se déduire de ces propositions.

Nous ne devons pas oublier de dire que ce Chapitre, comme tous les précédents, est terminé par une notice historique, contenant une revue détaillée du développement historique des questions qui y sont traitées.

Tel est le contenu du premier Volume qui vient de paraître. D'après l'annonce faite dans la Préface, le second Volume, de même étendue et rédigé dans le même esprit, aura pour objet la synthèse des diverses méthodes de la théorie des équations proprement dite, et emploiera pour cela une exposition élémentaire de la théorie de Galois.

En félicitant l'auteur de son remarquable travail, nous ne pouvons nous empêcher de regretter qu'il l'ait écrit pour l'usage exclusif de ses compatriotes, et nous espérons que la seconde édition paraîtra en langue allemande, ce qui, sans diminuer le nombre de ses lecteurs en Hongrie, lui en assurera beaucoup d'autres dans le reste de l'Europe.

KUMMER (E.-E.). — Ueber die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt, insbesondere auch auf die Geschosse. 1875. (57 p., 2 pl.) In-4°.

— Neue Versuche zur Bestimmung des Angriffspunktes der Resultante des Luftwiderstandes gegen rechteckige schiefe Ebenen. Zusatz zu der Abhandlung : « Ueber die Wirkung, etc. » 1876. In-4° (¹).

Les lois physiques de la résistance de l'air sur les corps qui se meuvent dans son sein sont jusqu'ici encore fort peu connues. Une des actions les plus importantes dues à la résistance de l'air est la déviation des projectiles, animés d'un mouvement de rotation, hors du plan vertical mené par la direction originelle du mouvement. Par comparaison avec les phénomènes bien connus de la toupie de Fessel, on arrive aisément à expliquer la raison de cette déviation. Si, lorsqu'on considère le projectile du canon, le point d'application de la résultante de la résistance de l'air sur ce projectile, animé d'un mouvement de rotation dextrogyre, est *en avant* du centre de gravité, dans la chute du projectile, l'axe principal d'inertie s'écarte du plan vertical primitif de la courbe de tir, son extrémité antérieure se déplaçant à droite, et il décrirait un cône, si la durée du jet était suffisamment longue ; en même temps le projectile tout entier s'écarte à droite du plan de tir primitif. Quand, au contraire, le plan d'application de la résultante de la résistance de l'air se trouve *en arrière* du centre de gravité, il se produit une rotation à gauche de l'extrémité antérieure de l'axe principal d'inertie, et en même temps le projectile dévie à gauche du plan vertical dont on vient de parler.

Comme, d'après cela, la position du point d'application de la résultante de la résistance de l'air est un élément déterminant pour le sens de la déviation du projectile, il importe de pouvoir la connaître pour les différents projectiles. Dans ce but, M. Kummer a suivi deux marches distinctes : l'une purement mathématique traite la question par le calcul ; l'autre, au contraire, est physique et recourt à l'expérience.

(¹) *Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* F. Dümmlers Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann).

Pour ses calculs, il lui fallait partir de certaines hypothèses physiques; il a adopté celles de Newton et d'Euler, suivant lesquelles la pression normale exercée sur une surface plane en mouvement dans l'air est proportionnelle à cette surface et au carré du cosinus de l'angle que la normale à la surface fait avec la direction du mouvement. Quant à la grandeur elle-même de la résistance de l'air, on admet que la pression sur l'unité de surface est constante, quand la surface se meut normalement à elle-même dans l'air supposé de densité constante, et que la vitesse du corps en mouvement est constante. Dans ces hypothèses, la question n'est plus qu'un problème de Statique. M. Kummer développe d'abord les formules générales pour les corps de révolution, et calcule en particulier la position du point d'application de la résultante : 1° pour un plan ; 2° pour un cylindre droit à base circulaire; 3° pour un cône circulaire droit ; 4° pour le corps formé d'un cylindre circulaire et d'un cône droit ; 5° pour un demi-ellipsoïde de révolution ; 6° pour l'ensemble d'un cylindre et d'un demi-ellipsoïde de révolution. Mais quelque plaisir que l'on ait à voir la Statique s'enrichir d'exemples choisis, quelque intéressante que soit l'habileté déployée pour effectuer les intégrations, les résultats n'ont pas d'application pratique, tant qu'on n'a pas démontré l'exactitude des hypothèses physiques prises pour point de départ.

Aussi M. Kummer a-t-il entrepris lui-même des expériences pour démontrer l'accord du résultat de ses calculs avec la réalité. Ces expériences se bornent uniquement à déterminer le point d'application de la résultante de la résistance de l'air pour une position donnée du corps par rapport à la direction du mouvement; elles laissent complétement de côté la détermination de l'intensité de la résistance. La marche suivie en général est la suivante. Le corps à étudier est monté sur un axe fixe autour duquel il peut tourner librement; une série de trous équidistants percés dans le corps permettent de changer la position de l'axe. Dans chacune de ses positions, ce dernier coupe un des axes principaux d'inertie; et dans chaque expérience, le corps, qui est creux, est équilibré au moyen de poids convenablement placés dans son intérieur, de telle sorte que, sans changement de surface extérieure, il se trouve en équilibre indifférent. On lui fait décrire un cercle de $2^{m},1$ de rayon sous une vitesse de 8 mètres environ, et l'on mesure l'angle que

l'axe longitudinal du corps parvenu à une position d'équilibre stable fait avec la direction horizontale du mouvement, puisqu'il dépend uniquement de la résistance de l'air. En général, on trouve une notable différence entre les valeurs que fournit l'observation et celles qui sont déterminées par le calcul. Pour le plan, les résultats des expériences sont en contradiction complète avec le calcul, et tous les calculs reposent au fond sur l'exactitude des hypothèses faites pour le plan.

En effet, tandis que, dans les hypothèses admises, le point d'application de la résistance de l'air doit toujours être au centre de gravité de la surface plane, on trouve expérimentalement, pour des angles différents du plan avec la direction du mouvement, des positions différentes, variant d'une manière continue, pour le point d'application. M. Kummer voit la cause de ces phénomènes dans la production de courants d'air devant la surface du corps en mouvement; ils sont cause que, pour une inclinaison de l'axe longitudinal du corps, oblique par rapport à la direction du mouvement, la partie antérieure se trouve avoir à supporter une pression plus forte que la partie postérieure. En pratiquant des ouvertures dans les plans soumis aux expériences, il donne à cette explication un grand caractère de vraisemblance.

Le complément de 1876 justifie, au moyen d'expériences nouvelles, quelques chiffres du premier travail qui se rapportent aux surfaces planes rectangulaires.

Comme résultat pratique intéressant, on voit qu'une girouette qui présente des deux côtés de l'axe de rotation des surfaces sur lesquelles agissent les courants du vent ne se place pas en général parallèlement à la direction du vent mais fait avec elle un angle qu'il faut déterminer pour chaque girouette en particulier et qui peut se produire de deux côtés différents. Par exemple, un rectangle de 180 millimètres de longueur et de 90 de largeur, qui tourne autour d'un axe situé à 60 millimètres du plus petit côté, fait un angle de 23 degrés avec la direction du vent. E. L.

NÖTHER (M.). — UEBER DIE SINGULÄREN WERTHSYSTEME EINER ALGEBRAISCHEN FUNCTION UND DIE SINGULÄREN PUNKTE EINER ALGEBRAISCHEN CURVE ([1]).

Soit (a, b) un point singulier d'une courbe algébrique

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

en sorte que l'on puisse faire

$$f(x, y) = f_k(x-a, y-b) + f_{k+1}(x-a, y-b) + \ldots,$$

$f_k(x-a, y-b), f_{k+1}(x-a, y-b), \ldots$ étant des fonctions homogènes en $x-a$, $y-b$, dont le degré est marqué par l'indice; supposons que $x-a$ n'entre pas en facteur dans $f_k(x-a, y-b)$; en employant la substitution

$$y_1 = \frac{y-b}{x-a},$$

l'équation proposée deviendra

$$f_k(1, y_1) + (x-a) f_{k+1}(1, y_1) + \ldots = 0. \tag{2}$$

Si, par exemple, l'équation

$$f_k(1, y_1) = 0$$

admet k racines distinctes $b_1, b_2, \ldots, b_k$, les points (a, b_1), (a, b_2), ... de la courbe (2), qui répondent au point singulier (a, b) de la courbe (1), seront des points simples. Si, b_1 étant une racine multiple de l'équation $f_k(1, y_1) = 0$, le point (a, b_1) est un point singulier de la courbe (2), on pourra employer une substitution de la forme

$$y_2 = \frac{y_1 - b_1}{x-a}$$

ou de la forme

$$x_1 = \frac{x-a}{y_1 - b_1}, \text{ etc.}$$

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. IX, 1875.

Consultez sur ce sujet les travaux des auteurs suivants : HAMBURGER, *Ueber die Entwicklung algebr. Functionen in Reihen.* (*Zeitschr. für Mathem. u. Phys.*, XVI, 1871). — KÖNIGSBERGER, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen.* — BRILL u. NÖTHER, *Ueber die algebr. Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie.* (*Math. Annalen*, t. VII). — NÖTHER, *Ueber die eindentigen Ebenentransformationen.* (*Math. Annalen*, t. V). — STOLZ, *Ueber die singul. Punkte der algebr. Functionen und Curven.* (*Math. Annalen*, t. VIII). — DE LA GOURNERIE, *Comptes rendus*, 1873. — DARBOUX, *Comptes rendus*, 1874, etc.

De cette façon, on parviendra, après un nombre fini d'opérations, à une substitution finale de la forme

$$x_1 = \frac{\varphi(x,y)}{\chi(x,y)}, \quad y_1 = \frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)},$$

par laquelle l'équation $f(x,y) = 0$ se transformera en une autre $f^{(1)}(x,y) = 0$, de façon que les points de la seconde courbe qui correspondent au point singulier (a, b) de la première soient des points simples de la seconde.

L'importance du travail de M. Nöther consiste dans l'application qu'il donne de cette méthode à la définition précise des différents points singuliers, définition qui se trouve mise en rapport avec le rôle que jouent ces points analytiquement ou géométriquement.

MÉLANGES.

NOTES SUR L'HOMOGRAPHIE ET L'HOMOLOGIE DES FIGURES A TROIS DIMENSIONS;

PAR M. ED. DEWULF,
Chef de bataillon du Génie.

On sait que deux figures homographiques planes peuvent toujours être placées de manière à former deux figures homologiques (CHASLES, *Géom. sup.*, nos 567 et 573). Dans la seconde Partie du Mémoire de Géométrie qui fait suite à l'*Aperçu historique*, M. Chasles pose la même question relativement aux figures homographiques à trois dimensions, et il démontre (nos 447 et 448) que deux figures homographiques à trois dimensions ne peuvent pas, en général, être placées de manière à être homologiques; mais l'illustre géomètre n'établit pas la règle qui permet de reconnaître dans quels cas le problème admet des solutions.

Painvin, notre regretté collaborateur, s'est occupé de cette question dans un Mémoire publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1870), et il est parvenu, par une voie analytique assez longue, à la règle suivante: « Pour que deux figures homographiques de l'espace puissent être placées homologiquement, il faut et il suffit que la courbe qui, dans l'une d'elles, correspond au cercle imaginaire de l'infini de l'autre, soit également un cercle;

et alors il y a deux manières et deux seulement d'amener les figures à être homologiques.

Depuis, le même problème a encore été résolu par M. Schoute, jeune géomètre hollandais, dans une thèse remarquable qui a pour titre : *Homologie, en hare toepassing op de theorie der oppervlakken van den tweeden graad,* Leyden, 1870 ([1]). La règle proposée par Painvin ne nous paraissant pas très-commode dans les applications graphiques, nous allons en proposer une autre à laquelle nous parviendrons par une voie purement géométrique et que l'on peut déduire aussi de la solution de M. Schoute.

Désignons par F et F' deux figures homographiques à trois dimensions, par Π, Π' deux plans correspondants quelconques, par I (ou I') le plan de la figure F (ou F') qui correspond au plan de l'infini de F' (ou F), et appliquons les mêmes lettres, mais minuscules, aux figures homologiques.

Nous allons d'abord rappeler succinctement quelques propriétés de ces figures qui se déduisent immédiatement de leur définition, et sur lesquelles nous nous appuierons.

Les sections ΠF, Π'F' sont homographiques ; à un plan Φ (ou Φ') de F, parallèle à I (ou de F', parallèle à I') correspond un plan Φ' (ou Φ) de F' parallèle à I' (ou de F parallèle à I) ; les sections ΦF, Φ'F' sont homologiques par affinité ([2]), c'est-à-dire qu'à un point de la droite à l'infini de ΦF correspond un point de la droite à l'infini de Φ'F', et réciproquement ; que, par suite, ces deux ponctuelles à l'infini sont homographiques.

Dans les figures homologiques, les sections πf, $\pi' f'$ sont homologiques ; les plans i et i' et, par conséquent, les plans φ et φ' sont parallèles entre eux et au plan d'homologie ; les sections φf et $\varphi' f'$ sont homothétiques, c'est-à-dire qu'elles ont même ponctuelle à l'infini.

Passons maintenant à la question qui nous occupe. Si nous déplaçons la figure F', par rapport à la figure F, de manière à rendre les plans I et I' parallèles entre eux, les ponctuelles à l'infini de ΦF, Φ'F' se superposent et ont, en général, deux points communs.

([1]) *Homographie et ses applications à la théorie des surfaces du second degré.* Leyde, 1870.

([2]) Cremona, *Éléments de Géométrie projective*, p. 15. — Chasles, *Aperçu historique*, p. 218 et 553.

Mais, quel que soit le déplacement que l'on fasse subir à F', les plans I et I' restant toujours parallèles, ces ponctuelles ne pourront, en général, jamais avoir trois points communs, et ne pourront, par suite, se confondre.

Donc, en général, *deux figures homographiques à trois dimensions ne peuvent être placées de manière à être homologiques.*

Admettons maintenant que les deux figures homographiques proposées satisfassent à cette condition particulière, que, les plans I et I' ayant été placés parallèlement, on puisse par un nouveau déplacement (I et I' restant parallèles) amener trois points de la ponctuelle à l'infini de ΦF à se confondre avec les trois points correspondants (de la ponctuelle à l'infini) de Φ'F', alors ces deux figures ont même ponctuelle à l'infini. En d'autres termes, nous admettons que, dans deux plans correspondants parallèles à I et à I', deux triangles correspondants soient semblables et puissent, par conséquent, être amenés par un déplacement à être homothétiques; alors toutes les figures correspondantes tracées dans les plans Φ et Φ' sont semblables (¹); je dis que cette condition est suffisante pour que les figures à trois dimensions F et F' puissent devenir homologiques par un simple déplacement de l'une d'elles.

Supposons, en effet, que la correspondance homographique entre les figures F et F' soit déterminée par celle des cinq plans Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, Π_5 et Π'_1, Π'_2, Π'_3, Π'_4, Π'_5. Considérons les deux trièdres correspondants Π_1, Π_2, Π_3 et Π'_1, Π'_2, Π'_3, et nommons S et S' leurs sommets. Construisons les plans I et I', puis le plan Φ' correspondant à un plan quelconque Φ, parallèle à I. D'après notre hypothèse, le triangle dont les côtés sont $\Phi\Pi_1$, $\Phi\Pi_2$, $\Phi\Pi_3$ est semblable au triangle $\Phi'\Pi'_1$, $\Phi'\Pi'_2$, $\Phi'\Pi'_3$. Les arêtes correspondantes $\Pi_1\Pi_2$ et $\Pi'_1\Pi'_2$ des trièdres S et S' sont des ponctuelles homographiques; il est donc aisé de construire un point P_n de $\Pi_1\Pi_2$ tel qu'en menant par ce point et son correspondant deux plans Φ_n, Φ'_n respectivement parallèles à I et à I', ces plans coupent les deux trièdres S et S' suivant deux triangles égaux et superposables (congruents).

Cela fait, déplaçons la figure F' de manière à faire coïncider les deux triangles congruents; alors, dans le plan commun à ces deux triangles, nous avons plus de trois points, non en ligne droite, qui

(¹) D'où la solution de Painvin.

se confondent avec leurs correspondants, savoir les trois sommets des triangles congruents et les points de la droite à l'infini; donc tous les points correspondants de ces deux plans superposés se confondent et les deux figures sont homologiques: leur plan d'homologie est le plan commun des triangles congruents.

Le plan symétrique du plan Φ_n par rapport à S et son correspondant coupent aussi les tétraèdres suivant deux triangles congruents. Donc, quand il existe une solution du problème, il en existe toujours une seconde.

Il est facile de voir que la règle pratique qui résulte des considérations précédentes peut être énoncée ainsi:

Les données des deux figures fournissant toujours immédiatement deux trièdres correspondants S *et* S', *il faut construire les plans* I *et* I', *et, si les triangles* SI *et* S'I' *sont semblables, les deux figures homographiques à trois dimensions peuvent être placées de manière à être homologiques.*

Cette règle nous permet de résoudre la question suivante, qui a été proposée par M. Darboux dans le *Bulletin* (t. I, 1870, p. 159): « Étant données deux figures homographiques, peut-on, en transformant l'une d'elles homographiquement, l'amener à être homologique à l'autre? »

Soit F'' la transformée de F' cherchée. Pour déterminer F'', prenons un plan I'' parallèle à I', et trois plans Π''_1, Π''_2, Π''_3 respectivement parallèles à Π'_1, Π'_2, Π'_3, et faisons correspondre ces quatre plans respectivement au plan de l'infini et aux plans Π_1, Π_2, Π_3 de F.

La figure F'', déterminée par le plan de l'infini et les plans I'', Π''_1, Π''_2, Π''_3, sera homographique à F, et comme le triangle $\Phi''\Pi''_1$, $\Phi''\Pi''_2$, $\Phi''\Pi''_3$ est semblable au triangle $\Phi'\Pi'_1$, $\Phi'\Pi'_2$, $\Pi'\Pi'_3$, une simple translation amènera F'' à être homologique à F'.

Si l'on voulait arriver directement à cette seconde position de F'', il suffirait de déterminer F'' par le plan de l'infini et les positions prises par les plans I'', Π''_1, Π''_2, Π''_3 après leur translation.

Donc: *deux figures homographiques étant données, on peut toujours, en transformant l'une d'elles homographiquement, l'amener à être homologique à l'autre.*

Toulon, 6 mars 1877.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ЛИВЕНЦОВЪ (А. И.). — Опытъ систематическаго изложенія функціональнаго счисленія съ однимъ независимымъ перемѣннымъ. (*Математическій Сборникъ*, томъ VIII, выпускъ I.) — Москва, 1876 (¹).

La recherche des solutions particulières, dérivant de l'intégrale générale d'un système d'équations aux dérivées partielles, a donné naissance au Calcul fonctionnel. Les travaux relatifs au Calcul fonctionnel des équations à une seule variable commencèrent à paraître déjà vers la fin du XVIIIe siècle. En 1768, Condorcet, dans une lettre écrite à d'Alembert, indique la possibilité de déterminer les fonctions arbitraires que l'on rencontre dans les intégrales des équations aux dérivées partielles, à l'aide de l'intégration des équations aux différences finies. Il a développé ensuite cette idée dans un Mémoire qu'il a imprimé en 1771. C'est donc à Condorcet qu'appartient l'idée fondamentale d'une liaison entre le Calcul fonctionnel et les différences finies.

En 1773, Monge exposa sa méthode, à l'aide de laquelle on peut ramener les équations fonctionnelles aux équations aux différences finies de premier ordre. Dans la même année parut le remarquable Mémoire de Laplace (²), dans lequel la résolution des équations fonctionnelles de deuxième classe et de premier ordre est ramenée à l'intégration des équations aux différences finies de premier ordre. Herschel applique aussi cette méthode dans un Mémoire imprimé en 1814 (³).

Le Calcul fonctionnel a fait un grand pas en avant, grâce aux recherches de Babbage, dont le Mémoire (⁴) sert de source où l'au-

(¹) LIVENTSOF (A.-I.). — *Essai d'une exposition systématique du Calcul fonctionnel dans le cas d'une seule variable indépendante.* — Moscou, 1876, gr. in-8°, 81 p.

(²) LAPLACE, *Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies.* (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1773, p. 70.)

(³) HERSCHEL, *Considerations of various points of Analysis.* (*Phil. Transactions of the Royal Society of London*, 1814.)

(⁴) BABBAGE, *An essay towards the calculus of functions.* (*Phil. Trans. of London*, 1815, 1816.)

teur a principalement puisé. L'auteur a profité en outre des travaux de Collins et de Schröder (¹) dans lesquels on donne le développement en série ordonnée suivant les puissances de l'indice d'une fonction donnée d'ordre quelconque; les coefficients du développement sont formés suivant une loi très-compliquée.

On voit, d'après cette courte esquisse, que M. Liventsof a mis de côté toutes les questions relatives à l'affinité du Calcul fonctionnel avec la théorie des intégrales définies et avec les problèmes inverses de l'intégration définie. Il a eu en vue plutôt la méthode que l'étude complète du sujet. Dans les limites qu'il s'était tracées, il donne un exposé suffisamment complet de cette théorie, et son Ouvrage peut servir d'un excellent manuel pour l'étude de celle-ci. Voici un bref aperçu du contenu de ce Mémoire :

L'auteur commence par la résolution du problème fondamental du Calcul fonctionnel : étant donné $\psi(t)$ trouver $\psi^x(t)$. Il expose ici les méthodes de Herschel et de Schröder, fondées sur le théorème de Babbage, et donne ensuite la théorie des équations fonctionnelles. Il appelle *équations de $n^{\text{ième}}$ classe et de premier ordre* les équations de la forme

$$F(x, \psi x, \psi \alpha_1 x, \psi \alpha_2 x, \ldots, \psi \alpha_n x) = 0,$$

où

$$\alpha_1 x, \alpha_2 x, \ldots, \alpha_n x$$

sont des fonctions de x, et *équations de $n^{\text{ième}}$ ordre et de première classe* celles de la forme

$$F(x, \psi x, \psi^2 x, \ldots, \psi^n x) = 0;$$

il commence par l'exposé de la méthode générale de Herschel pour l'intégration des équations de première classe et de $n^{\text{ième}}$ ordre de la forme

$$F(x, \psi x, \psi^2 x, \ldots, \psi^n x) = 0,$$

et du procédé particulier de Herschel pour l'intégration de l'équation

$$\psi^n x = f x,$$

(¹) Schröder, *Ueber iterirte Functionen*. (*Math. Annalen*.)

où il se borne à la théorie des fonctions réciproques, c'est-à-dire de celles qui satisfont à l'équation

$$\psi^n(x) = x.$$

Dans le Chapitre suivant, l'auteur expose la méthode de Laplace pour l'intégration des équations de deuxième classe et de premier ordre, de la forme

$$F[x, \psi\alpha(x), \psi\beta(x)] = 0,$$

et il applique cette théorie à la solution du problème connu de Babbage, relatif à la recherche d'une fonction $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions

$$\psi(x) = \psi\alpha_1(x) = \psi\alpha_2(x) = \ldots = \psi\alpha_n(x).$$

A l'aide de considérations qui lui sont propres, l'auteur étend la méthode de Laplace aux équations de $n^{\text{ième}}$ classe

$$F[x, \psi\alpha_1(x), \psi\alpha_2(x), \ldots, \psi\alpha_n(x)] = 0,$$

et démontre comment le problème se simplifie dans le cas où les équations sont de la forme

$$F[\psi\alpha_1(x), \psi\alpha_2(x), \ldots, \psi\alpha_n(x)] = 0.$$

Il donne ensuite une méthode de résolution des équations de classes et d'ordres supérieurs, fait quelques remarques sur les équations à exposants fractionnaires, et examine certaines formes particulières des équations fonctionnelles, déjà indiquées par Babbage,

$$\psi\{\alpha[\psi\beta(x)]\} = \gamma(x), \quad \psi\alpha(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

Dans le dernier Chapitre, l'auteur expose la théorie des équations fonctionnelles simultanées

$$F_1[x, \psi\alpha(x), \psi\beta(x)] = 0,$$
$$F_2[x, \psi\alpha_1(x), \psi\beta_1(x)] = 0.$$

Le contenu de ce Chapitre est aussi un travail original de l'auteur.

Nous croyons que le Mémoire de M. Liventsof donne, on pourrait presque le dire, le premier exemple sur le Continent d'un exposé systématique de cette branche des Mathématiques.

N.-V. Bougaïef.

MÉLANGES.

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES ENTIERS ALGÉBRIQUES (¹);

PAR R. DEDEKIND.

(Suite.)

III.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES NOMBRES ALGÉBRIQUES ENTIERS.

Dans cette Section nous considérerons d'abord le domaine de tous les nombres algébriques entiers ; nous introduirons ensuite la notion du corps fini Ω, et nous déterminerons la constitution du domaine $\mathfrak{o}$, composé de tous les nombres entiers du corps Ω.

§ 13. — *Le domaine de tous les nombres algébriques entiers.*

Un nombre réel ou complexe θ sera dit un nombre *algébrique*, lorsqu'il satisfera à une équation

$$\theta^n + a_1\theta^{n-1} + a_2\theta^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\theta + a_n = 0,$$

de degré fini n et à coefficients rationnels $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$; si cette équation a pour coefficients des nombres *rationnels entiers*, c'est-à-dire des nombres de la suite $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \theta$ sera dit un nombre *algébrique entier*, ou simplement un nombre *entier*. Il

(¹) Voir *Bulletin*, t. XI, p. 278, et t. I (2ᵉ Série), p. 17.

est clair que les nombres rationnels entiers appartiennent également aux nombres algébriques entiers, et que, réciproquement, si un nombre rationnel θ est en même temps un nombre algébrique entier, il sera aussi, en vertu d'un théorème connu, contenu dans le domaine des nombres rationnels entiers $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. De la définition des nombres entiers on tire encore aisément les propositions suivantes :

1° Les nombres entiers se reproduisent par addition, soustraction et multiplication, c'est-à-dire que les sommes, les différences et les produits de deux nombres entiers quelconques α, β sont aussi des nombres entiers.

Démonstration. — Par suite de l'hypothèse, il existe deux équations de la forme

$$\varphi(\alpha) = \alpha^a + p_1\alpha^{a-1} + \ldots + p_{a-1}\alpha + p_a = 0,$$
$$\psi(\beta) = \beta^b + q_1\beta^{b-1} + \ldots + q_{b-1}\beta + q_b = 0,$$

dans lesquelles tous les coefficients p, q sont des nombres rationnels entiers. Posons maintenant $ab = n$, et désignons par ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$ tous les n produits $\alpha^{a'}\beta^{b'}$, formés avec l'un des a nombres

$$1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \quad \ldots, \quad \alpha^{a-1},$$

et l'un des b nombres

$$1, \quad \beta, \quad \beta^2, \quad \ldots, \quad \beta^{b-1}.$$

En représentant maintenant par ω l'un des trois nombres $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, on voit facilement que chacun des n produits $\omega\omega_1$, $\omega\omega_2, \ldots, \omega\omega_n$ peut se ramener soit immédiatement, soit à l'aide des équations $\varphi(\alpha) = 0$, $\psi(\beta) = 0$, à la forme

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n,$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ étant des nombres rationnels *entiers;* on a donc n équations de la forme

$$\omega\omega_1 = h'_1\,\omega_1 + h'_2\,\omega_2 + \ldots + h'_n\,\omega_n,$$
$$\omega\omega_2 = h''_1\,\omega_1 + h''_2\,\omega_2 + \ldots + h''_n\,\omega_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\omega\omega_n = h_1^{(n)}\omega_1 + h_2^{(n)}\omega_2 + \ldots + h_n^{(n)}\omega_n,$$

tous les coefficients k étant des nombres rationnels entiers; mais, par l'élimination des n nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, parmi lesquels se trouve aussi le nombre 1, différent de zéro, on tire de là l'équation

$$\begin{vmatrix} k'_1 - \omega & k'_2 & \ldots & k'_n \\ k''_1 & k''_2 - \omega & \ldots & k''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{(n)} & k_2^{(n)} & \ldots & k_n^{(n)} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

qui est évidemment de la forme

$$\omega^n + e_1\omega^{n-1} + \ldots + e_{n-1}\omega + e_n = 0,$$

où les n coefficients e sont formés par addition, soustraction et multiplication au moyen des nombres k, et par suite sont des nombres rationnels entiers. Donc ω, et partant chacun des trois nombres $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$ est un nombre entier. C. Q. F. D.

2° Toute racine ω d'une équation de la forme

$$F(\omega) = \omega^m + \alpha\omega^{m-1} + \beta\omega^{m-2} + \ldots + \varepsilon = 0,$$

dont le coefficient du terme le plus élevé est l'unité, les autres coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ étant des nombres entiers, est pareillement un nombre entier.

Démonstration. — Par suite de l'hypothèse, les coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ sont racines d'équations

$$\varphi(\alpha) = \alpha^a + p_1\alpha^{a-1} + \ldots + p_a = 0,$$
$$\psi(\beta) = \beta^b + q_1\beta^{b-1} + \ldots + q_b = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\chi(\varepsilon) = \varepsilon^e + s_1\varepsilon^{e-1} + \ldots + s_e = 0,$$

où tous les coefficients $p, q, \ldots, s$ désignent des nombres rationnels entiers. En posant maintenant $n = mab\ldots e$, et désignant par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ tous les n produits de la forme

$$\omega^{m'}\alpha^{a'}\beta^{b'}\ldots\varepsilon^{e'},$$

où les exposants rationnels entiers satisfont aux conditions

$$0 \leq m' < m, \quad 0 \leq a' < a, \quad 0 \leq b' < b, \quad \ldots, \quad 0 \leq e' < e,$$

il est facile de s'assurer que chacun des produits $\omega\omega_1, \omega\omega_2, \ldots, \omega\omega_n$ peut, soit immédiatement, soit à l'aide des équations $F(\omega) = 0$, $\varphi(\alpha) = 0, \psi(\beta) = 0, \ldots, \chi(\varepsilon) = 0$, se ramener à la forme

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n,$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ représentant des nombres rationnels entiers. Or il suit de là, comme dans la démonstration du théorème précédent, que ω est un nombre entier. C. Q. F. D.

Du dernier théorème il résulte, par exemple, que, si α désigne un nombre entier quelconque, et r, s des nombres rationnels entiers positifs, $\sqrt[s]{\alpha^r}$ sera aussi un nombre entier.

§ 14. — *La divisibilité des nombres entiers.*

Nous dirons qu'un nombre entier α est *divisible* par un nombre entier β, lorsqu'on aura $\alpha = \beta\gamma$, γ étant également un nombre entier. Nous exprimerons encore la même chose en disant que α est un multiple de β, ou que β divise α, ou que β est un facteur ou un diviseur de α. De cette définition et du théorème 1° du § 13 résultent, comme nous l'avons déjà fait voir dans l'*Introduction*, ces deux propositions élémentaires :

1° Si α, α' sont divisibles par μ, $\alpha + \alpha'$ et $\alpha - \alpha'$ seront aussi divisibles par μ ;

2° Si α' est divisible par α et α divisible par μ, α' sera aussi divisible par μ.

Mais il faut accorder une attention particulière aux *unités*, c'est-à-dire aux nombres entiers qui divisent *tous* les nombres entiers; une unité ε devra ainsi diviser le nombre 1, et réciproquement il est évident que tout diviseur ε du nombre 1 est une unité, puisque tout nombre entier est divisible par l'unité 1, et par suite aussi (en vertu de la proposition 2° ci-dessus) divisible par ε. On voit en même temps que tout produit ou tout quotient de deux unités est lui-même une unité.

Si chacun des deux nombres entiers α et α', différents de zéro, est divisible par l'autre, on aura $\alpha' = \alpha\varepsilon$, ε étant une unité; et réciproquement, si ε est une unité, chacun des deux nombres entiers α et $\alpha' = \alpha\varepsilon$ sera divisible par l'autre. Nous donnerons à deux

nombres de cette nature α, α' le nom d'*associés*, et il est clair que deux nombres quelconques associés avec un troisième sont associés entre eux. Dans toutes les questions qui se rapportent seulement à la divisibilité, tous les nombres associés se comportent comme un seul et même nombre; si, en effet, α est divisible par β, tout nombre associé avec α sera aussi divisible par tout nombre associé avec β.

Un examen plus approfondi ferait voir que deux nombres entiers, α, β, qui ne sont pas tous les deux nuls, ont un *plus grand commun diviseur*, qui peut se mettre sous la forme $\alpha\alpha' + \beta\beta'$, et α' et β' étant des nombres entiers. Mais ce théorème important n'est nullement facile à démontrer à l'aide des principes exposés jusqu'ici, tandis que plus tard (§ 30) on pourra le déduire très-simplement de la théorie des idéaux. Je terminerai donc ces considérations préliminaires sur le domaine de *tous* les nombres entiers, par cette remarque, qu'il n'existe dans ce domaine absolument aucun nombre possédant le caractère des *nombres premiers*; car, si α est un nombre entier quelconque différent de zéro, et qui ne soit non plus une unité, on pourra le décomposer d'une infinité de manières en facteurs qui seront des nombres entiers et qui en même temps ne seront pas des unités; ainsi, par exemple, on a $\alpha = \sqrt{\alpha}.\sqrt{\alpha}$, ou encore $\alpha = \beta_1 \beta_2$, β_1 et β_2 étant les deux racines β de l'équation $\beta^2 - \beta + \alpha = 0$; or il résulte du théorème 2° du § 13 que $\sqrt{\alpha}$, β_1, β_2 sont des nombres entiers en même temps que α.

§ 15. — *Corps finis.*

La propriété d'être décomposables d'une infinité de manières, que nous venons de signaler et qui se présente dans le domaine comprenant tous les nombres entiers, disparaît de nouveau dès que l'on se borne à considérer les nombres entiers renfermés dans un *corps fini*. Il faut d'abord définir l'étendue et la nature d'un tel corps.

Tout nombre algébrique θ, que ce soit ou non un nombre entier, satisfait évidemment à une infinité d'équations différentes à coefficients rationnels, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de fonctions en-

tières $F(t)$ d'une variable t qui s'évanouissent pour $t = \theta$, et dont les coefficients sont rationnels. Mais, parmi toutes ces fonctions $F(t)$, il doit nécessairement y en avoir une $f(t)$ dont le degré n soit *le plus petit possible*, et de la méthode connue de la division de ces sortes de fonctions il résulte immédiatement que chacune des fonctions $F(t)$ doit être divisible algébriquement par cette fonction $f(t)$, et que $f(t)$ ne peut être divisible par aucune fonction entière de degré moindre à coefficients rationnels. Pour cette raison, la fonction $f(t)$ et aussi l'équation $f(\theta) = 0$ seront appelées *irréductibles*, et il est clair, en même temps, que les n nombres $1, \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}$ formeront un *système irréductible* (§ 4, 1°).

Considérons maintenant l'ensemble Ω de tous les nombres ω de la forme $\varphi(\theta)$, en désignant par

$$\varphi(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \ldots + x_{n-1} t^{n-1}$$

toute fonction entière quelconque de t à coefficients rationnels, entiers ou fractionnaires, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, dont le degré est $< n$, et remarquons d'abord que tout nombre de cette espèce $\omega = \varphi(\theta)$, en vertu de l'irréductibilité de $f(t)$, ne peut se mettre sous cette forme que d'une seule manière. On fait voir ensuite aisément que ces nombres ω se reproduisent toujours par les *opérations rationnelles*, c'est-à-dire par addition, soustraction, multiplication et division. Pour les deux premières opérations, cela résulte évidemment de la forme commune $\varphi(\theta)$ de tous les nombres ω, et pour la multiplication il suffit de remarquer que tout nombre de la forme $\psi(\theta)$, $\psi(t)$ étant une fonction entière de degré *quelconque*, à coefficients rationnels, est également un nombre ω; car, si l'on divise $\psi(t)$ par $f(t)$, le reste de la division sera une fonction $\varphi(t)$ de l'espèce indiquée plus haut, et l'on aura en même temps $\psi(\theta) = \varphi(\theta)$. Pour traiter enfin le cas de la division, on n'a plus qu'à faire voir encore que, si $\omega = \varphi(\theta)$ est différent de zéro, sa valeur réciproque ω^{-1} appartient aussi au système Ω; or $\varphi(t)$ n'ayant aucun diviseur commun avec la fonction irréductible $f(t)$, la méthode par laquelle on chercherait le plus grand commun diviseur des fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$ fournit, comme on sait, deux fonctions entières $f_1(t)$, $\varphi_1(t)$, à coefficients rationnels, qui satisfont à l'i-

dentité

$$f(t)f_1(t)+\varphi(t)\varphi_1(t)=1,$$

d'où résulte, pour $t=\theta$, la vérité de l'énoncé précédent.

J'appellerai *corps* tout système A de nombres a (ne s'annulant pas tous), tel que les sommes, les différences, les produits et les quotients de deux quelconques de ces nombres a appartiennent au système A. L'exemple le plus simple d'un corps est celui du système de tous les nombres rationnels, et il est aisé de reconnaitre que ce corps est contenu dans tout autre corps A; car, si l'on choisit à volonté un nombre a du corps A, différent de zéro, il faut, suivant la définition, que le quotient 1 des deux nombres a et a appartienne également au corps A, d'où résulte immédiatement la proposition énoncée, tous les nombres rationnels pouvant être engendrés au moyen du nombre 1 par des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions répétées.

D'après ce que nous avons démontré plus haut relativement aux nombres $\omega=\varphi(\theta)$, notre système Ω formera donc aussi un corps; les nombres rationnels se tirent de $\varphi(\theta)$, en annulant tous les coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ qui suivent x_0. Un corps Ω qui est produit, de la manière indiquée, par une équation irréductible $f(\theta)=0$ du degré n, nous l'appellerons un corps *fini* [1], et le nombre n sera dit son *degré*. Un tel corps Ω contient n nombres indépendants entre eux, par exemple, les nombres $1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}$, tandis que $n+1$ nombres quelconques du corps formeront évidemment un système réductible (§ 4, 1°); cette propriété, jointe à la notion de corps, pourrait aussi servir de définition pour un corps Ω du $n^{\text{ième}}$ degré; je n'entrerai pas toutefois dans la démonstration de cette assertion.

Si l'on choisit maintenant arbitrairement n nombres

$$\omega_1=\varphi_1(\theta),\quad \omega_2=\varphi_2(\theta),\quad \ldots,\quad \omega_n=\varphi_n(\theta)$$

---

[1] Si l'on entend par diviseur d'un corps A tout corps B dont tous les nombres sont contenus aussi dans A, un corps fini pourra être encore défini comme un corps qui ne possède qu'un nombre fini de diviseurs. En employant ici le mot *diviseur* (et le mot *multiple*) dans un sens directement opposé à celui que nous lui avons attaché, en parlant des modules et des idéaux, il ne pourra sûrement en résulter aucune confusion.

du corps Ω, ces nombres (d'après le § 4, 2°) formeront toujours, et seulement alors, un système irréductible, lorsque le déterminant formé avec les n^2 coefficients rationnels x sera différent de zéro; dans ce cas, nous appellerons le système des n nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ une *base du corps* Ω; alors il est évident que tout nombre $\omega = \varphi(\theta)$ peut toujours, et d'une seule manière, se mettre sous la forme

$$\omega = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n,$$

les coefficients $h_1, h_2, \ldots, h_n$ étant des nombres rationnels, entiers ou fractionnaires, et réciproquement, tous les nombres ω de cette forme sont contenus dans Ω; les coefficients rationnels $h_1, h_2, \ldots, h_n$ seront dits les *coordonnées du nombre* ω par rapport à cette base.

§ 16. — *Corps conjugués.*

On entend ordinairement par *substitution* un acte par lequel les objets d'une étude ou les éléments d'une recherche sont remplacés par des objets ou des éléments correspondants, et l'on dit que les anciens éléments se changent, par la substitution, dans les nouveaux éléments. Soit maintenant Ω un corps *quelconque;* nous entendrons par une *permutation de* Ω une substitution par laquelle chaque nombre déterminé contenu dans Ω,

$$\alpha, \quad \beta, \quad \alpha+\beta, \quad \alpha-\beta, \quad \alpha\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta},$$

se change dans un nombre déterminé correspondant

$$\alpha', \quad \beta', \quad (\alpha+\beta)', \quad (\alpha-\beta)', \quad (\alpha\beta)', \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)',$$

et cela de telle manière que les deux conditions

$$(1) \qquad (\alpha+\beta)' = \alpha' + \beta',$$

$$(2) \qquad (\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$$

soient remplies, et que les nombres substitués $\alpha', \beta', \ldots$ ne s'annulent pas tous. Nous allons faire voir que l'ensemble Ω' de ces derniers nombres forme un nouveau *corps*, et que la permutation sa-

tisfait aussi aux deux conditions suivantes :

$$(3) \qquad (\alpha-\beta)'=\alpha'-\beta',$$

$$(4) \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)'=\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Si l'on désigne, en effet, par α', β' deux nombres quelconques du système Ω', il existera dans le corps Ω deux nombres α, β, qui par la permutation se changeront respectivement en α', β'; or les nombres $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ étant également contenus dans Ω, il résulte de (1) et de (2) que les nombres $\alpha'+\beta'$, $\alpha'\beta'$ seront aussi contenus dans Ω'; donc les nombres du système Ω' se produisent par addition et multiplication. De plus, les nombres $\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$ et $\alpha-\beta$ étant pareillement contenus dans Ω, il résulte de (1) que

$$\alpha'=(\alpha-\beta)'+\beta',$$

ce qui constitue la condition (3); donc les nombres du système Ω' se reproduisent aussi par soustraction. Enfin, si β' est différent de zéro, alors, en vertu de (1), β sera aussi différent de zéro, et par suite $\frac{\alpha}{\beta}$ est un nombre déterminé appartenant au corps Ω; comme on a maintenant $\alpha=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\beta$, il résulte de (2) que l'on a aussi $\alpha'=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)'\beta'$, ce qui constitue la condition (4); donc les nombres du système Ω' se reproduisent aussi par division, et par suite Ω' est un corps.

C. Q. F. D.

Remarquons maintenant, de plus, que, si $\beta'=0$, on devra avoir aussi $\beta=0$; car autrement *tout* nombre α du corps Ω pourrait se mettre sous la forme $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\beta$, d'où résulterait $\alpha'=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)'\beta'=0$, tandis que nous avons, au contraire, admis que les nombres α' du système Ω' ne s'annulent pas tous. Il suit de là évidemment, en ayant égard à (3), que, par une permutation, deux nombres *différents* α, β du corps Ω se changeront aussi en deux nombres *différents* α', β' du corps Ω', et qu'ainsi chaque nombre déterminé α' du corps Ω' ne correspond qu'à un seul nombre complétement déterminé α du corps Ω. La correspondance peut donc être renversée d'une manière univoque, et la substitution par laquelle chaque nombre déterminé α' du corps Ω' se changera dans le nombre cor-

respondant α du corps Ω sera une *permutation du corps* Ω', puisqu'elle satisfera aux conditions caractéristiques (1) et (2). Chacune de ces deux permutations sera dite l'*inverse* de l'autre; nous appellerons, de plus, Ω et Ω' des *corps conjugués*, et de même deux nombres correspondants quelconques α, α' des *nombres conjugués*. Il existe évidemment pour chaque corps Ω une permutation que nous nommerons la permutation *identique* de Ω, et qui consiste en ce que chaque nombre du corps Ω sera remplacé par lui-même; donc tout corps est conjugué à lui-même. En outre, il est facile de s'assurer que deux corps conjugués à un troisième sont aussi conjugués entre eux; car, si chaque nombre α du corps Ω se change, par une permutation P, en un nombre α' du corps Ω', et que pareillement chaque nombre α' de ce dernier se change, par une permutation P', en un nombre α'' du corps Ω'', il est clair que la substitution par laquelle chaque nombre α du corps Ω se change dans le nombre correspondant α'' du corps Ω'' est également une *permutation* du corps Ω, et nous la désignerons par PP'. Si l'on désigne par P^{-1} la permutation inverse de P, alors PP^{-1} sera la permutation identique de Ω, et Ω'' se changera en Ω par la permutation

$$(PP')^{-1} = P'^{-1}P^{-1}.$$

Nous avons déjà remarqué que chaque corps renferme tous les nombres rationnels, et il est aisé de montrer que chacun de ceux-ci, par une permutation du corps, se change toujours en lui-même; car, si l'on prend $\alpha = \beta$, il résulte de (4) que l'on aura $1' = 1$; or, tout nombre rationnel pouvant être engendré du nombre 1 par une série d'opérations rationnelles, notre proposition s'ensuit immédiatement des propriétés (1), (2), (3), (4). Soit de plus θ un nombre quelconque du corps Ω, et $R(t)$ une fonction rationnelle quelconque de la variable t à coefficients rationnels; le nombre $\omega = R(\theta)$, au cas où le dénominateur de la fonction $R(t)$ ne s'annule pas pour $t = \theta$, sera aussi contenu dans Ω, et si, par une permutation du corps, θ se change dans le nombre θ', alors le nombre ω, étant formé par des opérations rationnelles exécutées sur le nombre θ et sur les coefficients rationnels de $R(t)$, se changera, par la même permutation, dans le nombre $\omega' = R(\theta')$. De là résulte immédiatement que, si θ est un nombre algébrique et satisfait, par suite, à une équation de la forme $0 = F(\theta)$ dont les coefficients soient

des nombres rationnels, on devra avoir aussi $0 = F(\theta')$; donc tout nombre θ' conjugué à un nombre algébrique θ est également un nombre algébrique; et si θ est un nombre entier, θ' sera aussi un nombre entier.

Après ces considérations générales, qui sont relatives à *tous* les corps, revenons à notre exemple, où il s'agit d'un corps fini Ω, de degré n, et proposons-nous le problème de trouver *toutes* les permutations de Ω. Tous les nombres ω d'un tel corps Ω étant, d'après le § 15, de la forme $\varphi(\theta)$, θ désignant une racine d'une équation irréductible $0 = f(\theta)$ du degré n, une permutation de Ω, en vertu de ce qui précède, sera déjà complétement déterminée par le choix de la racine θ' de l'équation $0 = f(\theta')$, dans laquelle θ se change, puisqu'en même temps tout nombre $\omega = \varphi(\theta)$ devra se changer en $\omega' = \varphi(\theta')$. Réciproquement, si l'on choisit pour θ' une racine quelconque de l'équation $0 = f(\theta')$, et que l'on remplace chaque nombre $\omega = \varphi(\theta)$ du corps Ω par le nombre correspondant $\omega' = \varphi(\theta')$, cette substitution sera réellement une permutation de Ω, c'est-à-dire qu'elle satisfera aux conditions (1) et (2). Pour le démontrer, désignons par $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... des fonctions spéciales quelconques, de la forme $\varphi(t)$; si l'on a maintenant

$$\alpha = \varphi_1(\theta), \quad \beta = \varphi_2(\theta), \quad \alpha + \beta = \varphi_3(\theta), \quad \alpha\beta = \varphi_4(\theta),$$

et par suite

$$\alpha' = \varphi_1(\theta'), \quad \beta' = \varphi_2(\theta'), \quad (\alpha + \beta)' = \varphi_3(\theta'), \quad (\alpha\beta)' = \varphi_4(\theta'),$$

il résulte des équations

$$\varphi_3(\theta) = \varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta), \quad \varphi_4(\theta) = \varphi_1(\theta)\varphi_2(\theta),$$

et de l'irréductibilité de la fonction $f(t)$, que l'on aura identiquement

$$\varphi_3(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \quad \varphi_4(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) + \varphi_5(t)f(t),$$

ce qui donne, en faisant $t = \theta'$, les équations (1) et (2) qu'il s'agissait de démontrer. Si donc on pose

$$f(t) = (t - \theta')(t - \theta'')\ldots(t - \theta^{(n)}),$$

les n racines $\theta', \theta'', \ldots, \theta^{(n)}$ seront inégales, puisque la fonction

irréductible $f(t)$ ne peut avoir aucun diviseur commun avec sa dérivée $f'(t)$, et à chacune d'elles correspondra une permutation P', P'', ..., $P^{(n)}$ du corps Ω, de telle manière que, par la permutation $P^{(r)}$, chaque nombre $\omega = \varphi(\theta)$ du corps Ω se change dans le nombre conjugué $\omega^{(r)} = \varphi(\theta^{(r)})$ du corps conjugué $\Omega^{(r)}$. Pour éviter les malentendus, nous ferons observer que ces n corps conjugués $\Omega^{(r)}$, bien qu'ils se déduisent de Ω par n permutations *différentes*, peuvent très-bien être cependant identiques entre eux quant à l'ensemble des nombres qu'ils contiennent, soit en partie, soit en totalité; s'ils sont tous identiques, Ω sera dit un *corps de Galois* ou bien un *corps normal*. Les principes algébriques de Galois consistent en ce que l'étude des corps finis quelconques est ramenée à celle des corps normaux; mais le manque d'espace ne me permet pas maintenant de m'étendre davantage sur ce sujet.

§ 17. — *Normes et discriminants.*

Par la *norme* $N(\omega)$ d'un nombre quelconque ω du corps Ω de degré n nous entendrons le produit

(1) $$N(\omega) = \omega'\omega'' \ldots \omega^{(n)}$$

des n nombres conjugués ω', ω'', ..., $\omega^{(n)}$, dans lesquels ω se change par les permutations P', P'', ..., $P^{(n)}$. Elle ne peut s'annuler que si l'on a $\omega = 0$. Si ω est un nombre rationnel, alors tous les n nombres $\omega^{(r)}$ seront égaux à ω, et par suite la norme d'un nombre rationnel est la $n^{\text{ième}}$ puissance de ce nombre. Si α, β sont deux nombres quelconques du corps Ω, on aura $(\alpha\beta)^{(r)} = \alpha^{(r)}\beta^{(r)}$, et par conséquent

(2) $$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta).$$

Par le *discriminant* $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ d'un système quelconque de n nombres α_1, α_2, ..., α_n du corps Ω, nous entendrons le carré

(3) $$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\Sigma \pm \alpha'_1 \alpha''_2 \ldots \alpha_n^{(n)})^2$$

du déterminant formé avec les n^2 nombres $\alpha_i^{(r)}$. De là résulte, en vertu d'une proposition bien connue de la théorie des détermi-

nants, la relation

$$(4) \qquad \Delta(1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} N[f'(\theta)],$$

et comme $f'(\theta)$ ne peut pas, à cause de l'irréductibilité de la fonction $f(t)$, devenir égale à zéro, il s'ensuit que le discriminant (4) a une valeur différente de zéro.

Si maintenant les n nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ forment une *base* du corps Ω (§ 15), et que

$$\omega = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n,$$

soit un nombre quelconque de ce corps, alors, puisque ses coordonnées $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sont des nombres rationnels, la permutation $P^{(r)}$ changera ω dans le nombre

$$\omega^{(r)} = h_1\omega_1^{(r)} + h_2\omega_2^{(r)} + \ldots + h_n\omega_n^{(r)},$$

et l'on tire de là

$$(5) \qquad \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a^2\Delta(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$

a désignant le déterminant formé avec les n^2 coordonnées des n nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. On en conclut d'abord que le discriminant de la base $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ne peut s'évanouir, parce que, autrement, *tout* discriminant devrait s'évanouir, tandis que, au contraire, on a fait voir plus haut que $\Delta(1, \theta, \ldots, \theta^{n-1})$ est différent de zéro. Il s'ensuit en même temps que $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ s'annule toujours, et seulement alors quand les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont dépendants les uns des autres (§ 4, 2°), et par suite ne forment pas une base de Ω.

Puisque les nombres du corps se reproduisent par multiplication, on pourra poser, μ étant un nombre quelconque compris dans Ω,

$$(6) \qquad \begin{cases} \mu\omega_1 = m_{1,1}\omega_1 + m_{2,1}\omega_2 + \ldots + m_{n,1}\omega_n, \\ \mu\omega_2 = m_{1,2}\omega_1 + m_{2,2}\omega_2 + \ldots + m_{n,2}\omega_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu\omega_n = m_{1,n}\omega_1 + m_{2,n}\omega_2 + \ldots + m_{n,n}\omega_n, \end{cases}$$

où les n^2 coordonnées $m_{i,i'}$ sont des nombres rationnels; de là ré-

sultent, par les n permutations $P^{(r)}$, n^2 nouveaux nombres de la forme

$$\mu^{(r)}\omega_i^{(r)} = m_{1,i}\omega_1^{(r)} + m_{2,i}\omega_2^{(r)} + \ldots + m_{n,i}\omega_n^{(r)},$$

et, comme leur déterminant est

$$N(\mu)\Sigma \pm \omega_1' \omega_2'' \ldots \omega_n^{(n)} = \Sigma \pm m_{1,1} m_{2,2} \ldots m_{n,n}. \Sigma \pm \omega_1' \omega_2'' \ldots \omega_n^{(n)},$$

on en conclut

$$(7) \qquad N(\mu) = \Sigma \pm m_{1,1} m_{2,2} \ldots m_{n,n},$$

puisque le déterminant

$$\Sigma \pm \omega_1' \omega_2'' \ldots \omega_n^{(n)} = \sqrt{\Delta(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}$$

n'est pas nul.

Il suit de là que toute norme est un nombre *rationnel*, et la même conséquence, en vertu de (4) et (5), s'applique aussi à tout discriminant; ces deux propositions auraient pu aussi se déduire de la théorie de la transformation des fonctions symétriques, dont j'ai, à dessein, évité ici de me servir.

Si l'on remplace, dans les équations (6), le nombre μ par $\mu - z$, z étant un nombre rationnel quelconque, les coordonnées $m_{i,i'}$ n'éprouveront aucun changement, à l'exception des coordonnées $m_{i,i}$, qui se trouvent sur la diagonale, et qui devront être remplacées par $m_{i,i} - z$. Le théorème (7) se trouve ainsi changé dans l'égalité

$$\begin{vmatrix} m_{1,1} - z & m_{2,1} & \ldots & m_{n,1} \\ m_{1,2} & m_{2,2} - z & \ldots & m_{n,2} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ m_{1,n} & m_{2,n} & \ldots & m_{n,n} - z \end{vmatrix} = (\mu' - z)(\mu'' - z)\ldots(\mu^{(n)} - z),$$

laquelle, ayant lieu pour *toute* valeur rationnelle de z, devra nécessairement être une *identité* relativement à z. On voit en même temps que les n nombres μ', μ'', ..., $\mu^{(n)}$, conjugués à un nombre μ, forment l'ensemble des racines d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, dont les coefficients sont des nombres rationnels.

§ 18. — *Le domaine* $\mathfrak{o}$ *de tous les nombres entiers d'un corps fini* Ω.

Après ces préliminaires, nous allons passer à l'objet même que nous avons en vue, savoir, la considération de tous les nombres *entiers* contenus dans le corps Ω du degré n, nombres dont nous désignerons l'ensemble par $\mathfrak{o}$. Puisque les sommes, les différences et les produits de deux nombres entiers quelconques (d'après le § 13, 1°) sont encore des nombres entiers et (en vertu du § 15) sont aussi compris dans Ω, les nombres du domaine $\mathfrak{o}$, parmi lesquels se trouvent aussi tous les nombres *rationnels* entiers, se reproduiront aussi par addition, soustraction et multiplication. Mais il s'agit avant tout de mettre tous ces nombres sous une forme commune et simple. On y est conduit par les considérations suivantes :

Tout nombre algébrique ω étant racine d'une équation de la forme

$$c\omega^m + c_1\omega^{m-1} + \ldots + c_{m-1}\omega + c_m = 0,$$

dont les coefficients $c, c_1, \ldots, c_{m-1}, c_m$ sont des nombres rationnels entiers, il en résulte, en multipliant par c^{m-1}, que tout nombre ω de cette espèce au moyen de la multiplication par un nombre rationnel entier c, différent de zéro, peut être changé en un nombre entier $c\omega$. Si maintenant les n nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ forment une base du corps Ω, on pourra prendre les nombres rationnels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, différents de zéro, de telle manière que les n nombres

$$\alpha_1 = a_1\omega_1, \quad \alpha_2 = a_2\omega_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n = a_n\omega_n$$

deviennent des nombres *entiers*, et ceux-ci évidemment formeront encore une base du corps Ω, puisqu'ils sont (en vertu du § 4, 2°) indépendants les uns des autres. Par conséquent (d'après le § 17), leur discriminant $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sera un nombre rationnel, et même *entier*, différent de zéro, puisque, suivant sa définition, il est formé par addition, soustraction et multiplication de nombres tous entiers $\alpha_i^{(r)}$. On obtient, de plus, tous les nombres ω du corps Ω, en faisant prendre, dans l'expression

$$\omega = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n,$$

aux coefficients $x_1, x_2, \ldots, x_n$ toutes les valeurs rationnelles; si on ne leur attribue que des valeurs rationnelles *entières*, on est certain alors de n'obtenir que des nombres *entiers* ω (§ 13, 1°); mais il est très-possible que l'on ne puisse pas représenter de cette manière *tous* les nombres entiers du corps Ω. A ce cas se rapporte ce théorème très-important :

S'il existe un nombre entier β de la forme

$$\beta = \frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n}{k},$$

$k, k_1, k_2, \ldots, k_n$ étant des nombres rationnels entiers sans diviseur commun, il existera une base du corps Ω, formée de n nombres entiers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, qui satisfera à la condition

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = k^2\Delta(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Démonstration. — Puisque $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres entiers, ils formeront la base d'un module $\mathfrak{b} = [\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, ne contenant que des nombres entiers du corps Ω; mais comme, de ces $n+1$ nombres, n seulement sont indépendants entre eux, il existera (§ 4, 5°) n nombres indépendants $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, qui formeront une base du même module $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$, et qui seront, par suite, des nombres entiers du corps. On aura donc $n+1$ égalités de la forme

$$\begin{aligned}
\beta &= c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_n\beta_n,\\
\alpha_1 &= c_{1,1}\beta_1 + c_{2,1}\beta_2 + \ldots + c_{n,1}\beta_n,\\
\alpha_2 &= c_{1,2}\beta_1 + c_{2,2}\beta_2 + \ldots + c_{n,2}\beta_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_n &= c_{1,n}\beta_1 + c_{2,n}\beta_2 + \ldots + c_{n,n}\beta_n,
\end{aligned}$$

dont tous les $n(n+1)$ coefficients seront des nombres rationnels entiers, et en même temps seront tels que les $n+1$ déterminants partiels du $n^{\text{ième}}$ degré que l'on peut former par la suppression d'une ligne horizontale quelconque n'auront *aucun* diviseur commun (§ 4, 6°). Si l'on pose

$$\sum \pm c_{1,1}c_{2,2}\ldots c_{n,n} = c,$$

on aura [§ 17 (5)]

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = c^2\Delta(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Or, en substituant les expressions précédentes de β, α_1, α_2, ..., α_n dans l'équation $k\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n$, et observant que β_1, β_2, ..., β_n sont indépendants entre eux, il en résulte

$$\begin{aligned} kc_1 &= k_1c_{1,1} + k_2c_{1,2} + \ldots + k_nc_{1,n}, \\ kc_2 &= k_1c_{2,1} + k_2c_{2,2} + \ldots + k_nc_{2,n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ kc_n &= k_1c_{n,1} + k_2c_{n,2} + \ldots + k_nc_{n,n}; \end{aligned}$$

si l'on remplace maintenant les éléments

$$c_{1,r}, \quad c_{2,r}, \quad \ldots, \quad c_{n,r}$$

de la $r^{\text{ième}}$ ligne horizontale du déterminant c respectivement par les éléments

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n,$$

on conclura des équations précédentes, en vertu d'un théorème connu, que le déterminant partiel ainsi obtenu a pour valeur $\frac{ck_r}{k}$. Donc les $n+1$ quantités

$$\frac{ck}{k}, \quad \frac{ck_1}{k}, \quad \frac{ck_2}{k}, \quad \ldots, \quad \frac{ck_n}{k}$$

sont des nombres rationnels entiers sans diviseur commun, et comme il en est de même des $n+1$ nombres k, k_1, k_2, ..., k_n, il faut donc que l'on ait $c = \pm k$. C. Q. F. D.

Si l'on a $k > 1$, et qu'ainsi le nombre entier β ne soit pas contenu dans le module $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, il existera donc une base du corps, composée de n nombres entiers β_1, β_2, ..., β_n, dont le discriminant $\Delta(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, pris en valeur absolue, sera $< \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Or, puisque, comme on l'a montré plus haut, le discriminant de toute base du corps Ω composée de nombres entiers est un nombre rationnel entier différent de zéro, il devra exister aussi une telle base ω_1, ω_2, ..., ω_n, dont le discriminant

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = D,$$

pris en valeur absolue, aura la valeur *minimum*, et de ce qui précède, il s'ensuit immédiatement que, relativement à une telle base, tout nombre entier

$$\omega = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n$$

du corps Ω devra nécessairement avoir pour coordonnées des nombres *entiers* $h_1, h_2, \ldots, h_n$, et qu'un nombre entier ω n'est divisible par un nombre rationnel entier k que si toutes ses coordonnées sont divisibles par k. Comme, réciproquement, tout système de coordonnées entières $h_1, h_2, \ldots, h_n$ produit toujours un nombre entier ω, *l'ensemble* $\mathfrak{o}$ *de tous les nombres entiers du corps* Ω *est identique avec le module fini* $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$ dont la base se compose des n nombres entiers indépendants ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_r$.

Le discriminant D d'une telle base est un invariant du corps Ω, d'une importance fondamentale; nous l'appellerons pour cette raison le *nombre fondamental* ou le *discriminant du corps* Ω, et nous le représenterons par $\Delta(\Omega)$. Dans le cas singulier de $n = 1$, Ω est le corps des nombres *rationnels*, et par son discriminant nous entendrons le nombre $+1$. Comme éclaircissement, nous allons encore considérer le cas de $n = 2$, c'est-à-dire le cas d'un *corps quadratique*.

Toute racine θ d'une équation quadratique irréductible est de la forme

$$\theta = a + b\sqrt{d},$$

d étant un nombre rationnel entier complétement déterminé, qui n'est pas un carré, et qui, de plus, n'est divisible par aucun carré (excepté 1); a, b sont des nombres rationnels, et b est différent de zéro. L'ensemble de tous les nombres $\varphi(\theta)$ du corps quadratique correspondant Ω est évidemment identique avec l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$\omega = t + u\sqrt{d},$$

où t, u prennent toutes les valeurs rationnelles. Par la permutation non identique du corps, $\sqrt{d}$ se change en $-\sqrt{d}$, et par suite ω dans le nombre conjugué

$$\omega' = t - u\sqrt{d},$$

lequel est également contenu dans Ω; donc Ω est un corps normal (§ 16). Pour rechercher tous les nombres *entiers* ω, posons

$$t = \frac{x}{z}, \quad u = \frac{y}{z},$$

x, y, z étant des nombres rationnels entiers sans diviseur commun, dont le dernier, z, peut être supposé positif. Si maintenant ω est un nombre entier, ω' en sera aussi un (§ 16), et par suite

$$\omega + \omega' = \frac{2x}{z}, \quad \omega\omega' = \frac{x^2 - dy^2}{z^2}$$

devront être aussi des nombres entiers; et réciproquement, s'il en est ainsi, ω sera évidemment un nombre entier (§ 13). Soit actuellement e le plus grand commun diviseur de z et de x; il faudra que e^2 divise $x^2 - dy^2$, et par suite aussi dy^2 et enfin y^2, puisque d n'est divisible par aucun carré autre que 1; donc e devra aussi diviser y, et par conséquent être $= 1$, puisque z, x, y n'ont aucun diviseur commun. Puisque ainsi z est premier avec x et divise cependant $2x$, il faudra que l'on ait soit $z = 1$, soit $z = 2$. Dans le premier cas, $\omega = x + y\sqrt{d}$ est certainement un nombre entier; dans le second cas, x est impair, partant $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$, et comme on doit avoir $x^2 \equiv dy^2 \pmod{4}$, il faut que y soit aussi impair, et que l'on ait par conséquent $d \equiv 1 \pmod{4}$. Si donc cette condition n'est pas remplie, c'est-à-dire si l'on a $d \equiv 2$ ou $d \equiv 3 \pmod{4}$, z devra être $= 1$, et par suite on aura $\mathfrak{o} = [1, \sqrt{d}]$, et

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{d} \\ 1 & -\sqrt{d} \end{vmatrix}^2 = 4d.$$

Mais si l'on a $d \equiv 1 \pmod{4}$, z pourra aussi devenir $= 2$ [1] et l'on aura

$$\mathfrak{o} = \left[1, \frac{1+\sqrt{d}}{2}\right], \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1+\sqrt{d}}{2} \\ 1 & \dfrac{1-\sqrt{d}}{2} \end{vmatrix}^2 = d.$$

[1] De là résulte, par exemple, pour le cas de $d = -3$, que les nombres entiers du corps ne sont pas *tous* contenus dans la forme $x + y\sqrt{-3}$, où x, y prennent toutes les valeurs rationnelles.

Ces deux cas peuvent aussi se réunir en un seul, en remarquant que l'on a, dans les deux, $\mathfrak{o} = \left[1, \frac{D+\sqrt{D}}{2}\right]$. Il est clair en même temps qu'un corps *quadratique* est déjà complétement déterminé par son discriminant D. Il n'en est plus ainsi pour le cas qui suit immédiatement, savoir pour le cas de $n = 3$, dans lequel, outre le discriminant, il se présente encore d'autres invariants, qui sont nécessaires pour la détermination complète d'un corps *cubique;* toutefois on ne pourra donner d'explication générale de ce fait qu'à l'aide de la théorie des *idéaux*.

Revenons à la considération d'un corps quelconque Ω du degré n, et ajoutons encore les remarques suivantes sur la divisibilité et la congruence des nombres dans le domaine $\mathfrak{o}$. Soient λ, μ deux de ces nombres, et supposons que λ soit divisible par μ; on aura, d'après la définition générale de la divisibilité (§ 14), $\lambda = \mu\omega$, ω étant un nombre entier, et comme, en vertu de la définition d'un corps, le quotient ω des deux nombres λ, μ appartient au corps Ω, ω sera également un nombre du domaine $\mathfrak{o}$. Le système $\mathfrak{m}$ de tous les nombres du corps Ω divisibles par μ se compose donc de tous les nombres de la forme $\mu\omega$, ω parcourant tous les nombres du domaine $\mathfrak{o} = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$, c'est-à-dire tous les nombres de la forme

$$\omega = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n,$$

dont les coordonnées $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sont des nombres rationnels entiers; on a par conséquent $\mathfrak{m} = [\mu\omega_1, \mu\omega_2, \ldots, \mu\omega_n]$. Nous dirons maintenant que deux nombres entiers α, β du domaine $\mathfrak{o}$ sont *congrus* par rapport au *module* μ, et nous poserons

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mu},$$

quand la différence $\alpha - \beta$ sera divisible par μ, et sera ainsi contenue dans $\mathfrak{m}$; par suite, cette congruence est tout à fait équivalente à la suivante :

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}},$$

dont le sens a été expliqué au § 2; dans le cas contraire, α, β sont dits *incongrus* par rapport à μ. Si l'on entend par une *classe* par rapport au module μ l'ensemble de tous ceux des nombres contenus dans $\mathfrak{o}$ qui sont congrus à un nombre déterminé et par suite aussi

congrus entre eux suivant μ, alors, d'après la notation introduite au § 2, le nombre de ces classes différentes sera $= (\mathfrak{o}, \mathfrak{m})$, et comme les nombres entiers $\mu\omega_1, \mu\omega_2, \ldots, \mu\omega_n$, qui forment la base de $\mathfrak{m}$, sont liés aux nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ par n équations de la forme (6), (§ 17), dans lesquelles les coefficients $m_{i,i'}$ sont nécessairement des nombres rationnels *entiers,* il résulte de l'équation suivante (7), jointe au théorème 4° du § 4, que ce nombre des classes est

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{m}) = \pm N(\mu).$$

Le système $\mathfrak{m}$ est identique avec $\mathfrak{o}$ toujours, et seulement alors quand μ est une unité, et l'on a en même temps $\pm N(\mu) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}) = 1$.

Maintenant, tandis que, dans cette conception de la congruence, où un nombre déterminé μ n'entre que comme diviseur ou module, il règne une complète analogie avec la théorie des nombres rationnels, il se manifeste, comme nous l'avons déjà indiqué en détail dans l'Introduction et dans la Section II, des phénomènes tout nouveaux à p[illegible]os de la question de la composition des nombres du do[illegible] au moyen de facteurs appartenant à ce même domaine [illegible]omènes seront ramenés à des lois déterminées et simples pa[illegible] *les idéaux,* dont nous traiterons les éléments dans la Section suivante.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SCHUBERT (H). — Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung (¹).

Considérant un système de surfaces du second ordre F_2 de la $a^{\text{ième}}$ dimension (*a-stufiges System*), le symbole

$$\mu^b \nu^c \rho^{a-b-c}$$

désigne le nombre des surfaces du système qui passent par b points donnés, qui touchent c droites et $a-b-c$ plans donnés. Chacun de ces $\frac{1}{2}(a+1)(a+2)$ symboles est dit un *caractéristique* a-uple de F_2. Le *module élémentaire* d'une condition a-uple B_a, imposée à F_2, est une fonction linéaire des caractéristiques a-uples, qui exprime le nombre des surfaces d'un système a-uple *quelconque* de surfaces F_2 qui remplissent la condition B_a, ou encore le nombre des surfaces F_2 satisfaisant à la condition B_a et à une condition quelconque $(9-a)$-uple.

Un théorème donné par M. Halphen (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. II, et *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, p. 1074-1077) montre, pour toute condition a-uple imposée à une surface F_2, l'existence d'un module élémentaire. Le cas où $a=1$ a été traité par M. Chasles; presque rien n'a été fait en dehors de cela.

Les conditions dont l'auteur s'occupe sont des *conditions de couple* (*Paarbedingungen*) : en adjoignant à chacune des ∞^1 génératrices rectilignes d'un système d'une surface F_2 une des ∞^1 génératrices de l'autre système, on obtient ∞^2 *couples de droites* appartenant à F_2 : par suite, chaque condition $(a+2)$-uple imposée à un des ∞^2 couples de droites de F_2 est, pour F_2, une condition a-uple; chaque couple est déterminé par 7 constantes; aux conditions 3-uples, ..., 7-uples imposées à un couple répondent, pour F_2, des conditions 1-uples, ..., 5-uples. Ce sont ces conditions qui sont dites *conditions de couple*. Les conditions fondamentales d'un couple

(¹) *Mathematische Annalen*, t. X, p. 318-364.

de droites sont les conditions fondamentales auxquelles peuvent satisfaire les quatre éléments principaux d'un couple de droites, savoir chacune des deux droites, leur point d'intersection et le plan qui les contient.

Au moyen des relations générales entre les conditions fondamentales des éléments principaux incidents, M. Schubert parvient à exprimer toutes les conditions de couple au moyen de certaines d'entre elles qu'il nomme *conditions fondamentales*. Celles-ci se composent des conditions μ, ν, ρ et de sept autres qui peuvent être dites *essentielles*, et dont les modules élémentaires sont donnés par les théorèmes suivants :

1. La condition γ exprime que F_2 touche un plan donné en un point quelconque d'une droite donnée dans ce plan; elle a pour module

$$\gamma = \frac{1}{2}\nu\rho.$$

2. La condition réciproque γ', qui exprime que F_2 touche une droite donnée en un point donné, a pour module

$$\gamma' = \frac{1}{2}\nu\mu.$$

3. La condition g, qui exprime que F_2 contient un rayon d'un faisceau donné, a pour module

$$\delta = \mu\rho.$$

4. La condition x, qui exprime que F_2 contient une droite donnée, a le module suivant, déterminé par M. Hurwitz (à Hildesheim),

$$x = \frac{1}{4}(2\nu^3 - 3\nu^2\mu - 3\nu^2\rho + 3\nu\mu^2 + 2\nu\mu\rho + 3\nu\rho^2 - 2\mu^3 - 2\rho^3).$$

5. La condition w, qui exprime que F_2 touche un plan donné en un point donné, a pour module

$$w = \frac{1}{8}(-2\nu^3 + 3\nu^2\mu + 3\nu^2\rho - 3\nu\mu^2 - 3\nu\rho^2 + 2\mu^3 + 2\rho^3).$$

6. La condition y, qui exprime que F_2 contient une droite

donnée et touche en un point donné sur cette droite un plan passant par cette même droite, a une infinité de modules élémentaires, que l'on obtient tous en donnant dans l'équation

$$y = \frac{1}{8}[2\nu^3\mu + 2\nu^3\rho - 3\nu^2\mu^2 - 6\nu^2\mu\rho - 3\nu^2\rho^2 + 2\nu\mu^3 + 6\nu\mu^2\rho + 6\nu\mu\rho^2 + 2\nu\rho^3 - 4\mu^3\rho - 4\mu\rho^3 + \alpha_1 V + \alpha_2 W]$$

toutes les valeurs possibles aux deux coefficients arbitraires α_1 et α_2, et en faisant

$$V \equiv 2\nu^4 - 5\nu^3\mu - 5\nu^3\rho + 6\nu^2\mu^2 + 8\nu^2\mu\rho + 6\nu^2\rho^2 - 4\nu\mu^3 - 6\nu\mu^2\rho - 6\nu\mu\rho^2 - 4\nu\rho^3 + 4\mu^3\rho + 4\mu\rho^3,$$

$$W \equiv 2\nu^3\mu - 2\nu^3\rho - 3\nu^2\mu^2 + 3\nu^2\rho^2 + 2\nu\mu^3 - 2\nu\rho^3.$$

7. La condition z, qui exprime que F_2 doit contenir deux droites données ayant un point commun, a une infinité de modules élémentaires que l'on obtient en donnant toutes les valeurs possibles aux huit coefficients arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_8$ dans l'équation suivante :

$$z = \frac{1}{6}[2\nu^5 - \nu^4\mu - \nu^4\rho + 2\nu^2\mu^3 - 2\nu^2\mu^2\rho - 2\nu^2\mu\rho^2 + 2\nu^2\rho^3 - 4\nu\mu^4 + 6\nu\mu^3\rho + 6\nu\mu\rho^3 - 4\nu\rho^4 - 4\mu^4\rho - 4\mu\rho^4] + \beta_1\nu V + \beta_2\mu V + \beta_3\rho V + \beta_4\nu W + \beta_5\mu W + \beta_6\rho W + \beta_7\mu^4(2\mu - \nu) + \beta_8\rho^4(2\rho - \nu).$$

V et W ont le même sens que précédemment.

Ces coefficients arbitraires, qui entrent dans les modules de y et de z, montrent que, entre les 15 caractéristiques quadruples de F_2, il existe deux, et seulement deux, relations indépendantes, savoir

$$V = 0 \quad \text{et} \quad W = 0,$$

et que, entre les 21 caractéristiques quintuples, il existe huit, et seulement huit, relations indépendantes, savoir les six que l'on obtient en multipliant $V = 0$ et $W = 0$ par μ, ν, ρ et les deux suivantes :

$$2\mu^5 - \mu^4\nu = 0,$$
$$2\rho_5 - \rho^4\nu = 0.$$

Il y a donc au plus treize caractéristiques quadruples, et treize caractéristiques quintuples, indépendantes les unes des autres.

Enfin M. Schubert démontre que, pour toute figure déterminée par c constantes, le nombre maximum des caractéristiques a-uples indépendantes les unes des autres est égal au nombre maximum des caractéristiques $(c-a)$-uples indépendantes les unes des autres; par suite, entre les trois caractéristiques simples de F_2, entre les six doubles, entre les dix triples, il n'y a aucune relation. Il y en a 18 entre les 28 sextuples, 30 entre les 36 septuples, 42 entre les 45 octuples. Ces relations se déduisent aisément, par élimination, des nombres élémentaires de la surface F_2 (*Journal de Borchardt*, t. 71, p. 383).

Ces résultats se relient à des résultats analogues relatifs aux coniques dans l'espace, en considérant une des trois *dégénérescences* (*Ausartungen*) de F_2, notamment celle par laquelle les points de F_2 viennent former deux plans confondus, et les tangentes deviennent toutes les sécantes d'une conique située dans ce plan double.

Soient m la condition qui exprime que le plan de la conique passe par un point donné, n la condition que cette conique rencontre une droite donnée, r la condition qu'elle touche un plan donné. L'auteur montre que, entre les trois caractéristiques simples et les six caractéristiques doubles de la conique, il n'y a aucune relation, mais qu'il y en a une, et une seule, entre les dix caractéristiques simples, savoir

$$R \equiv 2n^3 - 3n^2r + 3nr^2 - 2r^3 - 6mn^2 + 4mnr + 12m^2n - 8m^2r = 0.$$

En regardant dans cette formule le plan de la conique comme fixe, c'est-à-dire en faisant $m = 0$, on obtient une formule due à MM. Cremona et Halphen, et qui se trouve p. 406 de la *Géométrie* de Clebsch et Lindemann.

Entre les quatorze caractéristiques quadruples existent quatre, et seulement quatre, relations indépendantes; trois d'entre elles sont les relations

$$mR = 0, \quad nR = 0, \quad rR = 0.$$

D'après cela, pour une conique dans l'espace, il y a au plus trois conditions simples, six doubles, neuf triples, dix quadruples, neuf quintuples, six sextuples, trois septuples, qui soient indépendantes les unes des autres.

SCHUBERT (H.). — BEITRÄGE ZUR ABZÄHLENDEN GEOMETRIE (¹).

Le Mémoire que nous analysons doit être suivi de deux autres. Le travail de M. Schubert a son point de départ dans la question mise au concours par l'Académie Royale de Copenhague en janvier 1875 sur l'extension de la théorie des caractéristiques aux systèmes des figures géométriques composées avec les points et les plans osculateurs d'une cubique gauche et la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires. L'auteur a été conduit à plusieurs formules générales, dont quelques-unes sont déjà connues : elles dérivent en partie du *Principe de la conservation du nombre*, en partie du *Principe de correspondance*.

Après une Introduction où il résume les travaux antérieurs et ses propres découvertes, M. Schubert expose, dans la première Section de son Mémoire, les symboles et les notations dont il se sert : il importe de les expliquer ici brièvement.

Une condition est dite *composée* si elle peut être ramenée à plusieurs conditions indépendantes ; sinon elle est dite *isolée*. Une condition pourra être *isolée*, tout en se ramenant à plusieurs autres, lorsque ces dernières ne seront point indépendantes. Ainsi les conditions P, μ, ν, qui expriment qu'une courbe plane passe par un point donné, que le plan de cette courbe doit contenir un point donné, qu'elle doit rencontrer une droite donnée sont des conditions *isolées*; la condition qu'une courbe plane passe par un point et en même temps rencontre une droite est composée. Chaque condition est représentée par une lettre symbolique telle que, précédemment, les lettres P, μ, ν.

Le produit de deux conditions est l'ensemble de ces deux conditions : Pν est la condition qu'une courbe plane passe par un point et rencontre une droite. On comprend, d'après cela, ce qu'est la puissance d'une condition. μ^3 exprime que le plan d'une courbe plane contient trois points donnés.

La *dimension* (*Stufe*) d'une figure (*Gebilde*), dans la définition de laquelle entrent c constantes et qui doit, en outre, satisfaire à

(¹) *Contributions à la Géométrie numérique* (*Mathematische Annalen*, t. X, p. 1-116; 1876. (Premier Mémoire).

une condition a-uple isolée ou composée, est $c - a$; l'ensemble de toutes ces figures comprend ∞^{c-a} éléments.

A chaque condition a-uple correspond, pour un système de la $a^{\text{ième}}$ dimension, un certain nombre, savoir le nombre des figures de ce système qui satisfont à cette condition. *Ce nombre sera exprimé par le symbole même de la condition.* Ainsi $P\nu$ exprimera le nombre de coniques d'un système de dimensions qui satisfont à la condition triple $P\nu$.

Si, pour tous les systèmes de la dimension a, les nombres qui correspondent à certaines conditions sont liés par une équation, nous dirons que cette équation lie entre elles les conditions elles-mêmes. Ainsi, pour toutes les courbes planes d'ordre a, on a l'équation

$$P = \mu\nu - a\mu^2.$$

Une telle équation entre des conditions a-uples est satisfaite identiquement lorsque, ayant affaire à une figure dans la définition de laquelle entrent c constantes, on remplace les symboles par les nombres de ces figures qui satisfont respectivement aux conditions a-uples que représentent ces symboles et, en outre, à une même condition $(c - a)$-uple isolée ou composée : cela revient, suivant la terminologie de M. Schubert, à substituer aux symboles les nombres correspondants, dans l'équation proposée multipliée par une condition $(c - a)$-uple; rien n'empêche, d'après cela, de multiplier une équation symbolique entre certaines conditions par une condition b-uple. Par exemple, pour les cubiques planes à point double, l'équation

$$P = \mu\nu - 3\mu^2,$$

multipliée par ν^9, est identiquement satisfaite quand on substitue aux nombres $P\nu^9$, $\mu\nu^{10}$, $\mu^2\nu^9$ leurs valeurs 1392, 2040, 216, et l'on pourra en déduire l'équation

$$\mu^2 P = \mu^3\nu - a\mu^4 = \mu^3\nu,$$

le terme μ^4 étant nul, puisque par quatre points on ne peut pas, en général, faire passer un plan.

Si ε désigne le nombre de systèmes de première dimension de la figure Γ qui, tout en satisfaisant à la définition de Γ, sont *dégénérés* d'une certaine manière, $\varepsilon\zeta$ désignera le nombre de systèmes dé-

générés de la même manière, qui satisfont à la condition ζ. De pareils symboles de *dégénérescence* (*Ausartung*) peuvent entrer dans une équation entre des conditions a-uples, pourvu que ζ soit une condition $(a-1)$-uples.

Toute figure définie par c constantes peut être regardée comme l'élément d'un espace à c dimensions. Regardant le point, le plan, la droite, définis par 3, 3, 4 constantes comme les trois éléments fondamentaux, nous entendrons par *lieu* de points, de plans, de droites un système quelconque de points, de plans, de droites, ce système pouvant être des dimensions 0, 1, 2, 3 pour le point et le plan, des dimensions 0, 1, 2, 3, 4 pour la droite. Les lieux sont caractérisés quant à leur degré (*Grad*) par le nombre d'éléments communs qu'ils possèdent avec certaines figures fondamentales, pour lesquelles le tableau suivant fera comprendre la terminologie de M. Schubert.

Figures fondamentales.

	POINT.	PLAN.	DROITE.
0ième dimension.	Point.	Plan.	Droite.
1re dimension...	Axe de points.	Axe de plans.	Faisceau de droites.
2e dimension...	Champ de points.	Réseau de plans.	Champ de droites. Réseau de droites.
3e dimension...	Espace de points.	Espace de plans.	Axe de droites.
4e dimension...	»	»	Espace de droites.

On voit comment ces noms sont composés : il y entre, d'une part, le nom de l'élément principal considéré (point, plan, droite), de l'autre, les mots axe, champ (*Feld*), réseau (*Bündel*), faisceau (*Büschel*), espace, relatifs au *support* (*Träger*) de cet élément et dont les trois premiers sont employés suivant que ce *support* est une droite, un plan ou un point; ce faisceau est l'ensemble des droites situées dans un plan et passant par un point.

A chaque figure fondamentale correspond une condition fondamentale, savoir la condition que le lieu engendré par l'élément considéré ait avec une figure fondamentale donnée, engendrée par le même élément, un élément commun : ces conditions sont nom-

mées et suivies de leurs symboles littéraux dans le tableau ci-dessous, le rang dans lequel se suivent les lettres symboliques indiquant la dimension (0, 1, 2, 3) du lieu considéré : ainsi ν exprime qu'un lieu de *points* de dimension 1, c'est-à-dire qu'une courbe a un *point* commun avec un axe, ou rencontre une droite, etc.

Lieux de points.

p_0	condition	d'espace;	
p_1	»	de champ.	c;
p_2	»	d'axe.	c_g, ν;
p_3	»	de point.	b, P, Π.

Lieux de plans.

c_0	condition	d'espace;	
c_1	»	de réseau	μ;
c_2	»	d'axe	μ_g, ν';
c_3	»	de plan	M′, P′, Π′.

Lieux de droites.

s_0	condition	d'espace;	
s_1	»	d'axe.	g;
s_2	»	de champ.	g_e, ρ;
s_{11}	»	de réseau.	g_p, ρ';
s_3	»	de faisceau.	g_s, t, β;
s_4	»	de droite	G, T, B, S.

Un lieu de $a^{\text{ième}}$ dimension, engendré par un élément dans la définition duquel entre c constantes, a avec la figure fondamentale de $b^{\text{ième}}$ dimension, engendrée par le même élément, un système commun d'éléments de dimension $a+b-c$, c'est-à-dire un nombre fini d'éléments communs, si $b=c-a$; *ce nombre fini est le degré du lieu.* Un lieu de droites de deuxième dimension (une congruence) a ainsi deux degrés : le degré de réseau (le nombre de droites de la congruence qui passent par un point), et le degré de champ (le nombre de droites de la congruence qui passent par un point). Les autres degrés sont uniques, si $a+b<c$; la condition d'un élément commun est une condition $(c-a-b)$-uple.

Un lieu est dit *incident* à une figure fondamentale, lorsque chacun de ses éléments fait partie de la figure fondamentale.

Nous pouvons maintenant expliquer rapidement l'objet de la deuxième et de la troisième Section du Mémoire de M. Schubert.

La deuxième Section contient les équations qui relient les conditions fondamentales d'un élément principal, et celles qui existent entre les conditions fondamentales de toutes les figures fondamentales et les conditions fondamentales des *lieux qui leur sont incidents*. On y trouvera, en outre, des applications importantes.

La source des formules de la seconde Section est le *principe de la conservation du nombre* ou le *principe des positions particulières*. Ce principe consiste en ce que le nombre des figures Γ qui satisfont à certaines conditions est indépendant des positions qu'occupent les figures dont ces conditions dépendent, pourvu que ce nombre reste fini. Ainsi le nombre des droites qui satisfont à une certaine condition double Z et qui, en outre, doivent rencontrer deux droites reste le même lorsque ces deux droites se rencontrent : il est, par suite, la somme du nombre des droites qui satisfont à la condition Z et passent par un point α du nombre des droites qui satisfont à la condition Z et sont contenues dans un plan.

La multiplication symbolique donne ensuite d'autres formules.

Les formules entre les conditions fondamentales d'un point c sont les suivantes :

$$c^2 = c_g, \quad c^3 = cc_g = b;$$

pour un plan μ, on a

$$\mu^2 = \mu_g, \quad \mu^3 = \mu\mu_g = M.$$

Pour la droite g on aura

$$g^2 = g_p + g_e,$$

$$gg_p = gg_e = \frac{1}{2} g^3 = g_s,$$

$$gg_s = g_p^3 = g_e^2 = g^2 g_p = g^2 g_e = \frac{1}{2} g^4 = cg; \quad g_p g_e = 0.$$

Si le point c et la droite g sont incidents l'un à l'autre, on aura

$$cg = c_g + g_e = c^2 + g_e,$$

d'où, par des multiplications symboliques,

$$cg_p = b + g_s = c^3 + \frac{1}{2}g^3,$$

$$cg_s = bg + cg = c^3 g + \frac{1}{2}g^4.$$

Le principe de dualité conduit à des relations analogues pour un plan μ et une droite g, incidents l'un à l'autre.

Pour un point c et un plan μ, incidents l'un à l'autre, on aura

$$c^3 - c^2\mu + c\mu^2 - \mu^3 = 0,$$

$$c^3\mu - c^2\mu^2 + c\mu^3 = 0.$$

Pour deux droites g et h qui se coupent, on aura

$$cg - g_s h + g_p h_e + g_e h_p - g h_s + \mathrm{H} = 0,$$

d'où

$$cgh - g_s(h_p + h_e) + (g_p + g_e)h_s - g\mathrm{H} = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{l} cgh_p - g_s h_s + g_e \mathrm{H} = 0, \\ cgh_e - g_s h_s + g_p \mathrm{H} = 0, \end{array}\right.$$

$$cgh_s - g_s \mathrm{H} = 0.$$

On déduit de là diverses formules importantes relatives aux lieux de degré a incidents à une figure fondamentale et un grand nombre d'applications pour lesquelles nous renvoyons au Mémoire de M. Schubert.

La troisième Section contient les équations où entrent les conditions fondamentales d'une figure composée de deux éléments principaux et les conditions fondamentales de *coïncidence* pour une telle figure, c'est-à-dire les conditions auxquelles elle doit satisfaire pour que les deux éléments principaux viennent se confondre. Ces équations sont obtenues au moyen du principe de correspondance de M. Chasles, de la multiplication symbolique, et des formules de la deuxième Section qui reposent sur le principe de la conservation du nombre. On parvient ainsi, dans la généralisation du principe de correspondance, au terme de la route ouverte par M. Salmon et M. Zeuthen. Nous indiquerons ici quelques formules relatives aux *couples de points*.

Soient c et d les deux points du *couple*, g la droite qui les joint;

les conditions fondamentales simples pourront être représentées symboliquement par

$$c,\ c^2,\ c^3,\quad d,\ d^2,\ d^3,\quad g,\ g_e,\ g_p,\ g_s,\quad G.$$

Soit ε la condition de coïncidence, et soit b le point où, sous la condition ε, les deux points c, d viennent se confondre; on aura les formules suivantes :

$$c + d - g = \varepsilon,$$
$$c^2 + d^2 + g_e - g_p = \varepsilon g,$$
$$cd - g_e = \varepsilon b,$$
$$c^3 + d^3 + g_s = \varepsilon g_p,$$
$$cdg - g_s = \varepsilon bg = \varepsilon g_e + \varepsilon b^2,$$
$$c^2 d + cd^2 - cdg = \varepsilon b^2.$$

Ces formules sont suivies de diverses remarques sur leur traduction dans le langage ordinaire et particulièrement sur les trois *espèces de coïncidence* que l'on est amené à distinguer, selon que la droite de jonction peut occuper, à la limite, un nombre fini, ∞^1 ou ∞^2 positions. Dans le second cas, la coïncidence satisfait d'elle-même à la condition fondamentale g, dans le troisième à la condition fondamentale g_p. Par exemple, si l'on considère le couple formé par un point d'une courbe et un point d'une surface, on a un système de la dimension 3, pour lequel les coïncidences correspondent aux points d'intersection de la surface et de la courbe, et sont telles que toute droite passant par le point d'intersection peut être regardée comme une droite de jonction des deux points du couple, en sorte que la condition g_p est remplie d'elle-même.

Nous renverrons encore au Mémoire de M. Schubert pour les formules de correspondance relatives aux figures formées au moyen de deux autres éléments principaux, tels que deux droites, ou une droite et un point, etc.

A ces formules de correspondance se rattachent les *théorèmes de produits* (*Produktensätze*), c'est-à-dire les théorèmes qui expriment les conditions du système formé par les éléments communs à deux autres systèmes engendrés par un seul et même élément au moyen des conditions de ces deux autres systèmes, et en particulier

le nombre de ces éléments communs au moyen des nombres qui correspondent aux deux systèmes. Tel est, par exemple, le théorème de Bézout sur le degré de l'équation finale. Les théorèmes relatifs aux systèmes de droites ont été donnés sans démonstration par M. Halphen (*Comptes rendus*, t. LXVIII, p. 141, t. LXXIV, p. 41), et ont été démontrés, depuis, par M. Zeuthen. Tous ces théorèmes se déduisent immédiatement, comme cas très-particuliers, des formules de correspondance données par M. Schubert.

Dans un ordre d'idées analogue, l'auteur emploie la formule

$$c + d - g = \varepsilon,$$

relative à un couple de points, pour résoudre une série de problèmes, posés par M. Salmon, sur le nombre des tangentes à une surface telles que, au point de contact, soient confondus un certain nombre de points d'intersection; par exemple, il existe, pour une surface du $n^{\text{ième}}$ ordre,

$$5n(n-4)(7n-12)$$

tangentes telles, que cinq points soient confondus au point de contact,

$$2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5)$$

tangentes doubles telles que, en l'un des points de contact, quatre points d'intersection soient confondus, en l'autre, deux, etc.

Une autre application plus importante des formules relatives aux couples de points concerne la détermination de nombres se rapportant au contact des éléments de deux systèmes de première dimension formés de courbes ou de surfaces. Par exemple, le degré de la courbe lieu des points de contact de deux surfaces appartenant aux deux systèmes (μ_1, ν_1, ρ_1) et (μ_2, ν_2, ρ_2) est

$$\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1 + \nu_1\nu_2 + \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1.$$

Le travail de M. Schubert sur la Géométrie numérique comprendra, comme nous l'avons dit au début, deux autres Mémoires qui paraîtront prochainement. On trouvera dans le deuxième Mémoire tous les nombres relatifs aux cubiques planes à point de

rebroussement ou à point double qui satisfont aux conditions fondamentales combinées d'une façon quelconque.

Le troisième Mémoire se rapportera à la théorie des cubiques gauches et à leurs divers modes de *dégénérescence*.

VOSS (A.). — UEBER COMPLEXE UND CONGRUENZEN (¹).

Dans sa *Neue Geometrie des Raumes* (²), Plücker a fondé la géométrie des ensembles de lignes à deux ou trois dimensions qu'il a désignées sous le nom de *complexes* et de *congruences*. On trouve dans son livre une théorie des complexes du premier et du second degré qui a été, depuis, complétée et simplifiée par les travaux de Battaglini (³), Klein (⁴), Painvin (⁵), Weiler (⁶).

Dans toutes ces recherches, une certaine surface de quatrième ordre et de quatrième classe, dite *surface singulière* du complexe ou surface de Kummer, joue un rôle essentiel. Ainsi que Plücker l'a établi (⁷), cette surface est le lieu des sommets des cônes du complexe qui se décomposent en deux plans, et l'enveloppe des plans pour lesquels les courbes du complexe se réduisent à un couple de points. M. Pasch a montré (⁸) que cette propriété ne se rencontrait pas que dans les complexes du second ordre. Chaque arête double d'un cône d'un complexe quelconque est, en effet, une tangente double d'une courbe de ce complexe et, à ce titre, peut être dite *ligne singulière* du complexe; un *point singulier*, situé sur elle, à savoir le sommet du cône qui l'admet comme arête double, lui correspond, ainsi qu'un *plan singulier* contenant la courbe du complexe à laquelle elle est doublement

---

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX, 1875, p. 55.

(²) PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes*, Bd. I, herausgegeben von Clebsch; Bd. II, herausgegeben von Klein. Leipzig, 1868-1869.

(³) *Atti della R. Accadem. di Napoli*, t. III, 1866; *Giornale di Matematiche*, t. VI, VII, X, XI.

(⁴) *Mathematische Annalen*, t. II, p. 198, 366; t. V, p. 287.

(⁵) Voir *Bulletin*, t. II, p. 268.

(⁶) *Mathematische Annalen*, t. VII, p. 148.

(⁷) *Neue Geometrie*, p. 315.

(⁸) PASCH, *Zur Theorie der Complexe und Congruenzen von Geraden*; Giessen, 1870.

tangente. Le lieu des points singuliers et l'enveloppe des plans singuliers constituent une surface unique; *chaque plan singulier est tangent au point singulier correspondant.*

Ce théorème, si l'on regarde la surface singulière comme une surface focale incomplète de la congruence des lignes singulières, peut être considéré comme une conséquence d'un théorème plus général, relatif aux surfaces focales de congruences, à savoir que chaque droite a d'une congruence est rencontrée en deux points β, γ par deux droites infiniment voisines b, c de la congruence; la surface focale du système est le lieu des points β, γ des plans (ab), (ac); d'ailleurs le plan tangent en β est (ac) et non (ab).

Le travail de M. Voss est une étude géométrique et analytique des complexes, définis par l'équation générale du $n^{\text{ième}}$ ordre en coordonnées de lignes, et des congruences, intersections de tels complexes. Ces complexes possèdent une dualité complète; ils forment des ensembles réciproques en soi, ainsi que les ensembles que l'on en déduit; par suite, les éléments singuliers se correspondent par couples, ainsi que les équations qui les relient.

Il y a lieu de diviser les éléments singuliers du complexe en deux classes. Un cône quelconque du complexe, en tant que cône ponctuel général (*Ordnungskegel*), comprend les singularités qui répondent à celles qui se rencontrent nécessairement dans une courbe ponctuelle générale, à savoir des plans tangents doubles et des plans d'inflexion. Le groupement de ces éléments singuliers correspond au groupement des points doubles et des points de rebroussement d'une courbe quelconque du complexe. Les éléments singuliers de cette nature seront placés dans la première classe. Dans la seconde classe, au contraire, se placent les éléments singuliers non nécessaires : les arêtes doubles et les arêtes de rebroussement d'un cône, les tangentes doubles et les tangentes d'inflexion d'une courbe du complexe. Ces derniers éléments singuliers sont liés étroitement à la surface singulière.

L'étude de cette dernière est comprise dans l'étude plus générale de la surface focale de deux complexes $f = 0$, $\varphi = 0$, de degrés n et m. En un point a passent mn droites de la congruence de ces deux complexes; si deux de ces droites coïncident, a est un point de la surface focale. Celle-ci possède une courbe double dont les points correspondent au cas où un couple des mn droites vient

coïncider avec un autre couple; les points pour lesquels trois droites viennent coïncider forment sur la surface focale une courbe cuspidale; la courbe double possède en outre des points triples; enfin la courbe cuspidale et la courbe double se rencontrent en des points qui, pour l'une ou pour l'autre, sont des points singuliers.

Entre les divers nombres qui caractérisent les singularités de la surface focale, on connaît déjà une série de relations fournies tant par la réciprocité de cette surface que par les formules de Plücker et de Salmon; M. Voss donne en outre les formules suivantes, qui permettent d'achever la détermination de ces nombres.

Soient

N l'ordre et la classe de la surface focale;
S le rang de cette surface;
J le nombre des arêtes de rebroussement du cône tangent;
R l'ordre de la courbe cuspidale;
P l'ordre de la courbe d'inflexion;
K le rang de ces deux dernières courbes.

On aura, en faisant $m+n=l$,

$$\begin{aligned}
N &= 2mn(l-2),\\
R &= 2mn[(l-1)(l-2)+mn-4],\\
S &= 2mn[(l-1)^2-mn+1],\\
J &= 4mn[2(l-1)(l-2)-mn+1],\\
K &= 4mn[6(l-2)^2-2(l-2)-(m-1)(n-1)],\\
P &= 2mn[5(l-1)(l-2)-3mn+4].
\end{aligned}$$

L'auteur est ainsi conduit à une discussion simple des singularités d'un complexe, en particulier de celles qui se relient aux singularités de la surface singulière.

Chaque ligne singulière est une arête double d'un cône du complexe; si elle est une arête de rebroussement, le point singulier correspondant est un point de la courbe cuspidale; pour les points de la courbe double, le cône du complexe a deux arêtes doubles, etc.

L'auteur tire de ses recherches générales les conséquences aux-

quelles on était déjà parvenu pour les complexes et les congruences de degré moindre, pour ceux et celles dont les surfaces singulières et les surfaces focales avaient été données par Clebsch ([1]) sous forme explicite.

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ([2]);

PAR M. F. KLEIN.

Je me propose d'exposer une méthode qui permette de *distinguer si une équation différentielle linéaire donnée du second ordre à coefficients rationnels peut ou non être intégrée complétement au moyen des fonctions algébriques.* Je parviens à former toutes les équations différentielles de cette nature, et l'on n'a plus, pour ce qui est de l'étude d'une équation différentielle donnée, qu'à effectuer une comparaison de coefficients : ce dernier point est l'objet de recherches d'Algèbre particulières, que je n'ai point encore terminées.

Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1\frac{dy}{dx} + p_2 y = 0$$

une équation différentielle linéaire du second ordre. On sait ([3]) que le quotient de deux solutions particulières indépendantes y_1, y_2

$$n = \frac{y_1}{y_2},$$

([1]) *Mathematische Annalen*, t. V, p. 437.

([2]) Extrait et traduit des *Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen*. (Séance du 26 juin 1876.)

([3]) *Voir* le travail de M. Schwarz, dont je me sers d'ailleurs plus loin : *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist.* (*Journal de Borchardt*, t. 75, p. 292-335.)

satisfait à l'équation différentielle du troisième ordre

$$[\eta] = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2p_0 - \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{dp_1}{dx} = \mathrm{P}.$$

Cette équation différentielle jouit de cette propriété que son intégrale générale η s'exprime par une fraction dont les termes sont des fonctions linéaires d'une intégrale particulière η_0, à savoir

$$\eta = \frac{\alpha\eta_0 + \beta}{\gamma\eta_0 + \delta};$$

il en résulte évidemment que son intégrale est complétement algébrique si l'intégrale de l'équation différentielle du second ordre est aussi complétement algébrique; la réciproque aussi est vraie, pourvu que

$$e^{\int p_1 dx}$$

soit une fonction algébrique. J'écrirai désormais cette équation du troisième ordre sous la forme

$$[\eta] = \mathrm{P},$$

P étant une fonction rationnelle de x, en vertu de la supposition analogue qui a été faite au début sur p_0 et p_1.

Soit η_0 une solution particulière de cette équation. Faisons décrire à x un chemin fermé en partant d'une valeur arbitraire; η_0 reprendra la même valeur, ou se changera en une fonction linéaire

$$\eta_1 = \frac{\alpha\eta_0 + \beta}{\gamma\eta_1 + \delta},$$

les rapports des quantités α, β, γ, δ ne dépendant que du chemin décrit, non des valeurs initiales de x ou de η_0. Si η_0 est une branche d'une fonction algébrique, η_1 doit être une branche de la même fonction algébrique, et l'on passe d'une façon continue de l'une à l'autre. Soit maintenant

$$\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

l'ensemble des valeurs que l'on déduit ainsi de η_0. Formons l'é-

différentielle traitée par M. Schwarz. On obtient ainsi

$$[\eta]=[R]+R'^2\left[\frac{1-\lambda^2}{2R^2}+\frac{1-\nu^2}{2(1-R)^2}-\frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2R(1-R)}\right].$$

En remplaçant maintenant λ, μ, ν *par les valeurs précédentes, on aura les équations différentielles* (II) *et* (V) *qui correspondent aux équations intégrales* (2) *et* (5).

Le but que nous nous étions proposé au commencement de ce travail est atteint; reste seulement ce problème, déjà mentionné, de la théorie des transformations : une fonction rationnelle P_x peut-elle être mise à la place du second membre de l'une des équations (I) à (V), second membre où R représente une fonction rationnelle de x? S'il en est ainsi, comment déterminer R?

Je dois ajouter, en terminant, quelques remarques relatives à un travail de M. Fuchs sur le même sujet [1] : l'étude que j'en ai faite récemment m'a conduit à la méthode simple que je viens d'exposer. M. Fuchs donne une solution générale, mais, à ce qu'il me semble, plus prolixe. Sans insister davantage, je remarquerai seulement que les formes qu'il a appelées *formes primaires* (*Primformen*), sont identiques avec les formes binaires qui sont ramenées à elles-mêmes par des transformations linéaires, et que la liste des formes primaires de moindre degré que l'on trouve dans le Mémoire cité, p. 126, contient des formes superflues. Elle devrait maintenant contenir :

La forme biquadratique générale ;

La forme biquadratique équianharmonique;

Le premier membre de l'équation octaédrique ($n = 6$);

Le premier membre de l'équation icosaédrique ($n = 12$).

La première des deux formes données du sixième degré, ainsi que la forme du huitième et la forme du dixième degré, n'existe pas.

---

[1] *Ueber diejenigen Differentialgleichungen 2. Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung des Invariantentheorie* (*Journal de Borchardt*, t. 81, p. 97-147); comparez les *Gött. Nachrichten*, 1875, p. 568-581, p. 612-613.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HOPPE (Dr R.), Professor an der Universität Berlin. — TAFELN ZUR DREISSIGSTELLIGEN LOGARITHMISCHEN RECHNUNG. — Leipzig, Koch; 1876. Grand in-8°, 16 p.

Les calculs pratiques n'exigent presque jamais une approximation supérieure à celle que donnent les Tables logarithmiques construites avec 7 ou 8 décimales. Mais il n'en est pas de même des calculs théoriques, relatifs à certaines parties de l'Analyse qui confinent à la Théorie des nombres. Là on rencontre des formules, exigeant pour leur vérification l'emploi de Tables beaucoup plus approchées, auxquelles, par cette raison même, il est impossible de donner la forme développée des Tables ordinaires. On a proposé plusieurs moyens pour atteindre ce but au moyen de tableaux d'une étendue restreinte, et l'un des plus simples et des plus ingénieux est celui qu'a indiqué, en 1624, le grand calculateur Briggs, page 32 de son *Arithmetica logarithmica,* où l'on trouve une Table de moins d'une page, pouvant donner par un calcul très-court, avec 15 décimales, le logarithme correspondant à un nombre ou le nombre correspondant à un logarithme. Cette méthode de Briggs, n'ayant pas attiré l'attention qu'elle méritait, fut oubliée pendant un siècle, puis réinventée successivement par Flower, par Leonelli, et sans doute par d'autres. Aujourd'hui elle a pris place dans la plupart des recueils de Tables.

Mais, tandis que, le plus souvent, on donne les Tables abrégées pour le calcul des logarithmes décimaux, c'est, au contraire, le calcul des logarithmes naturels qui est le plus important pour les besoins théoriques. Leonelli est le premier, à notre connaissance, qui ait construit une Table abrégée de logarithmes naturels avec 20 décimales (1). Mais cette approximation même peut n'être pas suffisante, et M. Hoppe a rendu un vrai service aux calculateurs

(1) M. Hoppe, dans sa Préface, affirme à tort que l'on ne possède de pareilles Tables que pour les logarithmes vulgaires, et avec 12 décimales au plus. Indépendamment de la Table de Leonelli, reproduite dans notre *Recueil de Formules et de Tables numériques*, *voir* le *Recueil* de Schrön, Table dernière.

en publiant ses Tables à 30 décimales dans le système naturel. Outre l'avantage d'éviter à la fin du calcul une conversion en logarithmes vulgaires, les logarithmes naturels donnent lieu à des simplifications spéciales, que l'on ne trouverait pas dans les autres systèmes.

L'usage des nouvelles Tables est fondé sur une décomposition du nombre donné en facteurs, d'après la formule suivante :

$$y\left(1+\frac{n_1}{100}\right)\left(1+\frac{n_2}{1000}\right)\cdots\left(1+\frac{n_k}{10^k}\right)=1-z,$$

où y est le nombre donné x multiplié ou divisé par un nombre p, d'un ou de deux chiffres, que l'on choisit de manière que le premier chiffre du résultat soit un 9, ce résultat étant divisé ensuite par la puissance de 10 immédiatement plus grande que x. On multiplie y par $1+\frac{n_1}{100}$, n_1 étant le complément à 9 du second chiffre décimal de y; puis le résultat par $1+\frac{n_2}{1000}$, n_2 étant le complément à 9 du troisième chiffre de y, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à un facteur $1+\frac{n_k}{10^k}$ dont le logarithme soit égal à $\frac{n_k}{10^k}$ dans l'ordre d'approximation proposé. Alors le logarithme du produit $1-z$ sera égal à $-z$. La Table donnant d'ailleurs les logarithmes de chacun des facteurs $1+\frac{n_1}{100}$, $1+\frac{n_2}{1000}$, ..., on pourra, de l'égalité précédente, tirer le logarithme de y, d'où l'on conclura immédiatement celui de x.

Le problème inverse, de trouver le nombre correspondant à un logarithme donné, se résout avec la même facilité.

On pourrait appliquer à ce calcul les remarques qu'a faites M. F. Burnier, et que nous avons reproduites dans une Note insérée au tome VIII des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, p. 188. J. H.

MANSION (PAUL), professeur à l'Université de Gand. — THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE. — Paris, Gauthier-Villars, 1 vol. in-8°, 288 p.

Le Livre de M. Mansion rendra service à tous ceux qui veulent se mettre au courant des travaux, anciens ou récents, qui ont été faits sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Outre l'exposition des principales vérités acquises, les lecteurs y trouveront une foule de précieux renseignements historiques et bibliographiques.

L'Ouvrage est divisé en trois Livres, où l'on trouvera exposées les méthodes de Lagrange et de Pfaff, de Jacobi, de Cauchy et de Lie; enfin, dans un Appendice, la méthode de Lie est exposée en tant que synthèse des idées antérieures.

Dans l'Introduction qui précède ces trois Livres, M. Mansion donne, d'après Lagrange, la définition du problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, définition qu'il fait suivre de l'interprétation géométrique donnée par M. Lie. Il indique en outre et discute les procédés qui permettent de faire disparaître la variable indépendante des équations en question.

Le Livre premier contient l'analyse des travaux de Lagrange et de Pfaff, analyse aussi intéressante au point de vue historique qu'utile au point de vue pratique, car les méthodes de ces géomètres se trouvent être souvent particulièrement commodes dans les applications. Les recherches de Lagrange sur les équations linéaires et non linéaires, la généralisation de ces recherches donnée par Jacobi en 1827 et où les calculs de Pfaff se trouvent refaits en sens inverse, la méthode de Pfaff lui-même conduisant à intégrer n systèmes d'équations simultanées dont chacun ne peut être formé qu'après l'intégration complète de tous les précédents; la réduction indiquée par Jacobi en 1836, et bien antérieurement par Cauchy, fondée sur le choix des valeurs initiales des variables comme constantes arbitraires, sont ensuite exposées.

Le second Livre est consacré à la méthode de Jacobi et de Bour, aux perfectionnements de cette méthode dus à Weiler et à Clebsch, aux méthodes de Korkine, de Boole et de Mayer. On trouvera au

début l'exposition de la *Nova Methodus*, puis l'extension aux équations simultanées donnée par Bour et trouvée par lui indépendamment des travaux de Jacobi, qui n'ont été publiées qu'en 1862; vient ensuite la simplification de Weiler, telle que Clebsch l'a exposée, ou plutôt la simplification que Clebsch a exposée à propos du travail de Weiler : car, ainsi que M. Mayer l'a montré récemment, la portée des deux simplifications n'est pas la même. De là, M. Mansion passe aux méthodes de Korkine et de Boole, qui procèdent par changement de variables, et dont la première s'applique aux équations simultanées non linéaires, et la seconde seulement aux équations linéaires. La méthode de M. Mayer, qu'on rencontrera ensuite, s'applique aussi aux équations linéaires et permet d'opérer une réduction considérable dans le nombre des intégrations, quand on l'applique aux équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi.

Le Livre troisième contient d'abord l'exposé de la méthode de Cauchy. M. Mansion a particulièrement utilisé le travail où Cauchy lui-même, en 1841, a repris l'exposition, sous une forme plus générale, de la méthode qu'il avait fait connaître en 1818 : il a pu montrer ainsi comment cette méthode pouvait s'appliquer à certains cas singuliers qui semblent tout d'abord devoir lui échapper, par exemple au cas des équations homogènes par rapport aux dérivées partielles. Enfin M. Mansion résume l'exposition faite par M. Mayer de la méthode de M. Lie, où cette méthode est considérée comme une extension de la méthode de Cauchy, puis dans un court Appendice donne, au moyen des idées de M. Lie lui-même, un aperçu synthétique des méthodes principales.

Nous devons dire, en terminant, que M. Mansion a donné, au début de son Ouvrage, une excellente analyse de son travail, analyse dont nous avons largement profité pour ce qui précède.

J. T.

ZEUTHEN (H.-G.). — RÉVISION ET EXTENSION DES FORMULES NUMÉRIQUES DE LA THÉORIE DES SURFACES RÉCIPROQUES ([1]).

M. Salmon a trouvé ([2]), à une près, les relations qui ont lieu entre les nombres des singularités ordinaires d'une surface algébrique qu'on regarde, à la fois, comme lieu de points et enveloppe de plans. M. Cayley a trouvé ([3]) la relation qui restait encore à obtenir, et en même temps il a étendu cette théorie par l'introduction de plusieurs singularités extraordinaires. D'autres ont été introduites plus tard par M. Zeuthen ([4]), qui a toutefois, immédiatement après, exprimé quelques doutes ([5]) sur quelques-uns des coefficients des termes introduits par M. Cayley et lui-même. Ces doutes l'ont engagé à entreprendre une nouvelle et uniforme déduction, par le principe de correspondance, des formules dont il s'agit, et une étude détaillée de toutes les singularités auxquelles il avait égard, y compris plusieurs singularités nouvelles. Le Mémoire actuel est le fruit de ce travail.

Afin de rendre compte ici des nouvelles formes des équations numériques auxquelles ont conduit cette révision et cette extension, il nous sera commode de renvoyer pour la plupart des notations à la troisième édition de la *Geometry of three Dimensions* de M. Salmon ([6]). Celles de M. Zeuthen, dont nous ferons aussi usage ici, n'en diffèrent que par la circonstance qu'il désigne par k et h les nombres *plückériens* des génératrices doubles des cônes projetant la courbe double et la courbe cuspidale (et non pas seulement les nombres des points doubles *apparents* de ces courbes), qu'il n'a pas besoin du nombre θ des points de singularité inexpliquée, regardant ces points comme faisant partie des singularités déjà introduites par les notations de χ' et B', et enfin qu'il fait un usage analogue des notations k', h', χ et B. Il désigne encore par U le nombre

---

([1]) *Mathematische Annalen*, t. X; 1876.

([2]) *Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XXIII. *Voir* aussi les deux premières éditions de la « *Geometry of three Dimensions*. »

([3]) *A Memoir on the Theory of reciprocal surfaces*. (*Philosophical Transactions*, 1869 et 1871).

([4]) *Sur les droites multiples des surfaces*. (*Mathematische Annalen*, t. IV).

([5]) *Note sur la théorie des surfaces réciproques*. (*Mathematische Annalen*, t. IV).

([6]) Pages 539 et 549, ou pages 605 et 616 dans l'édition allemande de M. Fiedler.

des points uniplanaires, par O le nombre des plans dont les sections ont des points triples en des points simples de la surface, par U′ et O′ les nombres des singularités réciproques, et par f, d, g, e, i ceux des points doubles et stationnaires de la courbe double, des points doubles et stationnaires de la courbe cuspidale, et des points d'intersection de ces deux courbes qui se trouvent aux points doubles à un seul plan tangent (double), qui est le lieu de droites rencontrant la surface en quatre points coïncidents, et qui, de son côté, n'a qu'un seul point de contact. Selon le résultat principal d'un Mémoire précédent du même auteur (¹), nous n'avons pas besoin de notations f', d', g', e' et i', dont les significations ne différeraient pas de celles de f, d, g, e et i.

Avec ces notations on aura les équations suivantes, où nous ne ferons pas les réductions qui cacheraient les origines des différents termes :

$$a = a',$$
$$n(n-1) = a + 2b + 3c,$$
$$a(a-1) = n + 2\delta' + 3\varkappa',$$
$$c - \varkappa' = 3(n-a),$$
$$b(b-1) = q + 2k + 3\left\{\gamma + \sum{}'[\eta'(\nu'-4) + 2\eta'\zeta'] + d\right\},$$
$$c(c-1) = r + 2h + 3(\beta + 2O' + e),$$
$$a(n-2) = \left[\varkappa - B - \sum(\eta + 2\zeta)\right] + \rho + 2\sigma + \sum[x(\mu-2)],$$
$$b(n-2) = \rho + 2\beta + 3\gamma + 3t + 9O' + \sum[y(\mu-2)],$$
$$c(n-2) = 2\sigma + 4\beta + \gamma + 8\chi' + 16B' + 12O' + \sum[z(\mu-2)],$$
$$a(n-2)(n-3)$$
$$= 2\left\{\delta - 3U - \sum\left[\frac{\nu(\nu-1)}{2} + 2\nu\eta + 3\nu\zeta + \frac{4\eta(\eta-1)}{2} + 6\eta\zeta + \frac{9\zeta(\zeta-1)}{2} + \zeta\right]\right\}$$
$$+ 3\left[ac - 3\sigma - \chi - \sum(xz)\right] + 2\left[ab - 2\rho - j - \sum(xy)\right]$$
$$+ \sum[x(\mu-2)(\mu-3)],$$

(¹) *Sur une classe de points singuliers des surfaces.* (*Mathematische Annalen*, t. IX).

$$b(n-2)(n-3)$$
$$= 4\left\{k - 3t - 30' - \sum\left[\frac{y(y-1)}{2}\right]\right.$$
$$- \sum{}'\left[u' + 2\zeta'(\nu'-3) + \frac{3\eta'(\eta'-1)}{2} + \eta'\zeta' + \frac{6\zeta'(\zeta'-1)}{2}\right] - \left. f\right\}$$
$$+ \left[ab - 2\rho - j - \sum(xy)\right]$$
$$+ 3\left[bc - 3\beta - 2\gamma - 12O' - \sum(yz) - \sum{}'(\nu' + 4\eta' + 4\zeta') - i\right]$$
$$+ 9O' + \sum[y(\mu-2)(\mu-3)],$$

$$c(n-2)(n-3)$$
$$= 6\left\{h - 6\chi' - 12B' - U' - 4O' - \sum\left[\frac{z(z-1)}{2}\right] - \sum{}'(\zeta') - g\right\}$$
$$+ \left[ac - 3\sigma - \chi - \sum(xz)\right]$$
$$+ 2\left[bc - 3\beta - 2\gamma - 12O' - \sum(yz) - \sum{}'(\nu' + 4\eta' + 4\zeta') - i\right]$$
$$+ 18O' + \sum[z(\mu-2)(\mu-3)],$$

$$\sigma + 2r - 3c - 4j' - 3\chi' - 14U' + 2O' - \sum{}'(2\mu' + \nu' + 8\eta' + 11\zeta')$$
$$= \sigma' + 2r' - 3c' - 4j - 3\chi - 14U + 2O - \sum(2\mu + \nu + 8\eta + 11\zeta),$$

et celles qui en résultent par le principe de dualité.

Abstraction faite des différences dues aux altérations des notations et aux nouveaux termes qui sont introduits, les formules indiquées ici diffèrent de celles qu'on trouve aux endroits cités par plusieurs termes contenant χ', B', η' et ζ'.

Dans les formules actuelles on a supposé que les singularités se présentent de la manière la plus générale que permet leur définition; mais, en ayant égard à l'origine des termes respectifs, on trouve sans difficulté les modifications que peuvent subir les formules dans des cas particuliers. Le Mémoire contient aussi des exemples de ces modifications.

La détermination des coefficients se fait par une étude détaillée des propriétés des différents points et plans singuliers. Cette étude

repose notamment sur la discussion des dégénérescences que subit un cône circonscrit pour des positions particulières du sommet; le but de la Note précédente du même auteur ([1]) a été de faciliter cette discussion. Parfois, lorsque cette étude directe des propriétés des points et plans singuliers, qui conduit à la détermination des coefficients des équations numériques, a été trop difficile, l'auteur suit une marche inverse, en déterminant *a posteriori* un coefficient par la déduction d'équations numériques incomplètes, et en se demandant ensuite la propriété géométrique du point ou plan singulier exprimée par la valeur trouvée du coefficient.

Une grande partie des propriétés trouvées dans le Mémoire sont relatives aux plans tangents stationnaires et doubles de la surface qui ont les différents points singuliers pour points de contact, et aux branches de la courbe cuspidale et double qui sont tangentes aux plans singuliers.

On trouve, par exemple, que chacun des deux plans tangents en un point biplanaire est en général (si l'on regarde la surface comme lieu de points) un plan tangent quadruple de l'enveloppe des plans tangents stationnaires; les génératrices de contact, mais non pas les branches correspondantes de l'arête de rebroussement de la développable, passent par le point biplanaire. Chacun des deux plans tangents comptant pour trois plans tangents menés à la surface par les droites qui s'y trouvent, le principe de dualité montre qu'un plan biponctuel contient en général (si l'on regarde la surface comme enveloppe de plans) deux points singuliers, qui sont des points triples de la surface (à un seul plan tangent), et des points quadruples de la courbe cuspidale. Ces plans et points singuliers remplacent les plans et points *of unexplained singularity* de M. Cayley. H. Z.

ANDRÉ (Désiré). — DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET DE LEURS PUISSANCES.

I. On sait que les fonctions elliptiques, ainsi que leurs puissances d'exposant entier et positif, peuvent être développées par rapport

---

([1]) *Note sur les singularités des courbes planes*. (*Mathematische Annalen*, t. X).

aux puissances croissantes de la variable. On sait aussi que, dans ces développements, les puissances successives de la variable ont pour coefficients respectifs des polynômes entiers en k^2. Si donc on désigne par π un exposant entier et positif, et par $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ les trois fonctions elliptiques, on peut écrire d'abord

$$\lambda^\pi(x) = \Sigma_q(-1)^q A_q^{(\pi)} \frac{x^{\pi+2q}}{(\pi+2q)!},$$

$$\mu^\pi(x) = \Sigma_q(-1)^q B_q^{(\pi)} \frac{x^{2q}}{(2q)!},$$

$$\nu^\pi(x) = \Sigma_q(-1)^q C_q^{(\pi)} \frac{x^{2q}}{(2q)!},$$

ensuite

$$A_q^{(\pi)} = \Sigma_i \alpha_{q,i}^{(\pi)} k^{2i}, \quad B_q^{(\pi)} = \Sigma_i \beta_{q,i}^{(\pi)} k^{2i}, \quad C_q^{(\pi)} = \Sigma_i \gamma_{q,i}^{(\pi)} k^{2q-2i}.$$

M. Désiré André s'est proposé de déterminer la forme générale, qui était encore inconnue, des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ regardés comme des fonctions de q, les indices π et q étant supposés constants. Nous ferons connaître les résultats qu'il a obtenus, mais seulement après que nous aurons exposé d'une manière sommaire la méthode qu'il a employée.

II. Pour former les développements considérés, il suffit de calculer les dérivées d'ordre pair des fonctions qu'on développe. C'est ce que fait d'abord l'auteur du Mémoire. Seulement, afin de mener de front ce qui concerne les trois fonctions elliptiques, il étudie, non pas ces fonctions elles-mêmes, mais une fonction $\varphi(x)$, qui satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\varphi^2 + \mathfrak{C}\varphi^4,$$

et qui contient les trois fonctions elliptiques comme cas particuliers.

Les dérivées d'ordre pair de $\varphi^\pi(x)$ sont des polynômes entiers en φ, pairs ou impairs en même temps que l'exposant π, de telle sorte que, si l'on suppose cet exposant impair et égal à $2p+1$, on a

$$\frac{d^{2q}.\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \Sigma_r F_{q,r}^{(2p+1)} \varphi^{2r+1}.$$

Les coefficients F qui correspondent à une même valeur $2p+1$ de π peuvent être disposés en un triangle, analogue au triangle de Pascal, dont chaque ligne horizontale présente les coefficients d'une même dérivée et chaque colonne verticale ceux d'une même puissance de φ. On constate alors qu'un quelconque des F de ce triangle est égal à la somme des trois F les plus voisins de la ligne horizontale immédiatement supérieure, multipliés respectivement par des facteurs déterminés. Il en résulte un procédé presque mécanique pour calculer de proche en proche les dérivées d'ordre pair, et c'est de l'étude attentive de ce procédé que M. D. André tire toute la suite de son Mémoire.

Supposons que l'on calcule ainsi, mécaniquement, toutes les dérivées d'ordre pair, jusqu'à celle de l'ordre $2q$ inclusivement, mais qu'on n'effectue aucune réduction. On obtient, pour $F_{q,r}^{(2p+1)}$, un polynôme dont chaque terme renferme un coefficient numérique et une puissance, d'exposant positif ou nul, de chacune des quantités $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{G}$. Le nombre des termes de ce polynôme est celui des chemins qui montent de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ à $F_{0,p}^{(2p+1)}$, en passant, de toutes les manières possibles, de chaque F où l'on se trouve à l'un des trois F les plus voisins de la ligne supérieure. Si l'on figure chacun de ces chemins par des points placés aux F où il passe et par des traits joignant ces points successifs, on obtient une ligne brisée présentant des traits de trois sortes, d'où l'épithète de *ternaires* donnée à ces chemins. A chaque chemin ternaire répond un terme du polynôme $F_{q,r}^{(2p+1)}$, et ce terme est le produit de plusieurs facteurs bien déterminés, correspondants respectivement aux divers éléments du chemin, le point de départ excepté. Il suffit donc, pour former le polynôme $F_{q,r}^{(2p+1)}$, de connaître tous les chemins ternaires montant de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ à $F_{0,p}^{(2p+1)}$. De là un moyen d'exprimer $F_{q,r}^{(2p+1)}$ d'une façon combinatoire.

Mais on peut aller plus loin. Considérons, en effet, dans ce polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de $\mathfrak{V}$, le terme où cette quantité $\mathfrak{V}$ présente l'exposant $q-e-2i$, le nombre e étant égal, en valeur absolue, à la différence des indices r et p. Ce terme, dont nous désignerons le coefficient par $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$, est la somme de tous les résultats qui proviennent des chemins ternaires offrant chacun $q-e-2i$ traits verticaux. Si, dans ces chemins, on supprime tous ces traits verticaux, ainsi que les points qui les surmon-

tent immédiatement, et qu'on rapproche les tronçons restants, on obtient de nouveaux chemins, dits *binaires,* parce qu'ils ne présentent que des traits de deux sortes, et la considération de ces chemins binaires a pour effet immédiat de permettre d'écrire l'expression combinatoire de $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$, et de séparer, dans cette expression, les facteurs qui dépendent de q de ceux qui n'en dépendent pas.

Or il se trouve justement que le produit des facteurs dépendants de q est le terme général d'un développement dont on connaît la fonction génératrice. Le même fait se reproduit pour le coefficient $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$, regardé comme une fonction de q, les indices p, r et i étant supposés constants. La fonction génératrice de ce coefficient ainsi considéré est une fraction rationnelle, dont le numérateur est d'un degré inférieur à celui du dénominateur et dont le dénominateur peut être immédiatement écrit.

De ce que cette fonction génératrice est une fraction rationnelle, il résulte que $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ est le terme général d'une série récurrente proprement dite ; et, comme le dénominateur de cette fraction se présente spontanément décomposé en facteurs du premier degré, on peut obtenir directement la forme générale du coefficient $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$.

Ces résultats, relatifs aux dérivées d'ordre pair de $\varphi^{\varkappa}(x)$, étant ainsi obtenus, l'auteur du Mémoire les applique d'abord aux développements des fonctions elliptiques et de leurs puissances, en supposant que, dans ces développements, les coefficients des puissances successives de x soient ordonnés, non point suivant les puissances de k^2, mais seulement suivant les puissances des binômes $-1-k^2$, $2k^2-1$, $2-k^2$, par lesquels il faut remplacer ∇ pour passer de la fonction φ aux fonctions elliptiques λ, μ, ν ; il considère ensuite les mêmes développements, en y ordonnant cette fois par rapport aux puissances de k^2 les polynômes qui multiplient les puissances successives de x, et c'est ainsi qu'il parvient à la forme générale des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\varkappa)}$, $\beta_{q,i}^{(\varkappa)}$, $\gamma_{q,i}^{(\varkappa)}$, regardés comme des fonctions de la seule variable q.

III. Voici les résultats, tout nouveaux, ce nous semble, qu'obtient ainsi M. D. André :

Les coefficients $\alpha_{q,i}^{(\varkappa)}$, $\beta_{q,i}^{(\varkappa)}$, $\gamma_{q,i}^{(\varkappa)}$, où q est seul variable, sont chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Cette série, suivant que π est égal à $2p+1$ ou à $2p$, est définie par la première ou la seconde des deux équations

$$\prod_{0}^{p}{}_t [z-(2t+1)^2]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t [z-(2t+1)^2]^{p+i+1-t} = 0,$$

$$\prod_{1}^{p}{}_t [z-(2t)^2]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t [z-(2t)^2]^{p+i+1-t} = 0.$$

Enfin les coefficients $\alpha^{(\pi)}_{q,i}$, $\beta^{(\pi)}_{q,i}$, $\gamma^{(\pi)}_{q,i}$, lorsque q est égal à $2p+1$, sont tous les trois de la forme

$$\sum_{0}^{p}{}_t \Xi_t(q)(2t+1)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i}{}_t \xi_t(q)(2t+1)^{2q},$$

et, lorsqu'il est égal à $2p$, tous les trois de la forme

$$\sum_{1}^{p}{}_t \Xi_t(q)(2t)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i}{}_t \xi_t(q)(2t)^{2q},$$

$\Xi_t(q)$ et $\xi_t(q)$ désignant, dans chacune de ces expressions, deux polynômes entiers en q, le premier toujours du degré i et le second du degré $p+i-t$.

Il suffit évidemment de remplacer π par 1 et par 2 pour obtenir tous les résultats relatifs aux fonctions elliptiques elles-mêmes et aux carrés de ces fonctions.

GULDBERG (C.-M.) et MOHN (H.). — ÉTUDES SUR LES MOUVEMENTS DE L'ATMOSPHÈRE. Programme de l'Université de Christiania pour 1876. Première Partie.

Les auteurs ont abordé le développement de la Mécanique de l'atmosphère dans cette première partie de leurs études. Les résultats obtenus sont importants pour la Science météorologique.

Dans le premier Chapitre, les auteurs traitent de l'équilibre de l'atmosphère; ils calculent les transformations qu'éprouve une masse d'air en s'élevant dans l'atmosphère sans absorber ni dégager de chaleur. Ces transformations déterminent l'équilibre stable ou

instable de l'atmosphère, d'où dépend la naissance des courants verticaux.

Les courants verticaux produisent les vents, c'est-à-dire les courants horizontaux; dans le deuxième Chapitre, les auteurs traitent les vents aux isobares rectilignes et les vents aux isobares circulaires ou les tourbillons. Ils introduisent le frottement suivant la surface de la Terre et la force déviatrice de la rotation de la Terre. Ils montrent qu'on peut calculer les trajectoires, les isobares, les vitesses, les gradients et les pressions dans un vent, en connaissant les paramètres ou constantes du système. Pour un tourbillon, il n'y a que deux paramètres, savoir : la vitesse maximum et la distance du centre où cette vitesse a lieu.

En traitant les vents aux isobares rectilignes, ils développent l'équation de la trajectoire d'un vent qui passe l'équateur; l'accord avec l'observation sur les vents alizés de l'Atlantique et de l'océan Indien, et sur les moussons d'ouest dans l'océan Indien est très-frappant.

Dans le troisième Chapitre, les auteurs développent les équations d'un courant vertical, et trouvent que la hauteur d'un courant vertical est toujours limitée. Un système de vent est donc composé de deux courants horizontaux, dont l'un se meut suivant la surface de la Terre, et l'autre dans les couches supérieures de l'atmosphère, et d'un courant vertical ascendant ou descendant qui forme l'intermédiaire entre les deux courants horizontaux.

Il résulte de ces études qu'une des premières choses à faire pour assurer le succès de la Météorologie, c'est la création de stations météorologiques dans la hauteur, soit sur les montagnes, soit en ballons.

MOHN (H.) og GEELMUYDEN (H.) — ELEMENTÆR LÆREBOG I ASTRONOMI. — Christiania, 1876. 1 vol. grand in-8°; 325 p., 2 cartes.

Les auteurs de ce Traité ont divisé leur exposition en deux Parties, dont l'une, rédigée par M. Mohn, ainsi que les neuf premiers Chapitres de la suivante, est consacrée à l'*Astronomie sphérique*, c'est-à-dire à l'observation des changements d'aspect produits par le déplacement relatif des corps célestes, pour un observateur placé

sur la Terre, sans se préoccuper des mouvements réels qui donnent lieu à ces phénomènes; l'autre, ayant pour objet l'*Astronomie théorique*, ou la recherche des causes de ces changements d'aspect, c'est-à-dire la description des mouvements réels auxquels ils correspondent, et la détermination des actions physiques auxquelles ces mouvements sont dus, a été complétée par M. Geelmuyden, en l'absence de M. Mohn, retenu par une expédition scientifique sur l'Atlantique. Nous croyons, avec les auteurs, que cette méthode, conforme à la marche historique de la Science, présente de grands avantages sur celle que l'on a quelquefois voulu introduire, en prétendant exposer dès le début ce que l'on considère comme les mouvements *réels* des astres, et ce qui n'est au fond qu'une hypothèse approchant un peu plus de la réalité, mais bien éloignée encore de la vérité, et présentant de grandes difficultés aux commençants.

La première Partie comprend cinq Chapitres, dont le premier contient l'étude du mouvement diurne du ciel. La description des phénomènes et les définitions qui s'y rattachent sont données avec une clarté et une précision très-remarquables. Il est, dans cet excellent Traité, fait un judicieux usage des formules mathématiques, qui offrent le moyen le plus clair d'exprimer les lois et de représenter les phénomènes. De nombreuses figures dans le texte viennent en aide au lecteur. Voici les titres des Chapitres :

Première Partie :

I. Mouvement diurne du ciel.
II. Détermination de la position d'un astre par les observations.
III. Mouvement annuel du Soleil.
IV. Mesure et détermination du temps.
V. Précession; nutation; aberration.

La seconde Partie, plus étendue, comprend quinze Chapitres :

I. Figure et grandeur de la Terre.
II. La parallaxe diurne.
III. Rotation de la Terre.
IV. Mouvement des planètes.
V. Les lois de Kepler.
VI. La loi newtonienne de la gravitation.
VII. Mouvement de la Lune.
VIII. Éclipses.

IX. Distance de la Terre au Soleil et son mouvement autour de cet astre.

X. Nouveaux instruments. (En particulier le spectroscope.)

XI. Le Soleil.

XII. Les planètes et leurs satellites.

XIII. Comètes et étoiles filantes.

XIV. Étoiles fixes.

XV. L'Univers.

L'Ouvrage se termine par une liste des petites planètes, par des indications sur l'usage d'une carte céleste et par une Table alphabétique des matières. Les auteurs y ont joint deux cartes lithographiées, l'une représentant l'hémisphère boréal, l'autre la zone équatoriale.

KLEIN (F). — UEBER BINÄRE FORMEN MIT LINEAREN TRANSFORMATIONEN IN SICH SELBST (¹).

Dans ce travail, l'auteur applique le mode imaginé par Riemann, pour représenter une quantité complexe par un point de la sphère, à l'étude des formes algébriques qui sont, dans ce sens, représentées par les sommets des polyèdres réguliers. Il a été conduit indirectement à ces recherches par des problèmes de Géométrie projective. Déjà (*Math. Ann.*, IV, VI) il s'était occupé des questions de mesure dans la Géométrie projective et des mouvements pour lesquels la surface fondamentale du second degré correspondante ne cesse pas de coïncider avec elle-même. Si, en particulier, on suppose que cette surface soit une sphère, il avait montré que les transformations de la surface en elle-même sont identiques avec celles qu'elle subit si, supposant la variable complexe $x+iy$ représentée sur la sphère, on soumet cette variable à une transformation linéaire quelconque

Se trouvant ainsi en possession d'un nouveau moyen pour l'étude des transformations linéaires d'une quantité $x+iy$, l'auteur s'est posé les deux problèmes suivants :

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1875.

Construire tous les groupes finis, composés de telles transformations.

Étudier les formes algébriques qui se reproduisent par les transformations d'un de ces groupes, en s'aidant de la représentation géométrique.

Pour ce qui est de la première question, nous dirons seulement que les groupes cherchés sont représentés par les mouvements qui font revenir sur eux-mêmes les polyèdres réguliers, dont les sommets représentent ces mêmes formes dont le second problème propose l'étude. M. Klein étudie en particulier une forme du douzième ordre représentée par les sommets d'un icosaèdre régulier. Il parvient, par des considérations géométriques, à donner complétement, au sens de la théorie des invariants, le système de formes de cet icosaèdre. Il discute ensuite la résolution de l'équation correspondante, et donne en particulier des résolvantes du sixième et du cinquième degré, qui ont une signification géométrique simple. Si l'on fait attention à la signification des quantités qui entrent dans ces formules, et à la façon dont elles sont obtenues, on reconnaît le lien étroit de ces recherches avec celles de MM. Kronecker, Hermite et Brioschi sur la résolution de l'équation générale du cinquième degré : ces recherches, dans la théorie de M. Klein, reçoivent une interprétation sensible et même élémentaire.

Nous pouvons, grâce à l'obligeance de l'auteur, ajouter deux remarques :

L'une concerne la priorité : M. Schwarz a déjà employé les polyèdres réguliers pour la représentation de formes algébriques (*Journal de Borchardt*, 1875), mais à propos de questions tout à fait différentes.

L'autre est relative à un travail antérieur de M. Klein (*Erlanger Programmschrift*, 1872), où il a fait une étude de la représentation des formes binaires cubiques et quadratiques, qui se déduirait aisément du présent travail. Les points pour lesquels s'annule une forme cubique binaire peuvent être représentés par trois points équidistants de l'équateur de la sphère, la covariante cubique étant représentée de même par les trois points de l'équateur symétriques des précédents par rapport au centre, et la forme hessienne par les deux pôles de l'équateur. Pour représenter une forme biquadratique, on part de la covariante correspondante du sixième degré :

celle-ci peut être représentée par les six points d'intersection de la sphère et d'un système d'axes dont l'origine coïncide avec le centre de la sphère : les quatre points qui représentent la forme fondamentale et les quatre autres points qui représentent la forme hessienne se disposent symétriquement par rapport à ces axes.

WEDEKIND (L.). — BEITRÄGE ZUR GEOMETRISCHEN INTERPRETATION BINÄRER FORMEN (1).

Les recherches de M. Wedekind se relient à celles de M. Klein. Nous citerons le théorème suivant : « Soient a, b, c, d quatre points de la sphère, représentant les quantités complexes Z_a, Z_b, Z_c, Z_d; par trois quelconques de ces points faisons passer un plan : les quatre plans ainsi obtenus couperont la sphère suivant quatre cercles A, B, C, D; sur chaque cercle choisissons une direction positive et désignons, par exemple, par $(AB)_d$ l'angle des deux directions positives sur les deux cercles A, B à partir de leur point d'intersection D. »

On a, pour l'expression du rapport anharmonique des quatre points,

$$(a, b, c, d) = \frac{Z_a - Z_c}{Z_c - Z_b} : \frac{Z_a - Z_d}{Z_d - Z_b} = \frac{\sin(AC)_d}{\sin(BC)_d} e^{-i(AB)_d}.$$

Citons encore une méthode pour déduire des zéros d'une forme biquadratique la construction des zéros de la forme covariante de Hesse correspondante.

BÄCKLUND (A.-V.). — UEBER FLÄCHENTRANSFORMATIONEN (2).

Les *transformations de contact*, suivant le nom que leur a donné M. Lie, ont été récemment l'objet d'un grand nombre de travaux. Toutefois on n'avait point traité cette question : Existe-t-il d'autres

(1) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.
(2) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1875.

méthodes de Clebsch et de M. Weiler ne doivent pas pour cela être rejetées; car si, dans les méthodes de MM. Lie et Mayer, les intégrations sont toujours moins nombreuses, elles peuvent être plus élevées.

Le dernier paragraphe de ce Mémoire n'a pas un rapport intime avec les travaux de M. Weiler : il est consacré à montrer que le procédé donné par Jacobi pour ramener une équation aux dérivées partielles, qui contient explicitement la fonction inconnue, à une autre qui ne la contient plus, n'est pas, comme on l'avait cru dernièrement, illusoire, mais bien qu'une solution de l'équation transformée conduit toujours à une solution de l'équation proposée. Cette remarque avait déjà été faite par M. Mansion dans sa *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Paris, 1875).

HARNACK (A.). — UEBER EINE BEHANDLUNGSWEISE DER ALGEBRAISCHEN DIFFERENZIALE IN HOMOGENEN COORDINATEN (¹).

C'est Aronhold qui a introduit le premier (*Journal de Crelle*, t. 61) les coordonnées homogènes dans l'expression de la différentielle relative à une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre. La méthode employée par Aronhold pour les intégrales d'espèce $p = 0$ est reprise par M. Harnack pour les intégrales irrationnelles d'espèce quelconque. Elle conduit à une démonstration nouvelle du théorème d'Abel. La substitution d'une somme d'intégrales rationnelles à une somme d'intégrales irrationnelles revient, par l'emploi des coordonnées homogènes, à une proposition d'Algèbre dont un cas particulier a été donné par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 13 et 14). En appliquant le théorème de Jacobi à une courbe algébrique non irréductible (telle que le premier membre de son équation se décompose en un produit de deux facteurs), on est conduit à une nouvelle proposition qui, relativement aux différentielles algébriques, revient au théorème suivant :

Une somme d'intégrales relatives aux deux systèmes de points

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.



d'intersection de la courbe fondamentale avec un couple de courbes peut être remplacée par la somme des intégrales évaluées le long de la courbe qui détermine sur la première les points d'infinité de l'intégrale, les limites restant les mêmes et les chemins d'intégration se correspondant.

Ce théorème contient le théorème d'Abel; car les points d'infinité d'une intégrale peuvent toujours être obtenus par l'intersection de la courbe fondamentale avec une courbe rationnelle. L'extension du théorème de Jacobi donne ensuite un moyen d'évaluer la somme d'intégrales rationnelles au moyen des fonctions logarithmiques et algébriques.

Outre la somme de valeurs différentielles, relative à un système donné de points d'intersection, l'auteur étudie les fonctions symétriques des valeurs différentielles qui correspondent aux points d'intersection de deux droites infiniment voisines et de la courbe fondamentale. Les fonctions symétriques données par les coefficients de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré dont les racines sont les n valeurs différentielles susdites conduisent à l'intégration d'équations différentielles qui se présentent comme coïncidences principales dans les connexes.

Pour la formation de cette équation du $n^{\text{ième}}$ degré est utilisée la symbolique de M. Battaglini (*Giornale di Matematiche*, t. IX), où l'on traite la courbe générale du $n^{\text{ième}}$ ordre comme un produit de n droites.

Le problème posé est traité pour les coniques et les courbes générales du troisième et du quatrième ordre. En particulier, l'auteur établit un lien entre la différentielle elliptique, toujours finie, et la simple intégrale d'espèce $p = 0$, et plus généralement entre les différentielles algébriques d'espèces différentes. Ce lieu, que la symbolique de Battaglini met en évidence, a pour origine la même pensée qui a servi à fonder la preuve du théorème d'Abel et qui consiste à faire dériver une courbe du produit de courbes d'ordres moindres.

LIE (Sophus). — NEUE INTEGRATIONS-METHODE EINES $2n$-GLIEDRIGEN PFAFFSCHEN PROBLEMS. 26 p. (¹).

La théorie du problème de Pfaff, qui remonte à Pfaff, a été successivement perfectionnée par Gauss, Jacobi, Cayley, Natani, Clebsch, Grassmann, Weiler et Mayer.

Dès 1872, l'auteur avait annoncé, dans une Communication à l'Académie de Christiania, que sa méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre pourrait être étendue au problème de Pfaff dans sa forme la plus générale. Depuis, il a indiqué dans différentes occasions que l'ensemble de ses recherches sur lesdites équations peut être étendu au problème de Pfaff.

Dans le présent Mémoire, l'auteur traite d'une expression

$$X_1 dx_1 + \ldots + X_{2n} dx_{2n} = \Sigma X dx,$$

qui peut être mise sous la forme

$$F_1 df_1 + \ldots + F_n df_n,$$

où $f_1, \ldots, f_n, F_1, \ldots, F_n$ désignent des quantités *indépendantes*. Pour effectuer cette réduction, l'auteur cherche d'abord une intégrale du premier système de Pfaff. Ensuite il forme, par élimination et différentiation, une expression réduite

$$X_1^{(1)} dx_1 + \ldots + X_{2n-2}^{(1)} dx_{2n-2} = \Sigma X^{(1)} dx,$$

qui est tellement liée avec $\Sigma X dx$ que, l'intégration de $\Sigma X^{(1)} dx$ étant effectuée, on pourra par différentiation trouver une expression intégrale de $\Sigma X dx$. Ensuite, il forme le premier système de Pfaff appartenant à l'expression $\Sigma X^{(1)} dx$, et cherche une intégrale; puis il forme une troisième expression

$$X_1^{(2)} dx_1 + \ldots + X_{2n-4}^{(2)} dx_{2n-4} = \Sigma X^{(2)} dx.$$

Si l'on a intégré cette nouvelle expression, on pourra intégrer, par des opérations exécutables, d'abord $\Sigma X^{(1)} dx$ et ensuite $\Sigma X dx$.

En poursuivant de cette manière, on trouvera enfin une équation

(¹) *Videnskabs Selskabet i Christiania*, 1873.

différentielle ordinaire à deux variables

$$X_1^{(n-1)}dx_1 + X_2^{(n-1)}dx_2 = \Sigma X^{(n-1)}dx.$$

Ayant intégré cette équation, on trouve, en remontant successivement, des expressions intégrales des quantités

$$\Sigma X^{(n-2)}dx, \quad \Sigma X^{(n-3)}dx, \quad \ldots, \quad \Sigma X^{(1)}dx, \quad \Sigma X dx.$$

Il est impossible de trouver une méthode d'intégration qui demande des intégrations plus simples. S. L.

MÉLANGES.

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES ENTIERS ALGÉBRIQUES [1];

PAR R. DEDEKIND.

(Suite et fin.)

IV.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES IDÉAUX.

Dans cette Section, nous développerons la théorie des idéaux jusqu'au point indiqué dans l'Introduction, c'est-à-dire que nous démontrerons les lois fondamentales qui s'appliquent également à tous les corps finis sans exception, et qui régissent et expliquent les phénomènes de la divisibilité dans le domaine $\mathfrak{o}$ de tous les nombres entiers d'un tel corps Ω. Il ne sera question, dans ce qui va suivre, que de ces seuls nombres, à moins que nous n'indiquions expressément le contraire. La théorie se fonde sur la notion de l'*idéal,* dont nous avons mentionné l'origine dans l'Introduction, et dont l'importance a été suffisamment mise en lumière par l'exemple de la Section II (§§ 11 et 12). L'exposition suivante de la théorie coïncide pour le fond avec celle que j'ai donnée dans la seconde édition des *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet (§ 163); mais elle en diffère notablement pour la forme extérieure; par ces change-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XI, p. 278, et t. I (2e Série), p. 17, 69 et 144.

ments la théorie, si elle n'est pas abrégée, est cependant un peu simplifiée, et en particulier la principale difficulté qu'il s'agissait de surmonter est maintenant mise plus clairement en relief.

§ 19. — *Les idéaux et leur divisibilité.*

Soient, comme dans la Section précédente, Ω un corps fini du degré n, et $\mathfrak{o}$ le domaine de tous les nombres entiers ω contenus dans Ω. Nous entendons par un *idéal* de ce domaine $\mathfrak{o}$ tout système $\mathfrak{a}$ de nombres α du domaine $\mathfrak{o}$ qui possède les deux propriétés suivantes :

I. Les sommes et les différences de deux nombres α quelconques du système $\mathfrak{a}$ appartiennent au même système $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}$ est un module.

II. Tout produit $\alpha\omega$ d'un nombre α du système $\mathfrak{a}$ par un nombre ω du système $\mathfrak{o}$ est un nombre du système $\mathfrak{a}$.

Signalons d'abord un cas particulièrement important de cette conception d'*idéal*. Soit μ un nombre déterminé ; le système $\mathfrak{a}$ de tous les nombres $\alpha = \mu\omega$ divisibles par μ formera un idéal. Nous appellerons un tel idéal un *idéal principal,* et nous le désignerons par $\mathfrak{o}(\mu)$, ou plus simplement par $\mathfrak{o}\mu$ ou $\mu\mathfrak{o}$; il est évident que cet idéal ne sera pas altéré si l'on remplace μ par un nombre associé, c'est-à-dire par un nombre de la forme $\varepsilon\mu$, ε désignant une unité. Si μ est lui-même une unité, on aura $\mathfrak{o}\mu = \mathfrak{o}$, puisque tous les nombres contenus dans $\mathfrak{o}$ sont divisibles par μ. Il est encore facile de reconnaître qu'aucun autre idéal ne peut contenir d'unité ; car si l'unité ε est contenue dans l'idéal $\mathfrak{a}$, alors (d'après II) tous les produits $\varepsilon\omega$, et par suite aussi tous les nombres ω de l'idéal principal $\mathfrak{o}$ sont contenus dans $\mathfrak{a}$, et comme, par définition, tous les nombres de l'idéal $\mathfrak{a}$ sont également contenus dans $\mathfrak{o}$, on aura $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. Cet idéal $\mathfrak{o}$ joue le même rôle parmi les idéaux que le nombre 1 parmi les nombres rationnels entiers. Dans la notion d'un idéal principal $\mathfrak{o}\mu$ est compris aussi le cas singulier où $\mu = 0$, et où par conséquent l'idéal se compose du seul nombre zéro; toutefois nous exclurons ce cas dans ce qui va suivre.

Dans le cas de $n = 1$, où notre théorie se change dans l'ancienne théorie des nombres, tout idéal est évidemment un idéal principal,

c'est-à-dire un module de la forme $[m]$, m étant un nombre rationnel entier (§§ 1 et 5) ; il en est également de même des corps quadratiques spéciaux, qui ont été considérés dans la Section II (§ 6 et commencement du § 7). Dans tous ces cas, où tout idéal du corps Ω est un idéal principal, règnent les mêmes lois de la divisibilité des nombres que dans la théorie des nombres rationnels entiers, puisque tout nombre *indécomposable* possède aussi le caractère d'un *nombre premier* (*voir* l'Introduction et le § 7). C'est de quoi l'on pourra aisément se convaincre dans ce qui doit suivre; mais je présente dès maintenant cette remarque pour recommander au lecteur de faire la comparaison continuelle avec les cas spéciaux mentionnés et principalement avec l'ancienne théorie des nombres rationnels, parce que sans aucun doute cela facilitera beaucoup l'intelligence de notre théorie générale.

Puisque tout idéal (en vertu de I) est un module, nous transporterons immédiatement aux idéaux la notion de la divisibilité des modules (§ 1). On dit qu'un idéal $\mathfrak{m}$ est *divisible* par un idéal $\mathfrak{a}$, ou qu'il est un *multiple* de $\mathfrak{a}$, quand tous les nombres contenus dans $\mathfrak{m}$ sont aussi contenus dans $\mathfrak{a}$; on dit en même temps que $\mathfrak{a}$ est un *diviseur* de $\mathfrak{m}$. D'après cela, tout idéal est divisible par l'idéal $\mathfrak{o}$. Si α est un nombre de l'idéal $\mathfrak{a}$, l'idéal principal $\mathfrak{o}\alpha$ sera (d'après II) divisible par $\mathfrak{a}$; nous dirons, pour cette raison, que le *nombre* α, et par suite tout nombre contenu dans $\mathfrak{a}$, est *divisible* par l'idéal $\mathfrak{a}$.

Nous dirons de même qu'un idéal $\mathfrak{a}$ est *divisible* par le *nombre* η, quand $\mathfrak{a}$ sera divisible par l'idéal principal $\mathfrak{o}\eta$; alors tous les nombres α de l'idéal $\mathfrak{a}$ seront de la forme $\eta\rho$, et il est facile de voir que le système $\mathfrak{r}$ de tous les nombres $\rho = \frac{\alpha}{\eta}$ formera un idéal. Réciproquement, si ρ devient égal successivement à tous les nombres d'un idéal quelconque $\mathfrak{r}$, tandis que η désigne un nombre déterminé, différent de zéro, tous les produits $\eta\rho$ formeront encore un idéal divisible par $\mathfrak{o}\eta$; un tel idéal, formé au moyen de l'idéal $\mathfrak{r}$ et du nombre η, et nous le désignerons, pour abréger, par $\mathfrak{r}\eta$ ou $\eta\mathfrak{r}$; on aura évidemment $(\mathfrak{r}\eta)\eta' = \mathfrak{r}(\eta\eta') = (\mathfrak{r}\eta')\eta$, et $\eta\mathfrak{r}'$ sera toujours divisible par $\eta\mathfrak{r}$ dans le cas, et seulement dans ce cas, où $\mathfrak{r}'$ sera divisible par $\mathfrak{r}$; donc l'équation $\eta\mathfrak{r}' = \eta\mathfrak{r}$ entraîne l'équation $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}$. La notion d'un idéal principal $\mathfrak{o}\mu$ se déduit de celle de $\mathfrak{r}\mu$, lorsqu'on suppose $\mathfrak{r} = \mathfrak{o}$.

Enfin il est à remarquer que la divisibilité de l'idéal principal

$\mathfrak{o}\mu$ par l'idéal principal $\mathfrak{o}\eta$ est complétement identique avec la divisibilité du *nombre* μ par le *nombre* η; les lois de la divisibilité des *nombres* de $\mathfrak{o}$ sont donc entièrement contenues dans les lois de la divisibilité des *idéaux*.

Le plus petit commun multiple $\mathfrak{m}$ et le plus grand commun diviseur $\mathfrak{d}$ de deux idéaux quelconques $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sont aussi des idéaux; car, en tous cas, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{d}$ sont des modules (§ 1, 3° et 4°), et des modules divisibles par $\mathfrak{o}$, puisque $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont divisibles par $\mathfrak{o}$; si, de plus, $\mu = \alpha = \beta$ est un nombre contenu dans $\mathfrak{m}$ et partant aussi dans $\mathfrak{a}$ et dans $\mathfrak{b}$, et si $\delta = \alpha' + \beta'$ est un nombre du module $\mathfrak{d}$, le produit $\mu\omega = \alpha\omega = \beta\omega$ sera également contenu dans $\mathfrak{m}$, et le produit $\delta\omega = \alpha'\omega + \beta'\omega$ contenu dans $\mathfrak{d}$, puisque (en vertu de II) les produits $\alpha\omega$, $\alpha'\omega$ sont contenus dans $\mathfrak{a}$ et les produits $\beta\omega$, $\beta'\omega$ dans $\mathfrak{b}$. Donc $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{d}$ jouissent de toutes les propriétés d'un idéal. Il est clair en même temps que $\mathfrak{m}\eta$ sera le plus petit commun multiple, et $\mathfrak{d}\eta$ le plus grand commun diviseur des deux idéaux $\mathfrak{a}\eta$, $\mathfrak{b}\eta$.

Si $\mathfrak{b}$ est un idéal principal $\mathfrak{o}\eta$, le plus petit commun multiple $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sera en tous cas de la forme $\eta\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}$ étant encore un idéal et, en outre, un diviseur de $\mathfrak{a}$, puisque $\eta\mathfrak{a}$ est un multiple commun de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$, et qu'il est par suite divisible par $\eta\mathfrak{r}$; ce cas se présentera très-fréquemment dans la suite, et pour cette raison nous appellerons, pour abréger, l'idéal $\mathfrak{r}$ le diviseur de l'idéal $\mathfrak{a}$ *correspondant* au nombre η. Maintenant si $\mathfrak{r}'$ est le diviseur de $\mathfrak{r}$ correspondant au nombre η', $\mathfrak{r}'$ sera en même temps le diviseur de $\mathfrak{a}$ correspondant au produit $\eta\eta'$; car $\eta\eta'\mathfrak{r}'$ est le plus petit commun multiple de $\eta\mathfrak{r}$ et de $\mathfrak{o}\eta\eta'$, et par conséquent aussi celui de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta\eta'$, puisque $\eta\mathfrak{r}$ est le plus petit commun multiple de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$, et que $\mathfrak{o}\eta\eta'$ est divisible par $\mathfrak{o}\eta$.

§ 20. — *Normes.*

Comme tout idéal $\mathfrak{a}$ est aussi un module, nous dirons que deux nombres quelconques ω, ω' du domaine $\mathfrak{o}$ sont *congrus* ou *incongrus suivant* $\mathfrak{a}$, selon que leur différence $\omega - \omega'$ sera ou non divisible par $\mathfrak{a}$; nous représenterons la congruence de ω, ω' suivant $\mathfrak{a}$ (§ 2) par la notation

$$\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{a}}.$$

En outre des théorèmes établis précédemment, ayant lieu pour les

congruences par rapport à des modules quelconques, il faut encore remarquer que deux de ces congruences,

$$\omega \equiv \omega', \quad \omega'' \equiv \omega''' \pmod{\mathfrak{a}},$$

relatives au même idéal $\mathfrak{a}$, peuvent aussi être multipliées entre elles, et qu'elles entraînent ainsi la congruence

$$\omega\omega'' \equiv \omega'\omega''' \pmod{\mathfrak{a}};$$

car les produits $(\omega - \omega')\,\omega''$ et $(\omega'' - \omega''')\,\omega'$, et par suite aussi leur somme $\omega\omega'' - \omega'\omega'''$, sont des nombres de l'idéal $\mathfrak{a}$. Si, de plus, $\mathfrak{m}$ est un idéal principal $\mathfrak{o}\mu$, alors (en vertu du § 18) la congruence $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{m}}$ sera identique avec la congruence $\omega \equiv \omega' \pmod{\mu}$.

Une considération particulièrement importante est celle du *nombre* des classes de nombres différents par rapport à l'idéal $\mathfrak{a}$, et dont se compose le domaine $\mathfrak{o}$. Si μ est un nombre déterminé de l'idéal $\mathfrak{a}$, et différent de zéro, l'idéal principal $\mathfrak{o}\mu$ sera divisible par $\mathfrak{a}$, et comme $\mathfrak{a}$ est divisible par $\mathfrak{o}$, il en résulte (§ 2, 4°)

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}\mu) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{a})\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}\mu);$$

or (§ 18) le nombre $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}\mu) = \pm N(\mu)$, et par suite le domaine $\mathfrak{o}$ ne contient qu'un nombre fini de nombres incongrus par rapport à l'idéal $\mathfrak{a}$ (§ 2, 2°). Ce nombre $(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ sera dit la *norme de l'idéal* $\mathfrak{a}$, et nous le représenterons par $N(\mathfrak{a})$; la norme de l'idéal principal $\mathfrak{o}\mu$ est égale à $\pm N(\mu)$, et $\mathfrak{o}$ est évidemment le seul idéal dont la norme est égale à 1.

Si ρ parcourt un système complet de $N(\mathfrak{a})$ nombres incongrus (mod. $\mathfrak{a}$), la même chose aura lieu pour $(1 + \rho)$, et des congruences correspondantes $1 + \rho \equiv \rho'$, où ρ' parcourt les mêmes valeurs que ρ, résulte, par addition, $N(\mathfrak{a}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$, c'est-à-dire que $N(\mathfrak{a})$ est toujours divisible par $\mathfrak{a}$. Comme cas particulier, ce résultat contient ce théorème évident par lui-même, que $N(\mu)$ est divisible par μ (*voir* § 17).

Soit, de plus, $\mathfrak{r}$ un idéal quelconque, et η un nombre différent de zéro; on aura toujours

$$(\mathfrak{o}\eta, \mathfrak{r}\eta) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{r}) = N(\mathfrak{r});$$

car deux nombres $\eta\omega'$ et $\eta\omega''$ de l'idéal principal $\eta\mathfrak{o}$ sont congrus ou

incongrus (mod. $\varkappa\mathfrak{r}$), suivant que les nombres ω', ω'' du domaine $\mathfrak{o}$ seront congrus ou incongrus (mod. $\mathfrak{r}$).

Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux idéaux quelconques, $\mathfrak{m}$ leur plus petit commun multiple, $\mathfrak{d}$ leur plus grand commun diviseur; on aura (§ 2, 3° et 4°)

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{m}) = (\mathfrak{d}, \mathfrak{a}),$$

et, $\mathfrak{d}$ étant divisible par $\mathfrak{o}$,

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{d})(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}), \quad (\mathfrak{o}, \mathfrak{m}) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{b})(\mathfrak{b}, \mathfrak{m}),$$

partant

$$N(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\, N(\mathfrak{d}), \quad N(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\, N(\mathfrak{b}),$$

et

$$N(\mathfrak{m})\, N(\mathfrak{d}) = N(\mathfrak{a})\, N(\mathfrak{b}).$$

Si l'on applique ces théorèmes au cas où $\mathfrak{b}$ est un idéal principal $\mathfrak{o}\varkappa$, et où par suite $\mathfrak{m}$ est de la forme $\mathfrak{r}\varkappa$, l'idéal $\mathfrak{r}$ étant le diviseur de $\mathfrak{a}$ correspondant au nombre $\varkappa$ (§ 19), il vient

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{o}\varkappa, \mathfrak{r}\varkappa) = N(\mathfrak{r}),$$

et par conséquent

$$N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{r})\, N(\mathfrak{d}).$$

L'idéal $\mathfrak{r}$ peut maintenant aussi être défini comme le système de toutes les racines ρ de la congruence $\varkappa\rho \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$, comme il est facile de s'en convaincre.

§ 21. — *Idéaux premiers.*

Un idéal $\mathfrak{p}$ est dit un *idéal premier,* quand il est différent de $\mathfrak{o}$, et qu'il n'admet comme diviseur aucun autre idéal que $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{p}$. De cette définition résultent les théorèmes suivants :

1° Tout idéal $\mathfrak{a}$ différent de $\mathfrak{o}$ est divisible au moins par un idéal premier.

Car, parmi tous les idéaux qui sont différents de $\mathfrak{o}$ et diviseurs de l'idéal $\mathfrak{a}$, il en existe un $\mathfrak{p}$ dont la norme est la *plus petite,* et celui-là est certainement un idéal premier; si, en effet, $\mathfrak{d}$ était un idéal divisant $\mathfrak{p}$, mais différent de $\mathfrak{p}$ et de $\mathfrak{o}$, on aurait $(\mathfrak{d}, \mathfrak{p}) > 1$, par



suite $N(\mathfrak{p}) = (\mathfrak{d}, \mathfrak{p}) N(\mathfrak{d}) > N(\mathfrak{d})$, et $\mathfrak{d}$ serait un diviseur de l'idéal $\mathfrak{a}$, différent de $\mathfrak{o}$ et dont la norme serait $< N(\mathfrak{p})$, contre l'hypothèse ; donc $\mathfrak{p}$ est un idéal premier. C. Q. F. D.

2° Si le nombre η n'est pas divisible par l'idéal premier $\mathfrak{p}$, $\eta\mathfrak{p}$ sera le plus petit commun multiple des deux idéaux $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{o}\eta$.

Car le plus petit commun multiple de $\mathfrak{p}$ et de $\mathfrak{o}\eta$ est en tous cas de la forme $\eta\mathfrak{r}$, l'idéal $\mathfrak{r}$ étant un diviseur de $\mathfrak{p}$, et par suite ou $= \mathfrak{o}$ ou $= \mathfrak{p}$ (§ 19) ; mais $\mathfrak{r}$ ne peut pas être $= \mathfrak{o}$, puisque $\eta\mathfrak{o}$ n'est pas divisible par $\mathfrak{p}$; par conséquent $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}$. C. Q. F. D.

3° Si aucun des deux nombres η, ρ n'est divisible par l'idéal premier $\mathfrak{p}$, leur produit $\eta\rho$ ne sera pas non plus divisible par $\mathfrak{p}$.

Car autrement l'idéal $\eta(\mathfrak{o}\rho)$ serait un multiple commun de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{o}\eta$; et partant il serait divisible par le plus petit commun multiple $\eta\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{o}\eta$; mais de la divisibilité de $\eta(\mathfrak{o}\rho)$ par $\eta\mathfrak{p}$ il résulterait (§ 19) que $\mathfrak{o}\rho$ serait divisible par $\mathfrak{p}$, ce qui contredirait la supposition ; donc $\eta\rho$ n'est pas divisible par $\mathfrak{p}$. C. Q. F. D.

De là il s'ensuit immédiatement que tous les nombres *rationnels* divisibles par un idéal premier $\mathfrak{p}$, et auxquels appartient aussi $N(\mathfrak{p})$ (§ 20), forment un module $[p]$, p étant un *nombre premier* rationnel positif complétement déterminé ; car le *plus petit* nombre rationnel positif p, divisible par $\mathfrak{p}$, ne peut en aucune façon être un nombre composé ab, puisque alors l'un des deux nombres moindres a, b serait pareillement divisible par $\mathfrak{p}$; et comme p ne peut non plus être $= 1$, puisqu'on aurait alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ (§ 19), p devra être un nombre premier ; et tout nombre rationnel entier m divisible par $\mathfrak{p}$ devra être divisible par p, ce qui devient immédiatement évident, en mettant m sous la forme $pq + r$, puisque le reste $r = m - pq$ est aussi divisible par $\mathfrak{p}$. Maintenant $\mathfrak{o}p$ étant divisible par $\mathfrak{p}$, et par suite $N(\mathfrak{o}p) = p^n$ divisible par $N(\mathfrak{p})$ (§ 20), $N(\mathfrak{p}) = p^f$ sera une puissance de p, et l'exposant f sera dit le *degré de l'idéal premier* $\mathfrak{p}$.

4° Si l'idéal $\mathfrak{a}$ est divisible par l'idéal premier $\mathfrak{p}$, il existera un nombre η tel que $\eta\mathfrak{p}$ soit le plus petit commun multiple de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$.

Ce théorème important est évident, si l'on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$, puisque tout nombre η non divisible par $\mathfrak{p}$, par exemple, le nombre $\eta = 1$, satisfait à la condition indiquée. Mais si $\mathfrak{a}$ est différent de $\mathfrak{p}$, nous nous bornerons d'abord à démontrer l'existence d'un nombre η tel que le diviseur $\mathfrak{r}$ de l'idéal $\mathfrak{a}$, correspondant à η, soit en même temp

divisible par $\mathfrak{p}$, mais ait une norme *moindre* que celle de $\mathfrak{a}$. Puisque l'on a $N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{r})\,N(\mathfrak{d})$, $\mathfrak{d}$ étant le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$ (§ 20), la dernière condition revient à choisir η de manière que $N(\mathfrak{d})$ soit > 1, et par suite $\mathfrak{d}$ différent de $\mathfrak{o}$. Pour atteindre ce but, et faire en même temps que $\mathfrak{r}$ soit divisible par $\mathfrak{p}$, nous distinguerons deux cas :

Premièrement, si tous les idéaux (à l'exception de $\mathfrak{o}$) qui divisent $\mathfrak{a}$ sont divisibles par $\mathfrak{p}$, on choisira pour η un nombre divisible par $\mathfrak{p}$, mais non divisible par $\mathfrak{a}$, ce qui est toujours possible, puisque $\mathfrak{p}$ n'est pas divisible par $\mathfrak{a}$; alors il est clair que $\mathfrak{d}$ sera divisible par $\mathfrak{p}$, et par suite différent de $\mathfrak{o}$; comme, de plus, η n'est pas divisible par $\mathfrak{a}$, mais que $\eta\mathfrak{r}$ est divisible par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}$ sera pareillement différent de $\mathfrak{o}$, et par suite divisible par $\mathfrak{p}$.

Deuxièmement, s'il existe un idéal $\mathfrak{e}$ divisant $\mathfrak{a}$, et qui soit différent de $\mathfrak{o}$ et non divisible par $\mathfrak{p}$, choisissons pour η un nombre divisible par $\mathfrak{e}$, mais non divisible par $\mathfrak{p}$; alors $\mathfrak{d}$ sera divisible par $\mathfrak{e}$, et partant encore différent de $\mathfrak{o}$; comme, de plus, $\eta\mathfrak{r}$ est divisible par $\mathfrak{a}$ et par suite aussi par $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$ sera aussi divisible par $\mathfrak{p}$, puisque η n'est pas divisible par $\mathfrak{p}$ (d'après 1°).

Après avoir établi ainsi pour les deux cas l'existence au moins d'un nombre η ayant la propriété demandée, on reconnait sans peine que l'on a certainement $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}$, si l'on choisit, en outre, η de manière que $N(\mathfrak{r})$ soit *aussi petit que possible;* car, si l'idéal $\mathfrak{r}$, divisible par $\mathfrak{p}$, n'est pas $= \mathfrak{p}$, on peut procéder avec $\mathfrak{r}$ comme on vient de le faire avec $\mathfrak{a}$, et choisir un nombre η' de manière que le diviseur $\mathfrak{r}'$ de $\mathfrak{r}$, correspondant à ce nombre, ait une norme encore moindre que celle de $\mathfrak{r}$, et soit pareillement divisible par $\mathfrak{p}$; mais comme (§ 19) $\mathfrak{r}'$ est en même temps le diviseur de $\mathfrak{a}$ correspondant au nombre $\eta\eta'$, cela est en contradiction avec la supposition qu'on vient de faire sur η et sur $\mathfrak{r}$. Donc $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}$, c'est-à-dire que $\eta\mathfrak{p}$ est le plus petit multiple commun de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$. C. Q. F. D.

§ 22. — *Multiplication des idéaux.*

Si α parcourt tous les nombres d'un idéal $\mathfrak{a}$, et de même β tous les nombres d'un idéal $\mathfrak{b}$, tous les produits de la forme $\alpha\beta$ et toutes les sommes de ces produits formeront un idéal $\mathfrak{c}$; car tous ces nombres sont contenus dans $\mathfrak{o}$; de plus, ils se reproduisent par addition,



et aussi par soustraction, puisque les nombres $(-\alpha)$ sont également contenus dans $\mathfrak{a}$; et enfin tout produit d'un nombre $\Sigma\alpha\beta$ du système $\mathfrak{c}$ et d'un nombre ω du domaine $\mathfrak{o}$ appartient également au système $\mathfrak{c}$, puisque tout produit $\alpha\omega$ est encore contenu dans $\mathfrak{a}$. Cet idéal $\mathfrak{c}$ sera dit le *produit* des deux *facteurs* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, et nous le désignerons par $\mathfrak{ab}$.

De cette définition il s'ensuit immédiatement que l'on a $\mathfrak{oa} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$, et, si $\mathfrak{c}$ est un troisième idéal quelconque, $(\mathfrak{ab})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{bc})$, et l'on en conclut par le raisonnement connu (¹) que, dans la formation d'un produit d'un nombre quelconque d'idéaux $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$, l'ordre des multiplications successives, par lesquelles on réunit chaque fois *deux* idéaux en un seul produit, n'a aucune influence sur le résultat final, lequel peut être désigné, pour abréger, par $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_m$, et se compose évidemment de tous les nombres de la forme $\Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ des nombres quelconques des facteurs $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$. Si tous les m facteurs sont $= \mathfrak{a}$, leur produit sera dit la $m^{\text{ième}}$ *puissance* de $\mathfrak{a}$, et on le représentera par $\mathfrak{a}^m$; en posant, de plus, $\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}$, on aura en général $\mathfrak{a}^r\mathfrak{a}^s = \mathfrak{a}^{r+s}$, $(\mathfrak{a}^r)^s = \mathfrak{a}^{rs}$. En outre, on aura évidemment $\mathfrak{a}(\mathfrak{o}\eta) = \mathfrak{a}\eta$ et $(\mathfrak{o}\eta)(\mathfrak{o}\eta') = \mathfrak{o}\eta\eta'$. Enfin nous établirons encore les théorèmes suivants :

1° Le produit $\mathfrak{ab}$ est divisible par les facteurs $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$; car (en vertu de la propriété II) tout produit $\alpha\omega$, par suite aussi tout produit $\alpha\beta$, et conséquemment (d'après I) toute somme de semblables produits sont contenus dans $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{ab}$ est divisible par $\mathfrak{a}$.

2° Si $\mathfrak{a}$ est divisible par $\mathfrak{a}'$, et $\mathfrak{b}$ divisible par $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{ab}$ sera divisible par $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$. Car tous les nombres $\Sigma\alpha\beta$ contenus dans $\mathfrak{ab}$ sont contenus dans $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$, puisque α est contenu dans $\mathfrak{a}$ et par suite dans $\mathfrak{a}'$, et que β est contenu dans $\mathfrak{b}$ et par suite dans $\mathfrak{b}'$.

3° Si aucun des idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ n'est divisible par l'idéal premier $\mathfrak{p}$, le produit $\mathfrak{ab}$ ne sera pas non plus divisible par $\mathfrak{p}$; car il existe dans $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ respectivement des nombres α, β qui ne sont pas divisibles par $\mathfrak{p}$, et par suite le nombre $\alpha\beta$ contenu dans $\mathfrak{ab}$ n'est pas non plus divisible par $\mathfrak{p}$ (§ 21, 3°).

(¹) Voir le § 2 des *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet.

§ 23. — *La difficulté de la théorie.*

Il serait aisé d'augmenter considérablement le nombre de ces théorèmes, qui se rapportent à la dépendance entre les deux notions de la *divisibilité* et de la *multiplication* des idéaux, et nous énoncerons encore sans démonstration les propositions suivantes, uniquement pour faire ressortir la ressemblance avec les propositions correspondantes de la théorie des nombres rationnels :

Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sont des idéaux *premiers entre eux,* c'est-à-dire tels que leur plus grand commun diviseur soit $= \mathfrak{o}$, leur plus petit commun multiple sera $= \mathfrak{ab}$, et l'on aura en même temps

$$N(\mathfrak{ab}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b}).$$

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque, alors ou $\mathfrak{a}$ sera divisible par $\mathfrak{p}$, ou $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{p}$ seront des idéaux premiers entre eux.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal premier avec $\mathfrak{b}$ et avec $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$ sera aussi premier avec $\mathfrak{bc}$.

Si $\mathfrak{ab}$ est divisible par $\mathfrak{c}$, et que $\mathfrak{a}$ soit premier avec $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ sera divisible par $\mathfrak{c}$.

Mais toutes ces propositions ne suffisent pas pour rendre complète l'analogie avec la théorie des nombres rationnels. Il ne faut pas oublier que la divisibilité d'un idéal $\mathfrak{c}$ par un idéal $\mathfrak{a}$, suivant notre définition (§ 19), consiste seulement en ce que tous les nombres de l'idéal $\mathfrak{c}$ sont contenus aussi dans $\mathfrak{a}$; or on a vu très-facilement (§ 22, 1°) que tout produit de $\mathfrak{a}$ par un idéal quelconque $\mathfrak{b}$ est divisible par $\mathfrak{a}$, mais il n'est nullement aisé de démontrer la réciproque, savoir, que tout idéal divisible par $\mathfrak{a}$ est aussi un produit de $\mathfrak{a}$ par un idéal $\mathfrak{b}$. Cette difficulté, la plus grande et, à proprement parler, la seule que présente la théorie, ne peut en aucune manière être surmontée à l'aide des seuls moyens de démonstration que nous avons employés jusqu'ici, et il faut que nous examinions ici d'un peu plus près la raison de ce phénomène, parce que celui-ci se rattache à une généralisation très-importante de la théorie. En considérant avec attention la théorie développée jusqu'à présent, on reconnaîtra que toutes les définitions conservent un sens déterminé, et que les démonstrations de tous les théorèmes ont encore toute leur force,

lors même que l'on ne *suppose plus* que le domaine désigné par $\mathfrak{o}$ comprenne *tous* les nombres entiers du corps Ω. Les propriétés du système $\mathfrak{o}$ sur lesquelles on s'est appuyé se réduisent en réalité aux suivantes :

(a) Le système $\mathfrak{o}$ est un module fini $[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$, dont la base forme en même temps une base du corps Ω.

(b) Le nombre 1, et par suite aussi tous les nombres rationnels entiers sont contenus dans $\mathfrak{o}$.

(c) Tout produit de deux nombres du système $\mathfrak{o}$ appartient au même système $\mathfrak{o}$.

Quand un domaine $\mathfrak{o}$ jouira de ces trois propriétés, nous l'appellerons un *ordre*. De l'ensemble de (a) et de (c) il résulte immédiatement qu'un ordre se compose seulement de nombres *entiers* du corps Ω, mais ne contient pas nécessairement *tous* ces nombres entiers (excepté dans le cas $n = 1$). Si maintenant un nombre α de l'ordre $\mathfrak{o}$ est appelé *divisible* par un second nombre semblable μ dans le cas seulement où l'on a $\alpha = \mu\omega$, ω désignant également un nombre contenu dans $\mathfrak{o}$, et si l'on modifie de la même manière la notion de la *congruence* des nombres dans l'étendue du domaine $\mathfrak{o}$, on voit immédiatement que le nombre $(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}\mu)$ des nombres du domaine $\mathfrak{o}$ incongrus par rapport à μ est encore maintenant $= \pm N(\mu)$ (§ 18), et il est tout aussi facile de reconnaître que toutes les définitions et tous les théorèmes de la présente Section conserveront leur signification et leur vérité, si l'on entend toujours par *nombre* un nombre de cet ordre $\mathfrak{o}$. Dans tout ordre $\mathfrak{o}$ du corps Ω il existe donc une théorie particulière des idéaux, et cette théorie est la même pour tous les ordres (qui sont en nombre infini), jusqu'au point où elle a été développée dans ce qui précède. Mais, tandis que la théorie des idéaux, dans l'ordre $\mathfrak{o}$ qui comprend *tous* les nombres entiers du corps Ω, conduit finalement à des lois générales qui ne souffrent aucune exception et qui coïncident complétement avec les lois de la divisibilité des nombres rationnels, la théorie des idéaux de chacun des autres ordres est sujette à certaines exceptions, ou plutôt elle exige une certaine restriction de la notion d'idéal. Mais cette théorie générale des idéaux d'un ordre quelconque, dont le développement est également indispensable pour les besoins de la théorie des nombres, et qui, dans le cas $n = 2$, coïncide avec la

théorie des divers *ordres* des *formes* quadratiques binaires ([1]), nous la laisserons entièrement de côté dans ce qui va suivre ([2]), et je me contenterai ici de donner un exemple pour appeler l'attention sur le caractère des exceptions dont nous venons de parler. Dans le corps quadratique, résultant d'une racine

$$\theta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

de l'équation $\theta^2+\theta+1=0$, le module $[1, \sqrt{-3}]$ forme un ordre $\mathfrak{o}$ qui ne comprend pas tous les nombres entiers de ce corps. Les modules $[2, 1+\sqrt{-3}] = \mathfrak{p}$ et $[2, 2\sqrt{-3}] = \mathfrak{o}(2)$ devraient être considérés comme des idéaux de cet ordre $\mathfrak{o}$, en tant qu'ils jouissent des propriétés I et II (§ 19); mais, quoique $\mathfrak{o}(2)$ soit divisible par $\mathfrak{p}$, il n'existe toutefois dans $\mathfrak{o}$ aucun idéal $\mathfrak{q}$ tel que l'on ait $\mathfrak{pq} = \mathfrak{o}(2)$.

§ 24. — *Propositions auxiliaires.*

Pour achever maintenant complétement la théorie des idéaux de celui des ordres $\mathfrak{o}$ qui comprend *tous* les nombres entiers du corps Ω, nous avons besoin des lemmes suivants, qui ne sont vrais sans restriction que pour un tel domaine $\mathfrak{o}$.

1° Soient ω, μ, ν trois nombres de $\mathfrak{o}$, différents de zéro, et tels que ν ne soit pas divisible par μ; les termes de la progression géométrique

$$\omega,\quad \omega\frac{\nu}{\mu},\quad \omega\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2,\quad \omega\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3,\quad \ldots,$$

jusqu'à un terme

$$\omega\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^r,$$

situé à une distance finie, seront tous contenus dans $\mathfrak{o}$, et aucun des termes suivants ne sera un nombre entier.

En effet, si le nombre des termes qui sont des nombres entiers

([1]) *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 226.

([2]) Je traite cette théorie en détail dans le Mémoire récemment publié : « *Ueber die Anzahl der Ideal-Classen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers.* » (*Festschrift zur Säcularfeier des Geburtstages von C.-F. Gauss.* Braunschweig, 30. April 1877).



était plus grand que la valeur absolue k de $N(\omega)$, il faudrait (§ 18) que, sur $k+1$ de ces termes, il y en eût au moins deux différents qui correspondissent à des exposants s et $r > s$, et qui fussent congrus entre eux suivant le module ω; or d'une telle congruence

$$\omega\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^r \equiv \omega\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^s \pmod{\omega}$$

il résulterait que le nombre

$$\eta = \frac{\nu}{\mu},$$

appartenant au corps Ω, satisferait à une équation du $r^{\text{ième}}$ degré de la forme

$$\eta^r = \eta^s + \omega',$$

ω' étant un nombre entier, et par suite (§ 13, 2°) serait lui-même un nombre entier, ce qui est contraire à notre hypothèse, que ν n'est pas divisible par μ. Donc k termes au plus de la série précédente peuvent être des nombres entiers, et par suite être contenus dans $\mathfrak{o}$. Si, de plus, le terme

$$\rho = \omega\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^r,$$

r étant $\geqq 1$, est un nombre entier, et que s soit un quelconque des r exposants $0, 1, 2, \ldots, r-1$, le terme

$$\sigma = \omega\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$$

sera aussi un nombre entier, puisque

$$\sigma^r = \omega^{r-s}\rho^s$$

est un nombre entier (§ 13, 2°). Ainsi la proposition se trouve complétement démontrée.

2° Soient μ, ν deux nombres de $\mathfrak{o}$, différents de zéro, ν n'étant pas divisible par μ; il existe toujours dans $\mathfrak{o}$ deux nombres $\varkappa$, λ, différents de zéro, et tels que l'on ait

$$\frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{\nu}{\mu},$$

et que $\varkappa^2$ ne soit pas divisible par λ.

Car si

$$\lambda = \mu\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{e-1}, \quad \varkappa = \mu\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{e}$$

sont les deux derniers termes de la série

$$\mu, \ \mu\left(\frac{\nu}{\mu}\right), \quad \mu\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2, \quad \mu\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3, \ldots$$

qui soient des nombres entiers et par suite contenus dans $\mathfrak{o}$, on aura évidemment $e \geqq 1$, et

$$\frac{\varkappa}{\lambda} = \frac{\nu}{\mu}, \quad \frac{\varkappa^2}{\lambda} = \mu\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{e+1};$$

donc $\varkappa^2$ n'est pas divisible par λ. C. Q. F. D.

§ 25. — *Lois de la divisibilité.*

A l'aide de ces lemmes, il est facile d'apporter à la théorie des idéaux du domaine $\mathfrak{o}$ le complément désiré, qui se trouve contenu dans les lois suivantes:

1° Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, il existe un nombre λ divisible par $\mathfrak{p}$, et un nombre $\varkappa$ non divisible par $\mathfrak{p}$, tels que $\varkappa\mathfrak{p}$ soit le plus petit commun multiple de $\mathfrak{o}\lambda$ et $\mathfrak{o}\varkappa$.

Démonstration. — Soit μ un nombre quelconque, mais autre que zéro, de l'idéal premier $\mathfrak{p}$; $\mathfrak{o}\mu$ étant divisible par $\mathfrak{p}$, il existera un nombre ν tel que $\nu\mathfrak{p}$ soit le plus petit commun multiple de $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{o}\nu$ (§ 21, 4°). Ce nombre ν ne peut pas être divisible par μ; car autrement le plus petit commun multiple de $\mathfrak{o}\mu$ et de $\mathfrak{o}\nu$ serait $= \mathfrak{o}\nu$, et non $= \mathfrak{p}\nu$. Si l'on choisit maintenant (§ 24, 2°) les deux nombres $\varkappa$, λ de telle manière que l'on ait $\varkappa\mu = \lambda\nu$, et que $\varkappa^2$ ne soit pas divisible par λ, alors (§ 19) l'idéal $\varkappa\nu\mathfrak{p}$ sera le plus petit commun multiple de $\varkappa(\mathfrak{o}\mu) = \mathfrak{o}\lambda\nu$ et de $\mathfrak{o}\varkappa\nu$, d'où il s'ensuit (§ 19) que $\varkappa\mathfrak{p}$ est le plus petit commun multiple de $\mathfrak{o}\lambda$ et $\mathfrak{o}\varkappa$; donc $\mathfrak{p}$ est le diviseur correspondant au nombre $\varkappa$ de l'idéal principal $\mathfrak{o}\lambda$; mais $\varkappa$ n'est pas divisible par $\mathfrak{p}$, puisque, s'il l'était, $\varkappa^2$ serait divisible par $\varkappa\mathfrak{p}$ et par suite aussi par λ.

2° Tout idéal premier $\mathfrak{p}$ peut, au moyen de la multiplication par un idéal $\mathfrak{b}$, être changé en un idéal principal.

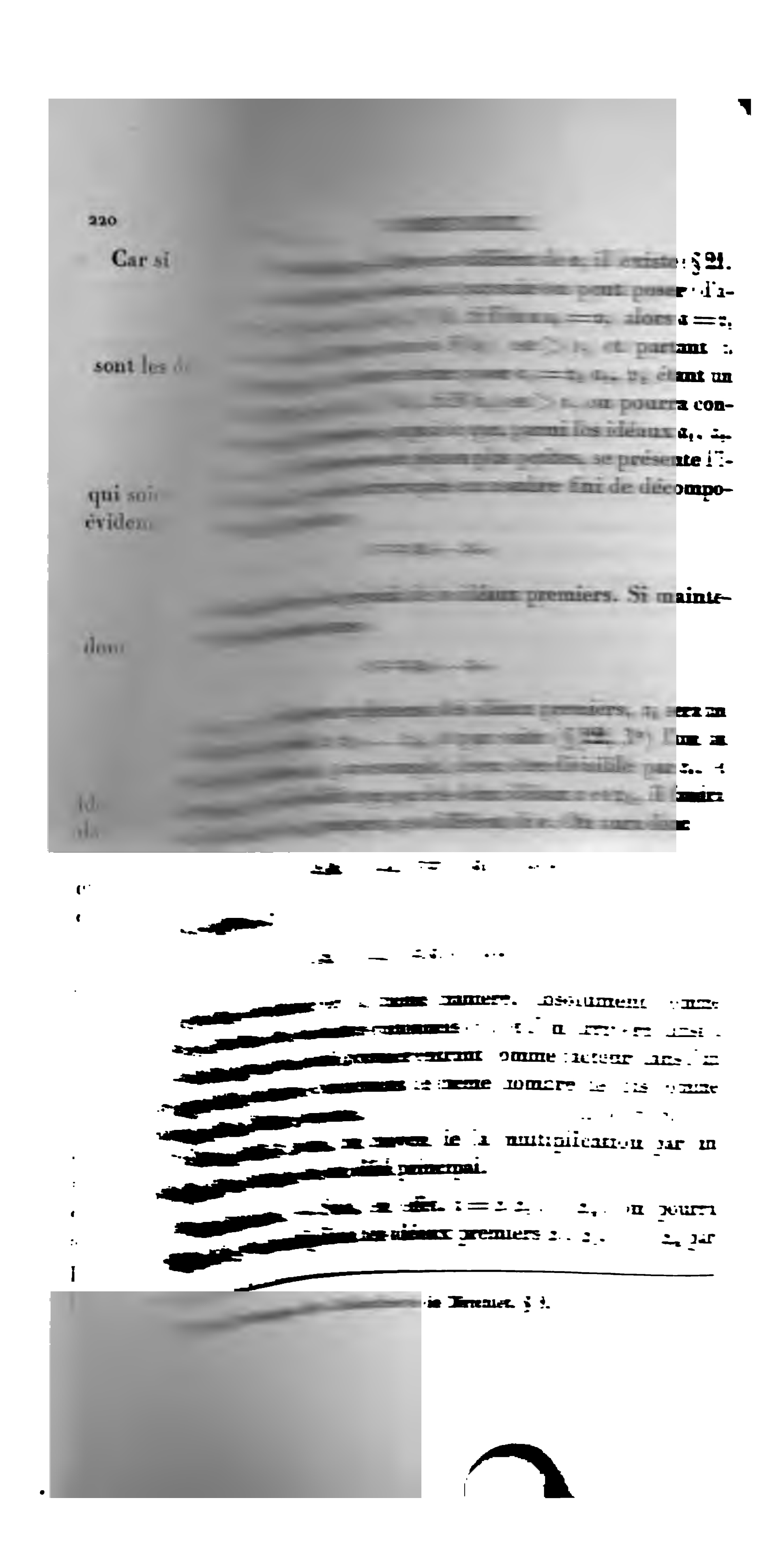
Démonstration. — Conservons à $\varkappa$ et λ la même signification que plus haut, et soit $\mathfrak{b}$ le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{o}\lambda$ et $\mathfrak{o}\varkappa$; nous allons démontrer que l'on a $\mathfrak{p}\mathfrak{b} = \mathfrak{o}\lambda$. En effet, tous les nombres de l'idéal $\mathfrak{b}$ étant de la forme $\delta = \varkappa\omega + \lambda\omega'$, où ω, ω' sont deux nombres de $\mathfrak{o}$, alors, si ϖ est un nombre quelconque de $\mathfrak{p}$, on aura $\varpi\delta = \varkappa\varpi\omega + \lambda\varpi\omega' \equiv 0 \pmod{\lambda}$, puisque $\varkappa\mathfrak{p}$ et par suite aussi $\varkappa\varpi$ sont divisibles par $\mathfrak{o}\lambda$; donc $\mathfrak{p}\mathfrak{b}$ est divisible par $\mathfrak{o}\lambda$. Réciproquement, $\varkappa$ n'étant pas divisible par $\mathfrak{p}$, et partant $\mathfrak{o}$ étant le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{o}\varkappa$ et $\mathfrak{p}$, on peut poser le nombre 1, contenu dans $\mathfrak{o}$, $= \varkappa\omega + \varpi$, ω étant contenu dans $\mathfrak{o}$ et ϖ dans $\mathfrak{p}$; on aura donc $\lambda = \lambda.\varkappa\omega + \varpi.\lambda \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}\mathfrak{b}}$, puisque les premiers facteurs λ, ϖ sont contenus dans $\mathfrak{p}$, et les seconds facteurs $\varkappa\omega$, λ contenus dans $\mathfrak{b}$. Ainsi chacun des deux idéaux $\mathfrak{p}\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{o}\lambda$ est divisible par l'autre, et par suite $\mathfrak{p}\mathfrak{b} = \mathfrak{o}\lambda$. C. Q. F. D.

3° Si l'idéal $\mathfrak{a}$ est divisible par l'idéal premier $\mathfrak{p}$, il existera un idéal $\mathfrak{a}'$, et un seul, tel que l'on aura $\mathfrak{p}\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, et en même temps on aura $N(\mathfrak{a}') < N(\mathfrak{a})$.

Démonstration. — Soit, comme tout à l'heure, $\mathfrak{p}\mathfrak{b} = \mathfrak{o}\lambda$; $\mathfrak{a}$ étant divisible par $\mathfrak{p}$, et par suite $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{p}\mathfrak{b}$ (§ 22, 2°), on aura $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}'$ représentant un idéal (§ 19); en multipliant par $\mathfrak{p}$, on tire de là $\lambda\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{p}\mathfrak{a}'$, et par conséquent aussi $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{a}'$. Soit maintenant $\boldsymbol{\mathfrak{b}}$ un idéal, satisfaisant également à la condition $\mathfrak{p}\boldsymbol{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}$; de l'égalité $\mathfrak{p}\boldsymbol{\mathfrak{b}} = \mathfrak{p}\mathfrak{a}'$ il résulte, en multipliant par $\mathfrak{b}$, que l'on devra avoir $\lambda\boldsymbol{\mathfrak{b}} = \lambda\mathfrak{a}'$, d'où $\boldsymbol{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}'$. Il existe en outre (§ 21, 4°) un nombre η tel que $\eta\mathfrak{p}$ est le plus petit commun multiple de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$; or, $\eta\mathfrak{p}$ étant divisible par $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'\mathfrak{p}$, il s'ensuit, en multipliant par $\mathfrak{b}$, que $\mathfrak{o}\eta\lambda$ est divisible par $\lambda\mathfrak{a}'$, et par suite η par $\mathfrak{a}'$; mais η n'est certainement pas divisible par $\mathfrak{a}$, car autrement ce serait $\mathfrak{o}\eta$, et non $\eta\mathfrak{p}$, qui serait le plus petit commun multiple de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{o}\eta$. Donc, η étant divisible par $\mathfrak{a}'$, mais non divisible par $\mathfrak{a}$, il faut que $\mathfrak{a}'$ soit *différent* de $\mathfrak{a}$, et par suite que l'on ait $N(\mathfrak{a}') < N(\mathfrak{a})$, puisque $\mathfrak{a}'$ est un diviseur de $\mathfrak{a}$.

C. Q. F. D.

4° Tout idéal $\mathfrak{a}$ différent de $\mathfrak{o}$ est lui-même un idéal premier, ou bien il peut se mettre sous la forme d'un produit d'idéaux tous premiers, et cela d'une seule manière.



Car si [illegible] de a, il existe (§ 21.

[illegible] on peut poser [illegible]

[illegible] alors $a = $ [illegible]

[illegible] et partant [illegible]

sont les [illegible] étant un

[illegible] on pourra con-

[illegible] que parmi les idéaux a_1, [illegible]

[illegible] plus petits, se présente l'[illegible]

qui soi[illegible] un nombre fini de décompo-

éviden[illegible]

[illegible] idéaux premiers. Si mainte-

[illegible]

[illegible] des idéaux premiers, [illegible] sera un

[illegible]

[illegible] divisible par [illegible]

[illegible]

[illegible] même manière. [illegible]

[illegible] comme facteur [illegible]

[illegible] même nombre [illegible]

[illegible] de la multiplication par un

[illegible] principal.

[illegible] on pourra

[illegible] les idéaux premiers [illegible] par

[illegible]

les idéaux correspondants $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_m$, les changer en idéaux principaux $\mathfrak{p}_1\mathfrak{d}_1, \mathfrak{p}_2\mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m\mathfrak{d}_m$. Si l'on pose maintenant

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\ldots\mathfrak{d}_m,$$

alors $\mathfrak{am} = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{d}_1)(\mathfrak{p}_2\mathfrak{d}_2)\ldots(\mathfrak{p}_m\mathfrak{d}_m)$ sera un produit uniquement d'idéaux principaux, et par suite sera lui-même un idéal principal.

C. Q. F. D.

6° Si l'idéal $\mathfrak{c}$ est divisible par l'idéal $\mathfrak{a}$, il existera un idéal $\mathfrak{b}$, et un seul, satisfaisant à la condition $\mathfrak{ab} = \mathfrak{c}$. — Si le produit $\mathfrak{ab}$ est divisible par le produit $\mathfrak{ab}'$, $\mathfrak{b}$ sera divisible par $\mathfrak{b}'$; et de $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ab}'$ il s'ensuivra $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$.

Démonstration. — Choisissons l'idéal $\mathfrak{m}$ de telle sorte que $\mathfrak{am}$ soit un idéal principal $\mathfrak{o}\mu$; si maintenant $\mathfrak{c}$ est divisible par $\mathfrak{a}$, et par suite $\mathfrak{cm}$ divisible par $\mathfrak{am}$ (§ 22, 2°), on pourra (§ 19) poser $\mathfrak{cm} = \mu\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ étant un idéal. En multipliant par $\mathfrak{a}$, il vient $\mu\mathfrak{c} = \mu\mathfrak{ab}$, d'où $\mathfrak{c} = \mathfrak{ab}$. — Soient ensuite $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ des idéaux quelconques, et supposons $\mathfrak{ab}$ divisible par $\mathfrak{ab}'$; il en résultera encore, en multipliant par $\mathfrak{m}$ (§ 22, 2°), que $\mu\mathfrak{b}$ est divisible par $\mu\mathfrak{b}'$, et partant (§ 19) $\mathfrak{b}$ divisible par $\mathfrak{b}'$. Si, de plus, on a $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ab}'$, chacun des deux idéaux $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ devra être divisible par l'autre, c'est-à-dire qu'on aura $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$. C. Q. F. D.

7° La norme d'un produit d'idéaux est égale au produit des normes des facteurs; $N(\mathfrak{ab}) = N(\mathfrak{a})\,N(\mathfrak{b})$.

Démonstration. — Considérons d'abord le cas d'un produit $\mathfrak{a} = \mathfrak{pa}'$, dont un facteur $\mathfrak{p}$ est un idéal premier. Comme $\mathfrak{a}$ est divisible par $\mathfrak{p}$, il existera (d'après 3°) un nombre η divisible par $\mathfrak{a}'$, mais non par $\mathfrak{a}$, et $\eta\mathfrak{p}$ sera le plus petit commun multiple de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$; donc on aura (§ 20) $N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p})\,N(\mathfrak{d})$, $\mathfrak{d}$ étant le plus grand commun diviseur des mêmes idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{o}\eta$. Comme $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{o}\eta$ sont divisibles par $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{d}$ devra être aussi divisible par $\mathfrak{a}'$ (§ 1, 4°) et par suite il existe (d'après 6°) un idéal $\mathfrak{n}$ satisfaisant à la condition $\mathfrak{na}' = \mathfrak{d}$. De plus, $\mathfrak{a}$ étant divisible par $\mathfrak{d}$, et conséquemment $\mathfrak{pa}'$ par $\mathfrak{na}'$, l'idéal premier $\mathfrak{p}$ devra (d'après 6°) être divisible par $\mathfrak{n}$, et l'on devra, par suite, avoir $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$ ou $= \mathfrak{o}$. La première égalité est impossible, sans quoi l'on aurait $\mathfrak{d} = \mathfrak{pa}' = \mathfrak{a}$, et par suite η serait divisible par $\mathfrak{a}$, ce qui n'a pas lieu; on aura donc $\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$, d'où $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}'$, et aussi $N(\mathfrak{pa}') = N(\mathfrak{p})\,N(\mathfrak{a}')$, ce qui démontre le théorème pour le

cas considéré. Mais on en conclut immédiatement le théorème général. Car tout idéal (autre que $\mathfrak{o}$) étant (d'après 4°) de la forme

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_m,$$

où $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$ sont des idéaux premiers, il en résulte

$$N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p}_1)\, N(\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \ldots \mathfrak{p}_m) = N(\mathfrak{p}_1)\, N(\mathfrak{p}_2)\, N(\mathfrak{p}_3 \ldots \mathfrak{p}_m) = \ldots,$$

et par suite aussi

$$N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{p}_1)\, N(\mathfrak{p}_2) \ldots N(\mathfrak{p}_m);$$

si l'on a de plus

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_r,$$

$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r$ désignant encore des idéaux premiers, il viendra

$$\mathfrak{ab} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_m \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_r,$$

et par conséquent

$$N(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{q}_1)\, N(\mathfrak{q}_2) \ldots N(\mathfrak{q}_r),$$
$$N(\mathfrak{ab}) = N(\mathfrak{p}_1) \ldots N(\mathfrak{p}_m)\, N(\mathfrak{q}_1) \ldots N(\mathfrak{q}_r);$$

on a donc bien

$$N(\mathfrak{ab}) = N(\mathfrak{a})\, N(\mathfrak{b}). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

8° Un idéal $\mathfrak{a}$ (ou un nombre α) est toujours, et seulement alors, divisible par un idéal $\mathfrak{d}$ (ou un nombre δ), quand toutes les puissances d'idéaux premiers qui divisent $\mathfrak{d}$ (ou δ) divisent aussi $\mathfrak{a}$ (ou α).

Démonstration. — Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, et $\mathfrak{p}^m$ un diviseur d'un idéal $\mathfrak{d}$, on a (d'après 6°) $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{p}^m$, $\mathfrak{d}_1$ désignant un idéal; si l'on suppose ce dernier décomposé en ses facteurs tous premiers, $\mathfrak{d}$ se trouvera aussi sous la forme d'un produit d'idéaux tous premiers, et parmi ceux-ci le facteur $\mathfrak{p}$ entre au moins m fois; réciproquement, si, dans la décomposition de $\mathfrak{d}$ en facteurs premiers, l'idéal premier $\mathfrak{p}$ entre au moins m fois comme facteur, $\mathfrak{d}$ sera évidemment divisible par $\mathfrak{p}^m$. Si donc on suppose que toute puissance d'idéal premier qui divise $\mathfrak{d}$ divise aussi un idéal $\mathfrak{a}$, cela revient à dire que tous les facteurs premiers qui entrent dans la décomposition de $\mathfrak{d}$

entrent tous aussi, au moins autant de fois, comme facteurs dans la décomposition de $\mathfrak{a}$; parmi les facteurs de $\mathfrak{a}$ se trouvent donc d'abord tous les facteurs de $\mathfrak{d}$, et, si l'on désigne le produit des autres facteurs de $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{d}'$, on aura $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}\mathfrak{d}'$, et par suite $\mathfrak{a}$ est divisible par $\mathfrak{d}$. La proposition réciproque, que, si $\mathfrak{d}$ est un diviseur de $\mathfrak{a}$, toute puissance d'idéal premier qui divise $\mathfrak{d}$ divise aussi $\mathfrak{a}$, se vérifie d'elle-même. C. Q. F D.

Si l'on réunit sous forme de puissance tous les facteurs premiers d'un idéal $\mathfrak{a}$ qui sont égaux entre eux, on trouve

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^a\mathfrak{q}^b\mathfrak{r}^c\ldots,$$

$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \ldots$ étant tous des idéaux premiers différents entre eux, et en vertu des théorèmes que nous venons de démontrer, tous les diviseurs $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{a}$ sont compris dans la formule

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p}^{a'}\mathfrak{q}^{b'}\mathfrak{r}^{c'}\ \ldots,$$

où les exposants $a', b', c', \ldots$ satisfont aux conditions

$$0 \leqq a' \leqq a, \quad 0 \leqq b' \leqq b, \quad 0 \leqq c' \leqq c, \quad \ldots;$$

comme à deux combinaisons différentes quelconques des exposants $a', b', c', \ldots$ correspondent (d'après 4°) deux idéaux $\mathfrak{d}$ différents, le nombre total des diviseurs différents sera $= (a+1)(b+1)(c+1)\ldots.$

9° Si $\mathfrak{d}$ est le plus grand commun diviseur des deux idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, on aura

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{d}\mathfrak{a}', \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{d}\mathfrak{b}',$$

$\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ désignant deux idéaux premiers entre eux, et le plus petit commun multiple $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sera $= \mathfrak{d}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\mathfrak{a}'$. De plus, si $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ est divisible par $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sera divisible par $\mathfrak{b}'$.

Nous laisserons au lecteur le soin de chercher la démonstration de cette proposition et les règles qui servent à déduire les idéaux $\mathfrak{m}, \mathfrak{d}$ des décompositions de $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ en facteurs premiers.

§ 26. — *Congruences.*

Après avoir établi les lois de la divisibilité des idéaux et, par suite, aussi des *nombres* contenus dans $\mathfrak{o}$, nous allons ajouter encore quelques considérations sur les congruences, importantes

pour la théorie des idéaux; nous nous contenterons toutefois, pour le moment, de donner de simples indications sur les démonstrations.

1° $\mathfrak{d}$ étant le plus grand commun diviseur de deux idéaux quelconques $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, *premiers entre eux,* et $\mathfrak{ab}$ étant leur plus petit commun multiple, alors (§ 2, 5°) le système des deux congruences

$$\omega \equiv \rho \pmod{\mathfrak{a}}, \quad \omega \equiv \sigma \pmod{\mathfrak{b}},$$

ρ, σ étant deux nombres donnés contenus dans $\mathfrak{o}$, aura toujours des racines ω, et toutes ces racines seront comprises dans la forme

$$\omega \equiv \tau \pmod{\mathfrak{ab}},$$

τ étant le représentant d'une classe de nombres par rapport à $\mathfrak{ab}$, laquelle est complétement déterminée par les deux nombres ρ et σ, ou par les classes qui leur correspondent par rapport à $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. Réciproquement, toute classe $\tau \pmod{\mathfrak{ab}}$ se déterminera de cette manière au moyen d'une combinaison, et d'une seule, $\rho \pmod{\mathfrak{a}}$, $\sigma \pmod{\mathfrak{b}}$.

Nous dirons maintenant que le nombre ρ est *premier avec* l'idéal $\mathfrak{a}$, lorsque $\mathfrak{o}\rho$ et $\mathfrak{a}$ seront des idéaux premiers entre eux, et nous désignerons par $\psi(\mathfrak{a})$ le nombre de tous les nombres incongrus suivant $\mathfrak{a}$ qui sont des nombres premiers avec $\mathfrak{a}$. On tire aisément de là, pour deux idéaux premiers entre eux, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, le théorème

$$\psi(\mathfrak{ab}) = \psi(\mathfrak{a})\psi(\mathfrak{b});$$

car τ est toujours, et seulement alors, un nombre premier avec $\mathfrak{ab}$, lorsque ρ est un nombre premier avec $\mathfrak{a}$, et σ un nombre premier avec $\mathfrak{b}$. On n'a donc besoin de déterminer la fonction $\psi(\mathfrak{a})$ que pour le cas où $\mathfrak{a}$ est une puissance $\mathfrak{p}^m$ de l'idéal premier $\mathfrak{p}$. Le nombre de tous les nombres incongrus suivant $\mathfrak{p}^m$ est, dans le cas de $m > 0$, égal à

$$N(\mathfrak{p}^m) = [N(\mathfrak{p})]^m = (\mathfrak{o}, \mathfrak{p}^m) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{p})(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^m) = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^m)N(\mathfrak{p});$$

il faut en soustraire le nombre de tous les nombres qui ne sont pas premiers avec $\mathfrak{p}^m$ et, par suite, qui sont divisibles par $\mathfrak{p}$; ce

nombre étant égal à

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^m) = [N(\mathfrak{p})]^{m-1},$$

il vient

$$\psi(\mathfrak{p}^m) = [N(\mathfrak{p})]^m - [N(\mathfrak{p})]^{m-1} = N(\mathfrak{p}^m)\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right),$$

d'où l'on tire immédiatement, en vertu du théorème précédent,

$$\psi(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{a}) \prod \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right),$$

le signe de multiplication Π se rapportant à tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$, différents entre eux, qui divisent l'idéal $\mathfrak{a}$. Comme on a, de plus,

$$\psi(\mathfrak{o}) = 1,$$

on en conclut encore, absolument comme dans la théorie des nombres rationnels (¹), le théorème

$$\Sigma\psi(\mathfrak{a}') = N(\mathfrak{a}),$$

le signe sommatoire étant relatif à tous les idéaux $\mathfrak{a}'$ diviseurs de $\mathfrak{a}$.

2° Si $\mathfrak{d}$ est le plus grand commun diviseur des idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{o}\eta$, on aura $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}\mathfrak{a}'$, et $\eta\mathfrak{a}'$ sera (§ 25, 9°) le plus petit commun multiple de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}'$ sera le diviseur de $\mathfrak{a}$ correspondant au nombre η (§ 19); réciproquement, si $\eta\mathfrak{a}'$ est le plus petit commun multiple de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$, on aura $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{d}$ étant le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$. Il est clair aussi que les facteurs complémentaires $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{a}'$ de l'idéal $\mathfrak{a}$ restent les mêmes pour tous les nombres η congrus entre eux suivant $\mathfrak{a}$; il en sera encore de même, évidemment, si l'on remplace η par un nombre $\eta' \equiv \eta\omega \pmod{\mathfrak{a}}$, ω désignant un nombre premier avec $\mathfrak{a}'$; et réciproquement, si le plus grand commun diviseur $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}\eta$ est en même temps celui de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{o}\eta'$; il en résulte

$$\eta' \equiv \eta\omega, \quad \eta \equiv \eta'\omega' \pmod{\mathfrak{a}},$$

d'où l'on tire

$$\eta\omega\omega' \equiv \eta \pmod{\mathfrak{a}}, \quad \omega\omega' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}'},$$

(¹) *Voir* Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 14.

et par conséquent ω est un nombre premier avec $\mathfrak{a}'$. Donc le nombre de tous les nombres η incongrus suivant $\mathfrak{a}$, auxquels correspond le même diviseur $\mathfrak{a}'$ de $\mathfrak{a}$, est $= \psi(\mathfrak{a}')$. Mais il faut bien faire attention à ce qu'ici l'on a supposé l'existence au moins d'un tel nombre η; donc, étant donné un diviseur quelconque $\mathfrak{a}'$ de l'idéal $\mathfrak{a}$, tout ce que nous pouvons affirmer jusqu'ici, c'est que le nombre $\chi(\mathfrak{a}')$ de tous les nombres η incongrus suivant $\mathfrak{a}$, auxquels correspond le même diviseur $\mathfrak{a}'$, sera égal à $\psi(\mathfrak{a}')$ ou à zéro. Pour décider cette alternative, considérons *tous* les nombres incongrus suivant $\mathfrak{a}$, qui sont au nombre de $N(\mathfrak{a})$, et ordonnons-les, suivant les diviseurs $\mathfrak{a}'$ qui leur correspondent, en groupes respectifs de $\chi(\mathfrak{a}')$ nombres; on devra avoir

$$\Sigma\chi(\mathfrak{a}') = N(\mathfrak{a}),$$

la sommation s'étendant à tous les diviseurs $\mathfrak{a}'$ de $\mathfrak{a}$; or, comme on a aussi (1°)

$$\Sigma\psi(\mathfrak{a}') = N(\mathfrak{a}),$$

il s'ensuit immédiatement que $\chi(\mathfrak{a}')$ n'est jamais $= 0$, mais toujours $= \psi(\mathfrak{a}')$. Ainsi se trouve démontré ce théorème très-important :

« Si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}'$ sont deux idéaux quelconques, on pourra toujours, en multipliant $\mathfrak{b}$ par un idéal $\mathfrak{b}'$, premier avec $\mathfrak{a}'$, le changer en un idéal principal $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = \mathfrak{o}\eta$. »

Car, en posant $\mathfrak{b}\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, il existera toujours, puisque $\psi(\mathfrak{a}')$ est différent de zéro, un nombre η, auquel correspondra le diviseur $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}$, de telle sorte que $\mathfrak{b}$ sera le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{o}\eta$; si l'on pose donc $\mathfrak{o}\eta = \mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}'$ sera un idéal premier avec $\mathfrak{a}'$.

C. Q. F. D.

3° Comme tout produit $\rho\rho'$ de nombres ρ, ρ' premiers avec un idéal $\mathfrak{a}$ est également un nombre premier avec $\mathfrak{a}$, et que, ρ restant constant et ρ' variant, $\rho\rho'$ parcourt un système de $\psi(\mathfrak{a})$ nombres incongrus (mod. $\mathfrak{a}$), on en déduit par la méthode connue [1], pour chaque valeur du nombre ρ, la congruence

$$\rho^{\psi(\mathfrak{a})} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}},$$

---

[1] *Voir* Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 19.

qui renferme la plus haute généralisation d'un célèbre théorème de Fermat. Pour un idéal premier $\mathfrak{p}$, on en conclut aisément que *tout* nombre ω du domaine $\mathfrak{o}$ satisfait à la congruence

$$\omega^{N(\mathfrak{p})} \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}},$$

c'est-à-dire à la congruence

$$\omega^{p^f} \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}},$$

p étant le nombre premier rationnel positif divisible par $\mathfrak{p}$, et f le degré de l'idéal premier $\mathfrak{p}$ (§ 21, 3°). Ce théorème est de la même importance pour la théorie du domaine $\mathfrak{o}$ que le théorème de Fermat pour la théorie des nombres rationnels, et c'est ce que nous allons du moins essayer de faire voir par les remarques suivantes, l'espace ne nous permettant pas de poursuivre plus avant la théorie générale.

Si les coefficients de la fonction rationnelle entière $F(x)$, du degré m, sont compris dans $\mathfrak{o}$, et que le coefficient du terme le plus élevé ne soit pas divisible par l'idéal premier $\mathfrak{p}$, on en déduit, par le raisonnement connu ([1]), que la congruence $F(\omega) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ne peut avoir plus de m racines incongrues entre elles, et cette proposition, combinée avec le théorème précédent, conduit à une théorie complète des congruences binômes suivant le module $\mathfrak{p}$; on en déduit, entre autres, l'existence des *racines primitives* de l'idéal premier $\mathfrak{p}$, en entendant par là des nombres γ tels que leurs puissances

$$1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{N(\mathfrak{p})-2}$$

soient toutes incongrues entre elles. Généralement, la théorie des congruences de degré supérieur à coefficients rationnels peut s'appliquer complétement aux fonctions $F(x)$ dont les coefficients sont des nombres du domaine $\mathfrak{o}$.

Mais on peut déjà constater aussi une dépendance intime entre la théorie des idéaux et la théorie des congruences de degré supérieur, restreinte au cas des coefficients *rationnels*, dont on doit

---

([1]) *Voir* DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 26.

l'établissement aux travaux de Gauss, de Galois, de Schönemann, de Serret (¹). Tous les idéaux étant composés d'idéaux premiers, et chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ divisant un nombre rationnel premier déterminé p, on obtiendra un aperçu complet sur tous les idéaux du domaine $\mathfrak{o}$, en décomposant tous les idéaux de la forme $\mathfrak{o}p$ dans leurs facteurs premiers. La théorie des congruences fournit pour cela un procédé suffisant dans un grand nombre de cas. Soit, en effet, θ un nombre entier du corps Ω, et

$$\Delta(1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}) = k^2\Delta(\Omega);$$

si p n'est pas diviseur de k, on reconnaîtra de la manière suivante la décomposition de $\mathfrak{o}p$ en idéaux premiers. Si $f(t)$ est la fonction entière du $n^{\text{ième}}$ degré de la variable t qui s'annule pour $t = \theta$, on pourra poser

$$f(t) \equiv P_1(t)^{a_1} P_2(t)^{a_2} \ldots P_e(t)^{a_e} \pmod{p},$$

$P_1(t), P_2(t), \ldots, P_e(t)$ étant des fonctions premières, différentes entre elles, des degrés respectifs $f_1, f_2, \ldots, f_e$, et alors on a certainement

$$\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\mathfrak{p}_e^{a_e},$$

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_e$ étant des idéaux premiers, différents entre eux, des degrés respectifs $f_1, f_2, \ldots, f_e$. On tire de là facilement ce théorème extrêmement important :

« Le nombre premier rationnel p divise toujours, et seulement alors, le nombre fondamental $\Delta(\Omega)$ du corps Ω, lorsque p est divisible par le carré d'un idéal premier. »

Ce théorème est encore vrai, quoique bien plus difficile à démontrer, lorsque les nombres k, qui correspondent à tous les nombres θ possibles, sont tous divisibles par p; de tels cas se rencontrent en réalité (²), et c'est là une des raisons qui m'ont déterminé à fonder la théorie des idéaux non sur celle des congruences de degré supérieur, mais sur des principes entièrement nouveaux qui sont en

(¹) *Voir* mon Mémoire : *Abriss einer Theorie der höheren Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus.* (*Journal de Crelle*, t. 54.)

(²) Voir les *Göttingische gelehrte Anzeigen* du 20 septembre 1871, p. 1490.

même temps beaucoup plus simples, et qui répondent mieux à la véritable nature du sujet.

§ 27. — *Exemples empruntés à la division du cercle.*

Par la théorie générale des idéaux, dont j'ai développé les bases dans ce qui précède, les phénomènes de la divisibilité des nombres pour tout domaine $\mathfrak{o}$, composé de tous les nombres entiers d'un corps fini Ω, ont été ramenés aux mêmes lois fixes qui règnent dans l'ancienne théorie des nombres rationnels. Si l'on pense à la variété infinie de ces corps Ω, dont chacun possède sa théorie des nombres spéciale, l'esprit du géomètre aura lieu, sans nul doute, d'être satisfait en constatant l'unité ou l'identité des lois générales auxquelles ces théories diverses obéissent sans exception. Mais ce n'est pas seulement un intérêt esthétique ou purement théorique, mais aussi un intérêt on ne peut plus pratique qui se rattache à cette constatation ; car la certitude que ces lois générales existent réellement facilite au plus haut degré la démonstration et la découverte des phénomènes spéciaux qui se présentent dans un corps déterminé Ω. L'établissement de cette vérité dans toute son étendue exigerait, il est vrai, que l'on poussât beaucoup plus loin le développement de la théorie générale des idéaux que nous ne pouvions le faire ici, et qu'on la combinât en particulier avec les principes algébriques de Galois ; mais j'essayerai du moins de montrer, sur l'exemple simple à l'occasion duquel Kummer a introduit pour la première fois ses nombres idéaux, que déjà les premiers éléments de la théorie générale, exposés dans ce qui précède, conduisent au but avec la plus grande facilité.

Soit m un *nombre premier* rationnel positif, et Ω le corps du $n^{\text{ième}}$ degré, qui résulte, de la manière indiquée plus haut (§ 15), d'une racine primitive θ de l'équation $\theta^m = 1$, c'est-à-dire d'une racine de l'équation

$$f(\theta) = \theta^{m-1} + \theta^{m-2} + \ldots + \theta^2 + \theta + 1 = 0;$$

les coefficients étant rationnels, on aura toujours $n \leqq m - 1$. Comme, de plus, $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^{m-1}$ sont toutes les racines de cette équation, on aura, en désignant par t une variable,

$$f(t) = \frac{t^m - 1}{t - 1} = (t - \theta)(t - \theta^2)\ldots(t - \theta^{m-1}),$$

et, par suite,

$$m = (1-\theta)(1-\theta^2)\ldots(1-\theta^{m-1}).$$

Les m facteurs du second membre sont des nombres entiers et associés entre eux; car, si r désigne un des nombres $1, 2, \ldots, m-1$, alors

$$\frac{1-\theta^r}{1-\theta} = 1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{r-1}$$

sera un nombre entier, et si s est positif et choisi de façon que l'on ait $rs \equiv 1$ (mod. m),

$$\frac{1-\theta}{1-\theta^r} = \frac{1-\theta^{rs}}{1-\theta^r} = 1 + \theta^r + \theta^{2r} + \ldots + \theta^{(s-1)r}$$

sera aussi un nombre entier. En faisant donc, pour abréger,

$$1 - \theta = \mu,$$

il vient

$$m = \varepsilon\mu^{m-1},$$

ε désignant une unité du corps Ω, et par suite, en formant la norme,

$$m^n = [\mathrm{N}(\mu)]^{m-1}.$$

Or, m étant un nombre premier, $\mathrm{N}(\mu)$ devra être une puissance de m; si l'on pose $\mathrm{N}(\mu) = m^e$, il en résulte $n = e(m-1)$, et comme, ainsi qu'on l'a remarqué plus haut, n est toujours $\leqq m-1$, on en conclut $e = 1$, et $n = m - 1 = \varphi(m)$. L'équation précédente $f(\theta) = 0$ est donc *irréductible;* les nombres $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^{m-1}$ sont conjugués, et à ces nombres correspondent $m-1$ permutations, par lesquelles le corps normal Ω se change en lui-même; on a en même temps

$$\mathrm{N}(\mu) = m, \quad \mathfrak{o}m = \mathfrak{o}\mu^{m-1}.$$

L'idéal principal $\mathfrak{o}\mu$ est un *idéal premier;* si l'on avait, en effet, $\mathfrak{o}\mu = \mathfrak{ab}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux différents de $\mathfrak{o}$, il s'ensuivrait que $m = \mathrm{N}(\mathfrak{a})\mathrm{N}(\mathfrak{b})$, et puisque m est un nombre premier, il faudrait que l'on eût, par exemple, $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = m, \mathrm{N}(\mathfrak{b}) = 1$, d'où $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. En même temps (§ 21, 3°), m est le plus petit nombre rationnel divisible par μ; les nombres $0, 1, 2, \ldots, m-1$ forment un système complet de nombres incongrus suivant

le module μ. De là résulte encore qu'un nombre de la forme

$$\omega = k_0 + k_1\mu + k_2\mu^2 + \ldots + k_{m-2}\mu^{m-2},$$

$k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{m-2}$ désignant des nombres entiers, n'est divisible par m, et conséquemment par μ^{m-1}, que si tous les nombres k_0, $k_1, \ldots, k_{m-2}$ sont divisibles par m; car, puisque ω doit être aussi divisible par μ, il faut que k_0 soit divisible par μ, et partant aussi par m; il faut ensuite que $\omega - k_0$ soit divisible par m, et partant aussi par μ^2, d'où l'on conclut de même que k_1 doit être divisible par μ, et partant aussi par m; et, en continuant ainsi, on en déduit que les autres nombres $k_2, k_3, \ldots, k_{m-2}$ sont divisibles par m.

A l'aide de ce résultat, il est aisé de démontrer que les $m - 1$ nombres $1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{m-2}$ forment une base du domaine $\mathfrak{o}$ de tous les nombres entiers du corps Ω. Puisqu'on a

$$t^m - 1 = (t - 1)f(t), \quad m\theta^{m-1} = (\theta - 1)f'(\theta),$$

il en résulte, en excluant le cas peu intéressant de $m = 2$,

$$N[f'(\theta)] = m^{m-2},$$

à cause de $N(\theta) = 1$ et de $N(\theta - 1) = m$, et il s'ensuit de là (§ 17) que

$$\Delta(1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{m-2}) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} m^{m-2}.$$

Comme, de plus, $\mu = 1 - \theta$, $\theta = 1 - \mu$, il est clair que les deux modules $[1, \theta, \ldots, \theta^{m-2}]$ et $[1, \mu, \ldots, \mu^{m-2}]$ sont identiques, d'où il résulte [§ 4, 3°, et § 17, (5)] que l'on a aussi

$$\Delta(1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{m-2}) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} m^{m-2}.$$

Puisque les nombres $1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{m-2}$ sont indépendants entre eux, tout nombre du corps Ω peut maintenant se mettre sous la forme

$$\frac{k_0 + k_1\mu + k_2\mu^2 + \ldots + k_{m-2}\mu^{m-2}}{k} = \frac{\omega}{k},$$

$k, k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{m-2}$ désignant des nombres rationnels entiers *sans diviseur commun;* pour que ce nombre soit entier, c'est-à-dire pour que ω soit divisible par k, il faudra (§ 18) que k^2 divise le

discriminant de la base $1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{m-2}$, et, par suite, k ne pourra contenir d'autres facteurs premiers que le nombre m; comme, de plus, il a été démontré plus haut que ω ne peut être divisible par m que si les nombres $k_0, k_1, \ldots, k_{m-2}$ sont tous divisibles par m, k ne pourra non plus être divisible par m; il faudra donc que l'on ait $k = \pm 1$; donc tous les nombres entiers du corps sont de la forme

$$\omega = k_0 + k_1\mu + k_2\mu^2 + \ldots + k_{m-2}\mu^{m-2},$$

et, par suite, on aura

$$\mathfrak{o} = [1, \mu, \ldots, \mu^{m-2}] = [1, \theta, \ldots, \theta^{m-2}],$$

ou encore, à cause de $1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{m-2} + \theta^{m-1} = 0$,

$$\mathfrak{o} = [\theta, \theta^2, \ldots, \theta^{m-1}], \quad \Delta(\Omega) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} m^{m-2}.$$

Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un idéal premier quelconque, différent de $\mathfrak{o}\mu$; le nombre premier rationnel positif p, divisible par $\mathfrak{p}$, sera différent de m, et l'on aura

$$N(\mathfrak{p}) = p^f,$$

f désignant le degré de l'idéal premier $\mathfrak{p}$. Deux puissances θ^r, θ^s ne sont congrues relativement à un tel idéal premier $\mathfrak{p}$ que si elles sont égales entre elles, c'est-à-dire si l'on a $r \equiv s \pmod{m}$; car, dans le cas contraire, on a $\theta^r - \theta^s = \theta^r(1 - \theta^{r-s}) = \varepsilon\mu$, ε désignant une unité, et, par suite, θ^r ne pourra être $\equiv \theta^s \pmod{\mathfrak{p}}$. Comme on a maintenant (§ 26, 3°)

$$\theta^{N(\mathfrak{p})} \equiv \theta \pmod{\mathfrak{p}};$$

il en résulte

$$p^f \equiv 1 \pmod{m}.$$

Soit a le diviseur de $\varphi(m) = m - 1$ auquel *appartient* le nombre p par rapport au module m, c'est-à-dire, soit a le plus petit exposant positif pour lequel on a

$$p^a \equiv 1 \pmod{m};$$

f devra être, comme on sait, divisible par a, et partant on aura $f \geqq a$. Or tous les nombres entiers du corps Ω étant de la forme

$$\omega = F(\theta) = x_1\theta + x_2\theta^2 + \ldots + x_{m-1}\theta^{m-1},$$



où $x_1, x_2, \ldots, x_m$ représentent des nombres rationnels entiers, il résulte de théorèmes connus, vrais pour tout nombre premier p, que l'on a

$$\omega^p \equiv \mathrm{F}(\theta^p), \quad \omega^{p^r} \equiv \mathrm{F}(\theta^{p^r}) \pmod{p},$$

et, par suite,

$$\omega^{p^a} \equiv \omega \pmod{p}.$$

On conclut de là d'abord que l'idéal $\mathfrak{o}p$ est un produit d'idéaux premiers tous *différents entre eux;* car, si l'on avait $\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}$, il existerait un nombre ω divisible par $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, mais non divisible par p, et ω^2, et par suite aussi ω^{p^a} seraient donc divisibles par $\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2 = p\mathfrak{q}$, et donc aussi par p, ce qui est en contradiction avec la congruence précédente. Comme, de plus, p est divisible par $\mathfrak{p}$, *tout* nombre entier ω du corps Ω satisfait donc à la congruence

$$\omega^{p^a} \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}};$$

le nombre de ses racines incongrues ω est donc $= \mathrm{N}(\mathfrak{p}) = p^f$, et comme son degré $= p^a$, il faut que p^f soit $\leqq p^a$, et partant $f \geqq a$; mais il a été déjà démontré plus haut que f est $\geqq a$; par conséquent $f = a$. On parvient ainsi au résultat suivant, qui forme le théorème principal de la théorie de Kummer (¹) :

« Si le nombre premier p, différent de m, appartient, par rapport au module m, à l'exposant f, qui est toujours un diviseur de $\varphi(m) = ef$, on a

$$\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_e,$$

$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_e$ étant des idéaux premiers, différents entre eux, du degré f. »

Tout le reste s'en déduit facilement. On peut traiter d'une manière toute semblable le cas général, où m est un nombre composé quelconque. Le degré du corps normal Ω est toujours égal au nombre $\varphi(m)$ de ceux des nombres $1, 2, 3, \ldots, m$ qui sont premiers avec m; la loi précédente n'éprouve aucun changement, et la détermination des idéaux premiers qui divisent m ne présente non plus aucune difficulté.

(¹) Les recherches de Kummer se trouvent dans le *Journal de Crelle*, t. 35, dans le *Journal de Liouville*, t. XVI; dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1856.

D'après des recherches très-générales, que je publierai prochainement, on peut, étant connus les idéaux d'un corps normal Ω, indiquer immédiatement aussi les idéaux d'un *diviseur* quelconque de Ω, c'est-à-dire d'un corps quelconque H, dont les nombres soient tous contenus dans Ω. D'après cela, on connaîtra, par exemple, les idéaux de *tous* les corps H qui résultent de la division du cercle, et, pour donner une idée plus précise de la portée de ces recherches, je me permettrai de signaler le cas suivant.

Soit encore m un nombre premier, d'où $\varphi(m) = m - 1$, et soit e un diviseur quelconque de $m - 1 = ef$; dans la théorie des nombres rationnels, la congruence

$$k^f \equiv 1 \pmod{m}$$

aura précisément f racines h incongrues entre elles, qui se reproduiront par la multiplication, et qui, dans ce sens, formeront un *groupe*. Si θ est encore une racine primitive de l'équation $\theta^m = 1$, et Ω le corps correspondant du degré $m - 1$, tous les nombres $F(\theta)$ contenus dans ce corps et satisfaisant aux conditions $F(\theta) = F(\theta^h)$ formeront un corps H du degré e, et les e *périodes* (¹) conjuguées $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_e$, formées chacune de f termes, et dont l'une est

$$\eta = \Sigma\theta^h,$$

formeront une base du domaine $\mathfrak{e}$ composé de tous les nombres entiers contenus dans H. A l'aide des recherches générales dont je viens de parler (ou encore, immédiatement, par des conclusions semblables à celles qu'on a tirées plus haut pour le cas de $e = m - 1$), on obtient maintenant la détermination suivante des idéaux premiers appartenant à ce diviseur H du corps normal Ω. Si l'on pose

$$\rho = \Pi(1 - \theta^h),$$

ρ est un nombre entier du corps H, m est associé avec ρ^e, et $\mathfrak{e}\rho$ est un idéal premier; si, de plus, p est un nombre premier rationnel différent de m, et que p^f appartienne à l'exposant f' par rapport à m, f' sera nécessairement un diviseur de $e = e'f'$, et l'idéal prin-

(¹) *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 343.



cipal $\mathfrak{e}p$ sera le produit de e' idéaux premiers, différents entre eux, du degré f'. Dans le cas de $e = m - 1$, $f = 1$, H est identique avec Ω, et l'on obtient encore le résultat démontré plus haut. Examinons maintenant de plus près le cas de $e = 2$, $f = \frac{m-1}{2}$.

Dans ce cas, les f nombres h sont les résidus quadratiques de m; en désignant par k l'ensemble des non-résidus quadratiques, les deux périodes conjuguées

$$\eta = \Sigma\theta^h, \quad \eta' = \Sigma\theta^k$$

forment une base du domaine $\mathfrak{e}$ composé de tous les nombres entiers contenus dans le corps quadratique H, et, par suite, son discriminant sera

$$\Delta(\mathrm{H}) = \begin{vmatrix} \eta & \eta' \\ \eta' & \eta \end{vmatrix}^2 = (\eta - \eta')^2,$$

à cause de $\eta + \eta' = -1$; le nombre m est associé avec le carré du nombre $\rho = \Pi(1 - \theta^k)$, et $\mathfrak{e}\rho$ est un idéal premier; de plus, $\mathfrak{e}p$ est le produit de deux idéaux premiers différents, du premier degré, ou bien $\mathfrak{e}p$ est un idéal premier du second degré, suivant que l'on a

$$p^{\frac{m-1}{2}} \equiv +1 \quad \text{ou} \quad \equiv -1 \quad (\text{mod.}\, m),$$

c'est-à-dire, d'après la notation de Legendre, suivant que l'on a

$$\left(\frac{p}{m}\right) = +1 \text{ ou } = -1.$$

Mais on peut étudier directement tous les corps quadratiques, sans avoir recours à la division du cercle, et nous avons déjà (§ 18) déterminé le discriminant D′ d'un tel corps H. On peut déduire tout aussi facilement de D′ les idéaux premiers (¹) appartenant au corps H : si le nombre premier rationnel p divise D′, l'idéal principal $\mathfrak{e}p$ qui lui correspond sera le carré d'un idéal premier; mais, si p ne divise pas D′, et que p soit impair, $\mathfrak{e}p$ sera le produit de deux idéaux premiers différents du premier degré, ou bien un idéal

---

(¹) *Voir* DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 168.

premier du second degré, suivant que l'on aura

$$\left(\frac{D'}{p}\right) = +1 \text{ ou } = -1;$$

si, de plus, D′ est impair et, par suite, $\equiv 1 \pmod{4}$, $\mathfrak{e}(2)$ sera le produit de deux idéaux premiers du premier degré, ou bien un idéal premier du second degré, suivant que l'on aura

$$D' \equiv 1 \text{ ou } \equiv 5 \pmod{8}.$$

En comparant ces lois, vraies pour tous les corps quadratiques, avec le résultat déduit de la division du cercle pour le corps spécial précédent H, on voit d'abord que D′ doit être divisible par *m*, mais par aucun autre nombre premier, et, par suite, qu'on doit avoir (§ 18)

$$\Delta(H) = D' = (-1)^{\frac{m-1}{2}} m;$$

de cette manière on déduit de principes tout à fait généraux, sans aucun calcul, le résultat connu

$$(\eta - \eta')^2 = (-1)^{\frac{m-1}{2}} m,$$

que l'on démontre dans la division du cercle par la formation effective du carré de $\eta - \eta'$ (¹). En poursuivant cette comparaison, on est conduit encore au théorème

$$\left(\frac{p}{m}\right) = \left(\frac{\pm m}{p}\right),$$

$\pm m$ étant $\equiv 1 \pmod{4}$, et au théorème

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.$$

Cette démonstration de la loi de réciprocité, par laquelle on détermine en même temps le caractère quadratique du nombre -1, coïncide, au fond, avec la célèbre sixième démonstration de Gauss (²), reproduite plus tard sous les formes les plus différentes par Jacobi,

(¹) *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 356.

(²) *Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novæ*; 1817.

Eisenstein et autres, et je ferai remarquer expressément que c'est en méditant sur le nerf de cette démonstration et des démonstrations analogues de la loi de réciprocité cubique et biquadratique, que j'ai été conduit aux recherches générales que j'ai indiquées plus haut et que je publierai prochainement.

Comme dernier exemple, nous considérerons le cas de $m = 4$; on a alors $\theta = i = \sqrt{-1}$, et les nombres entiers du corps quadratique Ω sont les nombres complexes entiers, introduits pour la première fois par Gauss, de la forme

$$\omega = x + yi,$$

x, y désignant des nombres rationnels entiers (§ 6); le discriminant de ce corps est

$$\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix}^2 = -4.$$

Le nombre $2 = i(1-i)^2$ est associé avec le carré du nombre premier $1-i$. Si p est un nombre premier rationnel positif impair, on a

$$i^p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} i,$$

et, par suite,

$$\omega^p = (x+yi)^p \equiv x + (-1)^{\frac{p-1}{2}} yi \pmod{p};$$

si l'on a maintenant $p \equiv 1 \pmod{4}$, tout nombre entier ω satisfera à la congruence

$$\omega^p \equiv \omega \pmod{p},$$

d'où il s'ensuit immédiatement que $\mathfrak{o}p$ est le produit de deux idéaux premiers du premier degré différents; mais, si l'on a $p \equiv 3 \pmod{4}$, il vient

$$\omega^p \equiv \omega', \quad \omega^{p^2} \equiv \omega \pmod{p},$$

ω' désignant le nombre conjugué avec ω, et l'on en conclut facilement que $\mathfrak{o}p$ est un idéal premier du second degré. Or tout idéal $\mathfrak{a}$ de ce corps doit être un idéal principal; si, en effet, α_0 est un des nombres de l'idéal $\mathfrak{a}$ dont les normes ont une valeur positive *minimum*, tout nombre α de l'idéal $\mathfrak{a}$ sera divisible par α_0; car on peut

(§ 6) choisir le nombre entier ω de manière que l'on ait

$$N(\alpha - \omega\alpha_0) < N(\alpha_0),$$

et comme les nombres α, α_0 et, par suite aussi, $\alpha - \omega\alpha_0$ appartiennent à l'idéal $\mathfrak{a}$, il faudra que l'on ait $N(\alpha - \omega\alpha_0) = 0$, d'où $\alpha = \omega\alpha_0$, et par conséquent $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\alpha_0$. C. Q. F. D.

Maintenant, puisque, dans le cas où p est un nombre premier rationnel et $\equiv 1 \pmod{4}$, $\mathfrak{o}p$ est le produit de deux idéaux premiers du premier degré, il en résulte que l'on a

$$p = N(\alpha_0) = N(a + bi) = a^2 + b^2,$$

ce qui constitue le célèbre théorème de Fermat.

§ 28. — *Classes d'idéaux.*

Revenons maintenant à la considération d'un corps quelconque Ω du degré n, pour établir la distribution de ses idéaux en *classes*. Cette distribution s'appuie d'abord sur ce théorème (§ 25, 5°), que tout idéal $\mathfrak{a}$ peut, au moyen de la multiplication par un idéal $\mathfrak{m}$, se changer en un idéal principal, et sur la définition suivante : Deux idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ seront dits *équivalents*, lorsque, au moyen de la multiplication par un seul et même idéal $\mathfrak{m}$, ils pourront se changer en idéaux principaux $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\mu$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\mu'$. Alors on a évidemment $\mu'\mathfrak{a} = \mu\mathfrak{a}'$; et réciproquement, s'il existe deux nombres η, η' différents de zéro, qui satisfassent à la condition $\eta'\mathfrak{a} = \eta\mathfrak{a}'$, les idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ seront certainement équivalents; car si, en multipliant $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{m}$, on le change en un idéal principal $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\mu$, il s'ensuit que $\mathfrak{o}\mu\eta' = \eta'\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \eta\mathfrak{a}'\mathfrak{m}$; donc $\mu\eta'$ est divisible par η, d'où $\mu\eta' = \mu'\eta$, $\mathfrak{o}\mu'\eta = \eta\mathfrak{a}'\mathfrak{m}$, et partant $\mathfrak{a}'\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\mu'$. C. Q. F. D.

Si deux idéaux $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ sont équivalents à un troisième $\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ seront aussi équivalents entre eux; car, d'après l'hypothèse, il existe quatre nombres μ, μ', η, η'', satisfaisant aux conditions $\mu'\mathfrak{a} = \mu\mathfrak{a}'$, $\eta''\mathfrak{a} = \eta\mathfrak{a}''$, et l'on a, par suite, $(\eta''\mu)\mathfrak{a}' = (\mu'\eta)\mathfrak{a}''$; C. Q. F. D. De là résulte la distribution de tous les idéaux en classes : si $\mathfrak{a}$ est un idéal déterminé, le système A de tous les idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, ... équivalents à $\mathfrak{a}$ s'appellera une *classe d'idéaux*, et $\mathfrak{a}$ sera dit le *représentant* de cette classe A. Deux idéaux quelconques contenus dans A seront équivalents, et à la place de $\mathfrak{a}$ on pourra



toujours choisir comme représentant tout autre idéal $\mathfrak{a}'$ contenu dans A.

Il est clair que le système de tous les idéaux principaux forme lui-même une classe; car chacun d'eux se change en lui-même quand on le multiplie par l'idéal $\mathfrak{o}$, et, par suite, ils sont équivalents; et si un idéal $\mathfrak{a}$ est équivalent à un idéal principal, et partant aussi à $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{a}$ devra être lui-même un idéal principal; car il existe deux nombres μ, μ', qui satisfont à la condition $\mu'\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\mu$, et de là résulte encore que μ est divisible par μ', d'où $\mu = \mu'\mu''$, et conséquemment $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\mu''$. Donc la classe représentée par $\mathfrak{o}$ contient tous les idéaux principaux et ne contient aucun autre idéal. Nous appellerons cette classe la *classe principale,* et nous la désignerons par O.

Si maintenant $\mathfrak{a}$ représente successivement tous les idéaux de la classe A, et de même $\mathfrak{b}$ tous ceux de la classe B, tous les produits $\mathfrak{ab}$ appartiendront à une seule et même classe K; car si $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ sont contenus dans A, et $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ dans B, il existe quatre nombres α', α'', β', β'' satisfaisant aux conditions $\alpha''\mathfrak{a}' = \alpha'\mathfrak{a}''$, $\beta''\mathfrak{b}' = \beta'\mathfrak{b}''$, et de là il s'ensuit que $(\alpha''\beta'')(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}') = (\alpha'\beta')(\mathfrak{a}''\mathfrak{b}'')$, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{a}''\mathfrak{b}''$ sont des idéaux équivalents. Nous désignerons cette classe K, à laquelle appartiennent tous les produits $\mathfrak{ab}$, par AB, et nous la nommerons le *produit* de A par B, ou la classe *composée* de A et de B. On a évidemment AB = BA, et de l'égalité $(\mathfrak{ab})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{bc})$ résulte, pour trois classes quelconques A, B, C, le héorème $(AB)C = A(BC)$. On peut donc appliquer ici les mêmes raisonnements que pour la multiplication des nombres ou des idéaux, et démontrer que, dans la composition d'un nombre quelconque de classes $A_1, A_2, \ldots, A_m$, l'ordre des multiplications successives, qui réunissent chaque fois deux classes dans leur produit, n'a aucune influence sur le résultat final, que l'on peut désigner simplement par $A_1 A_2 \ldots A_m$. Si les idéaux $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ sont des représentants des classes $A_1, A_2, \ldots, A_m$, l'idéal $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_m$ sera un représentant de la classe $A_1 A_2 \ldots A_m$. Si les m facteurs sont tous $= A$, leur produit sera dit la $m^{\text{ième}}$ puissance de A, et nous le désignerons par A^m; nous poserons, en outre, $A^1 = A$ et $A^0 = O$. Les deux cas suivants sont particulièrement importants :

De l'égalité $\mathfrak{oa} = \mathfrak{a}$ résulte le théorème, vrai pour une classe quelconque A, $OA = A$.

Comme, de plus, tout idéal $\mathfrak{a}$ peut, au moyen de la multiplication par un idéal $\mathfrak{m}$, être transformé en un idéal principal $\mathfrak{am}$, il existera pour chaque classe A une classe correspondante M, satisfaisant à la condition $AM = O$, et il en existera une seule; car si la classe N satisfait aussi à la condition $AN = O$, il en résultera que

$$N = NO = N(AM) = M(AN) = MO = M.$$

Cette classe M s'appellera la classe *opposée* ou la classe *inverse* de A, et nous la désignerons par A^{-1}; il est clair que, réciproquement, A sera la classe inverse de A^{-1}. Si l'on définit, de plus, A^{-m} comme étant la classe inverse de A^m, on aura, pour des exposants rationnels entiers quelconques r, s, les théorèmes

$$A^r A^s = A^{r+s}, \quad (A^r)^s = A^{rs}, \quad (AB)^r = A^r B^r.$$

Enfin, il est évident que de $AB = AC$ on conclura, en multipliant par A^{-1}, que l'on a toujours $B = C$.

§ 29. — *Le nombre des classes d'idéaux.*

En prenant à volonté n nombres entiers $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, formant une base du corps Ω, tout nombre

$$\omega = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n:$$

à coordonnées rationnelles entières $h_1, h_2, \ldots, h_n$, sera également un nombre entier du même corps. Si l'on attribue aux coordonnées toutes les valeurs entières qui, prises en valeur absolue, ne surpassent pas une valeur positive déterminée k, il est évident que les valeurs absolues des nombres correspondants ω, s'ils sont réels, ou leurs modules analytiques, s'ils sont imaginaires, seront tous $\leqq rk$, r étant la somme des valeurs absolues ou des modules de ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$, et, par suite, une constante entièrement indépendante de k. Comme, de plus, la norme $N(\omega)$ est un produit de n nombres conjugués ω de la forme ci-dessus, on aura en même temps

$$\pm N(\omega) \leqq sk^n,$$

s désignant pareillement une constante dépendant uniquement de la base. On tire de là le théorème suivant :

Dans toute classe d'idéaux M *il existe au moins un idéal* $\mathfrak{m}$ *dont la norme ne surpasse pas la constante* s.

Démonstration. — Prenons à volonté un idéal $\mathfrak{a}$ de la classe inverse M^{-1}, et choisissons pour k le nombre rationnel entier positif déterminé par les conditions

$$k^n \leqq N(\mathfrak{a}) < (k+1)^n;$$

si l'on attribue maintenant à chacune des n coordonnées $h_1, h_2, \ldots, h_n$ toutes les $k+1$ valeurs $0, 1, 2, \ldots, k$, on n'obtiendra que des nombres différents ω, et comme leur nombre $= (k+1)^n$, et, par suite, $> N(\mathfrak{a})$, il existe nécessairement, parmi ces nombres ω, deux nombres différents entre eux,

$$\beta = b_1\omega_1 + \ldots + b_n\omega_n, \quad \gamma = c_1\omega_1 + \ldots + c_n\omega_n,$$

qui sont congrus entre eux suivant $\mathfrak{a}$; par suite, leur différence

$$\alpha = (b_1 - c_1)\omega_1 + \ldots + (b_n - c_n)\omega_n$$

sera un nombre différent de zéro et divisible par $\mathfrak{a}$. Or les coordonnées b, c des nombres β, γ étant comprises dans la suite $0, 1, 2, \ldots, k$, les coordonnées $b - c$ du nombre α, prises en valeur absolue, ne surpassent pas la valeur k, et, par suite, on a

$$\pm N(\alpha) \leqq sk^n.$$

Mais, α étant divisible par $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{o}\alpha = \mathfrak{am}$, où $\mathfrak{m}$ désigne un idéal de la classe M, et, par suite,

$$\pm N(\alpha) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{m}) \leqq sk^n;$$

comme on a, de plus, $k^n \leqq N(\mathfrak{a})$, il en résulte $N(\mathfrak{m}) \leqq s$. C. Q. F. D.

Si l'on considère maintenant que la norme m d'un idéal $\mathfrak{m}$ est toujours divisible par $\mathfrak{m}$ (§ 20), il est clair qu'il ne peut exister qu'un nombre fini d'idéaux $\mathfrak{m}$ ayant une norme donnée m, parce que tout idéal, et partant aussi $\mathfrak{o}m$, est divisible seulement par un nombre fini d'idéaux (§ 25, 8°). Comme, en outre, il n'existe qu'un nombre fini de nombres rationnels entiers m ne surpassant pas une constante donnée s, il ne peut non plus y avoir qu'un nombre fini d'idéaux $\mathfrak{m}$ satisfaisant à la condition $N(\mathfrak{m}) \leqq s$, et de là résulte évidemment ce théorème fondamental :

Le nombre des classes d'idéaux du corps Ω est fini.

La détermination *exacte* du nombre des classes d'idéaux forme incontestablement un des problèmes les plus importants, mais aussi les plus difficiles de la Théorie des nombres. Pour les corps quadratiques, dont la théorie coïncide essentiellement avec celle des *formes* quadratiques binaires, le problème a été, comme on sait, complétement résolu pour la première fois par Dirichlet [1]; cette solution, en exprimant tout avec la terminologie de la théorie des *idéaux*, repose sur l'étude de la fonction

$$\sum \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}}$$

pour des valeurs positives infiniment petites de la variable indépendante $s - 1$; la somme s'étend à tous les idéaux $\mathfrak{a}$, le produit à tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$, et l'identité des deux expressions est une conséquence immédiate des lois de la divisibilité (§ 25). A l'aide de ces principes, le nombre des classes de formes ou d'idéaux a été, depuis, déterminé par Eisenstein [2] pour un cas particulier des corps du troisième degré, et par Kummer [3] pour les corps de degré supérieur qui proviennent de la division du cercle. Les résultats de ces recherches excitent le plus vif intérêt par les relations étonnantes qu'elles offrent avec l'Analyse, l'Algèbre et les autres parties de la Théorie des nombres; ainsi, par exemple, le problème traité par Kummer se relie le plus étroitement avec la célèbre démonstration qui a été donnée par Dirichlet du théorème sur la progression arithmétique, et qui peut être considérablement simplifiée à l'aide de ces recherches. On ne peut faire aucun doute qu'en poursuivant l'étude du problème général on ne doive s'attendre à réaliser d'importants progrès dans ces branches des Mathématiques; mais, bien que l'on ait réussi à terminer d'une manière générale une partie de cette recherche pour un corps quelconque Ω [4], on est cependant encore très-loin de la solution complète, et

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 19, 21.
(2) *Journal de Crelle*, t. 28.
(3) *Journal de Crelle*, t. 40; *Journal de Liouville*, t. XVI.
(4) Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 167.

l'on devra pour le moment se borner à étudier de nouveaux cas particuliers.

§ 30. — *Conclusion*.

Nous allons encore déduire quelques conséquences intéressantes du théorème fondamental que nous venons de démontrer. (Voir *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 305-307.)

Soient h le nombre de toutes les classes d'idéaux du corps Ω, et A une classe déterminée; les $h+1$ puissances

$$O,\ A,\ A^2,\ \ldots,\ A^{h-1},\ A^h$$

ne pourront pas être toutes différentes; il se trouvera donc certainement, dans la suite $0, 1, 2, \ldots, h$, deux exposants différents r et $r+m>r$, pour lesquels on aura $A^{r+m}=A^r$, et, par suite,

$$A^m = O;$$

si, de plus, m est *le plus petit* exposant positif qui satisfasse à la condition précédente, il est aisé de voir que les m classes

$$O,\ A,\ A^2,\ \ldots,\ A^{m-1}$$

seront toutes différentes entre elles, et nous dirons que la classe A *appartient* à l'exposant m; on a évidemment $A^{m-1}=A^{-1}$, et, plus généralement, on aura $A^r=A^s$ toutes les fois, et seulement alors, que r sera $\equiv s \pmod{m}$. En désignant, de plus, par B une classe quelconque, les m classes

$$\text{(B)} \qquad B,\ BA,\ BA^2,\ \ldots,\ BA^{m-1}$$

seront aussi différentes entre elles, et deux complexes de m classes chacun, tels que le précédent (B) et le suivant :

$$\text{(C)} \qquad C,\ CA,\ CA^2,\ \ldots,\ CA^{m-1},$$

seront ou identiques ou entièrement différents; s'il se trouve, en effet, dans les deux à la fois, une seule et même classe $BA^r=CA^s$, on aura $C=BA^{r-s}$, d'où il s'ensuit immédiatement que les m classes du système (C) coïncident complètement avec celles du complexe (B). Donc le système de toutes les h classes se compose d'un nombre déterminé g de tels complexes différents entre eux, et, comme

chaque complexe contient m classes différentes, on aura $h = mg$, c'est-à-dire que l'exposant m, auquel appartient une classe A, est toujours un diviseur du nombre de classes h. Donc, pour toute classe A, on a le théorème

$$A^h = O.$$

Maintenant, si $\mathfrak{a}$ est un idéal quelconque d'une classe quelconque A, $\mathfrak{a}^h$ appartiendra à la classe A^h, et par suite à la classe principale, c'est-à-dire que la $h^{\text{ième}}$ puissance de tout idéal est un idéal principal.

Par ce théorème important on arrive à concevoir la notion d'*idéal* sous un nouveau point de vue, auquel on peut rattacher en même temps une définition précise des *nombres idéaux*. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque, et $\mathfrak{a}^h = \mathfrak{o}\alpha_1$; en désignant maintenant par α un nombre quelconque de l'idéal $\mathfrak{a}$, α^h sera contenu dans $\mathfrak{a}^h$, et, par suite, divisible par le nombre α_1, et il s'ensuit de là (§ 13, 2°) que α est divisible par le nombre entier $\mu = \sqrt[h]{\alpha_1}$, lequel toutefois n'appartient pas en général au corps Ω. Mais, réciproquement aussi, si α est un nombre entier appartenant au corps Ω et divisible par μ, α^h sera divisible par $\mu^h = \alpha_1$, et, par suite, $(\mathfrak{o}\alpha)^h$ le sera par $\mathfrak{o}\alpha_1 = \mathfrak{a}^h$, et l'on en conclut aisément, d'après les lois générales de la divisibilité (§ 25), que $\mathfrak{o}\alpha$ est divisible par $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire que α est un nombre de l'idéal $\mathfrak{a}$. Donc l'idéal $\mathfrak{a}$ *est composé* de tous les nombres entiers contenus dans Ω et divisibles par le nombre entier μ; pour cette raison nous dirons que le nombre μ, lors même qu'il n'est pas contenu dans Ω, est *un nombre idéal du corps* Ω, et qu'il *correspond* à l'idéal $\mathfrak{a}$. Ou, un peu plus généralement, un nombre algébrique entier μ est dit un nombre idéal du corps Ω, lorsqu'il existe une puissance de μ, à exposant positif entier r, qui est associée à un nombre *existant* η du corps Ω, et qu'en même temps il existe un idéal $\mathfrak{a}$ du corps Ω, qui satisfait à la condition $\mathfrak{a}^r = \mathfrak{o}\eta$; cet idéal $\mathfrak{a}$ est l'idéal correspondant au nombre idéal μ, et il est toujours, et seulement alors, un idéal principal, quand μ est associé avec un nombre existant du corps Ω. (*Voir* l'Introduction et le § 10.)

Nous terminerons nos considérations par la démonstration du théorème suivant, annoncé déjà plus haut (§ 14) :

Deux nombres algébriques entiers quelconques α, β *admettent*

un commun diviseur δ, *qui peut être représenté sous la forme* $\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta'$, α' *et* β' *étant également des nombres algébriques entiers.*

Démonstration. — Admettons que les deux nombres α, β soient différents de zéro, le théorème étant évident dans le cas contraire. Alors il existe toujours, comme il est aisé de s'en convaincre, un corps fini Ω, contenant les deux nombres α, β, et soit encore $\mathfrak{o}$ le domaine de tous les nombres entiers de ce corps, et de plus h le nombre des classes d'idéaux. Posons maintenant

$$\mathfrak{o}\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{o}\beta = \mathfrak{b}\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{d}^h = \mathfrak{o}\delta_1,$$

$\mathfrak{d}$ étant le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{o}\alpha$, $\mathfrak{o}\beta$, et δ_1 étant contenu dans $\mathfrak{o}$. Puisque α^h, β^h sont divisibles par $\mathfrak{d}^h$, on peut poser

$$\alpha^h = \alpha_1\delta_1, \quad \beta^h = \beta_1\delta_1, \quad \mathfrak{o}\alpha_1 = \mathfrak{a}^h, \quad \mathfrak{o}\beta_1 = \mathfrak{b}^h,$$

α_1, β_1 étant pareillement contenus dans $\mathfrak{o}$. Comme, en outre, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux premiers entre eux, $\mathfrak{o}$ sera aussi le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{o}\alpha_1$, $\mathfrak{o}\beta_1$, et, comme le nombre 1 est contenu dans $\mathfrak{o}$, il se trouvera dans $\mathfrak{o}$ deux nombres α_2, β_2 satisfaisant à la condition

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 1, \quad \text{ou} \quad \alpha^h\alpha_2 + \beta^h\beta_2 = \delta_1.$$

Si l'on pose maintenant

$$\delta_1 = \delta^h,$$

le nombre entier δ sera un commun diviseur entre α et β, puisque α^h, β^h sont divisibles par δ_1, et par conséquent on pourra poser, h étant $\geqq 1$,

$$\alpha_2\alpha^{h-1} = \alpha'\delta^{h-1}, \quad \beta_2\beta^{h-1} = \beta'\delta^{h-1},$$

α', β' désignant des nombres entiers qui satisfont à la condition $\alpha\alpha' + \beta\beta' = \delta$. C. Q. F. D.

Si l'un au moins des deux nombres α, β est différent de zéro, le nombre δ, aussi bien que tout nombre qui lui sera associé, méritera le nom de *plus grand* commun diviseur de α, β. Si δ est une unité, α, β pourront être dits des *nombres premiers entre eux*, et deux pareils nombres jouissent de la propriété caractéristique que tout nombre μ divisible par α et par β l'est aussi par le produit $\alpha\beta$;

car des égalités $\mu = \alpha\alpha'' = \beta\beta''$ et $1 = \alpha\alpha' + \beta\beta'$ on tire

$$\mu = \alpha\beta(\alpha'\beta'' + \beta'\alpha''),$$

et la conclusion réciproque est également permise, lorsque α, β sont tous les deux différents de zéro.

TABLE DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JOUBERT (le P.). — SUR LES ÉQUATIONS QUI SE RENCONTRENT DANS LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES. — Paris, 1876. 1 vol. in-4. 108 p.

L'important Mémoire dont le titre précède a servi au P. Joubert pour obtenir de la Faculté des Sciences de Paris le titre de docteur (août 1876). L'auteur y a spécialement étudié l'éqaution modulaire et celle du multiplicateur.

Considérons une transformation d'ordre n, par laquelle y s'exprime rationnellement en x, définie par l'équation différentielle

$$M\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

les équations dont s'occupe l'auteur relient respectivement au module k le module λ et le multiplicateur M.

Si l'on fait $x=\sin\operatorname{am} z$, que l'on donne à K et iK' le sens habituel, on sait (BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 608) que, en désignant par n' et n'' deux entiers dont le produit est égal à n et par t un entier quelconque, et en posant

$$\Lambda=\frac{K}{n'},\quad i\Lambda'=\frac{iK'+16t\frac{K}{n'}}{n''},$$

on a

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\theta_2(0,\Lambda,\Lambda')}{\theta_3(0,\Lambda,\Lambda')},$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\theta_1(z,\Lambda,\Lambda')}{\theta(z,\Lambda,\Lambda')},$$

$$\frac{1}{M}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\theta'_1(0,\Lambda,\Lambda')}{\theta(0,\Lambda,\Lambda')}=n'\frac{\theta_3^2(0,\Lambda,\Lambda')}{\theta_3^2(0,K,K')}.$$

Ces formules servent à l'auteur de point de départ. Les seules transformations propres au degré n sont celles qui correspondent à des combinaisons de trois nombres n', n'', t, sans diviseur commun. Le P. Joubert cherche d'abord le nombre T(n) de ces com-

binaisons distinctes et, comme l'avait déjà fait M. Königsberger, trouve que l'on a

$$\mathrm{T}(n) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots (a+1)(b+1)(c+1) \ldots,$$

a, b, c, ... désignant les facteurs premiers de n, en sorte que

$$n = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots.$$

Ce point établi, l'auteur parvient aisément, en se servant des formules données par MM. Briot et Bouquet pour la division des périodes, à représenter par les transcendantes elliptiques les valeurs du module et du multiplicateur de la fonction transformée; il obtient ainsi la formule

$$\theta(z, \Lambda, \Lambda') = \prod_{p=-\frac{n'-1}{2}}^{p=\frac{n'-1}{2}} \; \prod_{p'=-\frac{n''-1}{2}}^{p'=\frac{n''-1}{2}} \theta(z + 2p\Lambda + 2p' i\Lambda'),$$

et trois autres formules analogues pour les trois autres fonctions θ.

Dans ces formules, les trois nombres n', n'', t, qui déterminent la transformation particulière du degré n que l'on considère, sont immédiatement en évidence; mais la valeur ainsi obtenue pour y n'a pas la forme si élégante que lui donne Jacobi dans les *Fundamenta nova*. L'auteur se propose de revenir à cette forme.

Posant

$$\varpi = \frac{m\mathrm{K} + m' i\mathrm{K}'}{n},$$

où m et m' sont deux nombres entiers n'ayant aucun facteur commun qui divise n et que l'on peut supposer positifs et inférieurs à n, il montre que, n', n'', t étant donnés, il est possible de trouver des systèmes de deux nombres m, m' tels, que les $n-1$ valeurs deux à deux égales et de signes contraires que, abstraction faite de la valeur obtenue en faisant $p = 0$, $p' = 0$, l'expression $2p\Lambda + 2p' i\Lambda'$ est susceptible de prendre dans la formule précédente et les formules analogues, coïncident avec

$$\pm 4\varpi, \quad \pm 8\varpi, \quad \pm 12\varpi, \quad \ldots, \quad \pm 4\frac{n-1}{2}\varpi$$



à des multiples près de $2K$ et de $2iK'$; le nombre de ces systèmes est le même que celui des entiers inférieurs à n et premiers avec n, et chacun d'eux permet de mettre les expressions trouvées sous la forme que leur donne Jacobi. Par exemple, la valeur précédemment donnée de $\theta(z, \Lambda, \Lambda')$ devient

$$\theta(z, \Lambda, \Lambda') = A\,\theta(z) \prod_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \theta(z+4s\varpi)\,\theta(z-4s\varpi),$$

A étant une constante. Au moyen de cette formule et des trois formules analogues, on obtient immédiatement les valeurs cherchées de y, du module et du multiplicateur.

L'objet principal du travail du P. Joubert, savoir, la formation, pour un nombre impair quelconque n, de l'équation modulaire et de l'équation du multiplicateur, étant ainsi préparé, l'auteur reprend d'abord la démonstration de Sohncke pour établir, dans le cas de n impair quelconque, l'existence de ces équations. Étudiant ensuite spécialement l'équation modulaire, il prouve, en étendant la démonstration donnée par M. Königsberger (¹) au cas d'un nombre impair quelconque, avec ou sans diviseur carré, que cette équation est irréductible. De là résultent plusieurs théorèmes qui permettent de réduire beaucoup le nombre des coefficients nécessaires à calculer pour la formation de l'équation modulaire. Le P. Joubert les applique à la formation de l'équation modulaire pour la transformation du neuvième ordre.

Passant à l'équation du multiplicateur, il prouve qu'en changeant k en $\frac{1}{k}$ dans cette équation, celle qui en résulte a pour racines les diverses valeurs de $\frac{Mk}{\lambda}$, et que, en changeant k en k', les racines sont multipliées par $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$; ce dernier résultat est dû à Jacobi. L'équation du multiplicateur est aussi irréductible, ainsi que l'a démontré M. Königsberger; le P. Joubert en donne une démonstration nouvelle : plusieurs propositions permettent de réduire le nombre de coefficients à calculer.

(¹) *Journal de Borchardt*, t. 62, p. 176.

outre, Sohncke a donné deux méthodes qui permettent d'ob- r ceux qui restent à déterminer, méthode que rappelle le ..oul t.

(pour l'équation modulaire, la transformation du neu- .. ordre sert d'exemple, tant pour la formation même de l'équa- ı du multiplicateur que pour l'application de diverses propriétés relatives aux racines de cette équation. Ainsi, dans ce cas particulier, l'équation se réduit au quatrième degré en prenant pour inconnue $(x-1)^2$.

PRINGSHEIM (H). — Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung (¹).

M. Königsberger a montré (*Journal de Crelle*, t. 67) qu'une fonction ϑ hyperelliptique $\vartheta_\lambda(v'_1, v'_2)$ peut être, par une transformation du second degré, changée en une somme de quatre carrés de fonctions ϑ ou de deux produits de deux fonctions ϑ. L'un ou l'autre cas se présente selon que certains nombres entiers $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, qui jouent un rôle important dans la transformation et qui sont composés avec les caractéristiques m_1^λ, m_2^λ, n_1^λ, n_2^λ de la fonction à transformer $(\vartheta_\lambda v'_1, v'_2)$ et les nombres de transformations du système

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma'_{11} & \sigma'_{22} & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\rho'_{21} & -\rho'_{22} & \rho_{22} & \rho_{21} \\ -\rho'_{11} & -\rho'_{12} & \rho_{12} & \rho_{11} \end{vmatrix},$$

sont, ou non, pairs tous les quatre.

Ainsi, en particulier, le premier mode de transformation conduira à une équation de la forme

$$\text{(I)}\quad \vartheta_\lambda(v'_1, v'_2) = (\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1, v_2).$$

M. Pringsheim établit d'abord le théorème suivant :

Dans toute transformation du second degré d'une fonction hy-

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1875.

perelliptique de premier ordre, chaque formule de transformation d'une fonction ϑ conduit, par la substitution des demi-périodes, à trois (et seulement à trois) autres formules de transformation.

La recherche des nombres $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ pour tous les quinze types, dus à M. Hermite, des classes non équivalentes de transformation montre que, pour toute transformation du second degré, il existe quatre indices λ tels que $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ soient pairs tous les quatre : ainsi apparaissent quatre transformations de fonctions ϑ de la forme (I). Il suit de là immédiatement que la substitution des demi-périodes dans une formule telle que (I) ne peut conduire *au plus* qu'à trois autres formules de transformation. Cette propriété est évidemment indépendante de l'indice λ et de la forme particulière (I) de la formule de transformation, mais dépend essentiellement des relations entre les arguments v_1, v_2 et v'_1, v'_2 : elle appartient donc à toutes les transformations du second degré. D'un autre côté, on voit facilement que l'emploi de toutes les quinze substitutions de demi-périodes ne peut pas amener moins de trois changements pour l'indice λ; le théorème est donc démontré dans sa généralité : il s'étend aux transformations de degré pair, en excluant seulement le cas où tous les nombres de transformation sont tous divisibles par 2 ou une puissance de 2.

Une autre recherche, liée aux équations de transformation de la forme (I), concerne les relations linéaires homogènes qui existent entre certaines combinaisons de quatre carrés de fonctions ϑ. Dans l'équation (I), le choix des indices n'est soumis qu'à une seule condition, savoir, qu'il n'y ait aucune relation linéaire entre les quatre carrés des fonctions ϑ correspondantes : puis donc qu'on ne peut plus choisir pour α, β, γ, δ les quatre indices de fonctions ϑ impaires, il faut qu'entre les quatre carrés de telles fonctions existe une relation linéaire. Si donc on combine les six fonctions ϑ impaires par quatre, en faisant progresser circulairement les indices, on obtient six équations de la forme

$$(\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1, v_2) = 0,$$

dont on déterminera ensuite les coefficients en remplaçant les arguments par zéro et par les demi-périodes; si maintenant dans chacune des six équations on fait les quinze substitutions possibles des

demi-périodes, on obtiendra finalement un groupe de 96 relations linéaires entre les carrés de quatre fonctions ϑ. Ces relations ont été données par Rosenhain dans son *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes*, etc., p. 425, sauf une légère différence dans les notations.

M. Pringsheim traite ensuite un cas particulier des transformations du second degré, où la fonction ϑ hyperelliptique transformée donne un produit de deux fonctions ϑ elliptiques et parvient ainsi à la réduction que Jacobi avait donnée d'une façon purement algébrique (*Journal de Crelle*, t. 8), de certaines intégrales hyperelliptiques à des intégrales elliptiques. La condition nécessaire et suffisante pour que cette séparation de la fonction hyperelliptique transformée en un produit de deux fonctions elliptiques ait lieu est que le module transformé τ'_{12} soit nul, et que, en outre, $\vartheta_{14}(v'_1, v'_2)$, en vertu de l'équation

$$\vartheta_{14}(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, 0, \tau'_{22}) = \vartheta_1(v'_1, \tau'_{11}).\vartheta_1(v'_1, \tau'_{12})$$

s'annule lorsque les arguments sont nuls. Mais, ainsi que l'a montré M. Königsberger, une fonction paire ϑ transformée ne peut s'annuler pour la valeur zéro des arguments que si elle se présente sous la forme (I); d'un autre côté, pour aucun des quinze types de transformation, $\vartheta_{14}(v'_1, v'_2)$ ne se met sous cette forme : il en résulte que, pour obtenir des transformations jouissant de la propriété demandée, on doit combiner chaque type de transformation avec des transformations linéaires telles que $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, pour l'indice 14, soit quatre nombres pairs. M. Pringsheim montre ensuite comment on est conduit aisément aux quatre systèmes linéaires qui suivent :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

En les combinant ensuite avec les quatre formes fondamentales des quinze types, on obtient quinze nouveaux systèmes de transformations du second degré, satisfaisant à la condition énoncée.

L'équation

$$\vartheta_{14}(v'_1, v'_2)_{v'_1=v'_2=0} = (\alpha)\vartheta_\alpha^2 + (\beta)\vartheta_\beta^2 + (\gamma)\vartheta_\gamma^2 + (\delta)\vartheta_\delta^2 = 0$$

donne ensuite, pour ces quinze transformations, quinze équations de condition différentes, de la forme

$$\varphi(\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, \varkappa^2\lambda^2, \varkappa^2\mu^2, \lambda^2\mu^2) = 0,$$

φ étant une fonction linéaire : elles contiennent, en particulier, le cas traité par Jacobi

$$\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2.$$

Pour traiter ce cas et obtenir sous la même forme les résultats donnés par Jacobi, l'auteur ne se sert pas des transformations précédentes, mais bien d'un nouveau système linéaire qui s'en déduit, à savoir

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

par cette transformation, $\vartheta_{14}(v'_1, v'_2)$ prend la forme (I), et l'équation $\vartheta_{14}(0, 0) = 0$ donne la condition $\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$. Calculant ensuite l'expression de la fonction ϑ transformée avec les indices 23, 5, 0, il introduit les intégrales, et exprime les fonctions ϑ à arguments v_1, v_2 et v'_1, v'_2 au moyen des fonctions algébriques correspondantes des limites supérieures des intégrales et des fonctions ϑ à arguments nuls au moyen des modules des intégrales. Les relations algébriques ainsi obtenues, qui sont passablement compliquées, donnent la réduction d'une somme de deux intégrales hyperelliptiques de la forme

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

et de la forme

$$\int_0^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

ou

$$R(x) = x(1-x)(1-\varkappa^2x^2)(1-\lambda^2x^2)(1-\varkappa^2\lambda^2x^2),$$

à une somme de deux intégrales elliptiques de la forme

$$A\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} + B\int_0^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}.$$

Jacobi donne la réduction d'une seule intégrale hyperelliptique. Il suffit de faire $x_2 = 1$ et $y_2 = -y_1$: on obtient ainsi les résultats mêmes de Jacobi.

VOSS (A.). — Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades (¹).

Les tangentes à une surface du second degré forment un complexe *spécial* : le premier membre de son équation satisfait à une équation aux dérivées partielles que l'auteur met sous la forme

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 = \Delta\Sigma x_i^2,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_6$ sont les six coordonnées d'une droite satisfaisant à l'identité

$$\Sigma x_i^2 = 0.$$

M. Voss étudie les formes quadratiques, à un nombre quelconque de variables, qui satisfont à une telle équation aux dérivées partielles et, en particulier, détermine les *facteurs élémentaires* du déterminant de la forme $f + \lambda\Sigma x^2$. Les deux formes f et φ satisfaisant à l'équation différentielle, on discute dans le même sens les déterminants des trois formes $f + \lambda\Sigma x^2$, $\varphi + \lambda\Sigma x^2$ et $f + \lambda\varphi$. Par les formules ainsi obtenues, on est conduit à la conception du *sextuple polaire* d'une surface du second degré, assemblage de six complexes linéaires, groupés comme les six arêtes d'un tétraèdre polaire. Deux surfaces du second degré données ont en général *un seul* sextuple polaire commun, qui n'est autre chose que leur tétraèdre polaire commun; mais les cas particuliers sont ici bien plus nombreux que ceux qui se présentent dans l'étude de l'intersection de deux surfaces du second degré. F. K.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. X; 1876.



ZEUTHEN (H.). — NOTE SUR LES SINGULARITÉS DES COURBES PLANES [1].

On appelle *équivalents plückériens d'une singularité supérieure d'une courbe plane* les quatre nombres des singularités ordinaires qui peuvent les remplacer dans les trois formules de Plücker. Cette détermination étant incomplète, M. Cayley y a ajouté l'équation qui sert à exprimer le genre de la courbe. On obtient ainsi les valeurs des équivalents, que M. Zeuthen appelle *principales*. Or ces valeurs n'indiquent pas toujours les nombres de singularités ordinaires d'une courbe variable d'un système qui sont venues former les singularités supérieures d'une courbe singulière du système. Il faut donc déterminer aussi les autres valeurs des équivalents : cela se fait sans difficulté lorsqu'on connaît les valeurs principales. Pour déterminer celles-ci, M. Zeuthen se sert de résultats trouvés et démontrés par MM. Cayley, Stolz, Halphen et Nöther. Le but de sa Note est de donner à la détermination des équivalents une forme commode pour les applications que l'on trouvera dans un travail suivant du même auteur. F. K.

APPELL (G.). — SUR LES PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES GAUCHES ET LE MOUVEMENT HÉLICOÏDAL D'UN CORPS SOLIDE [2]. (30 p.).

Dans une thèse présentée à la Faculté des Sciences, M. Appell s'est proposé l'étude des cubiques gauches en prenant principalement pour objet de ses recherches les propriétés qui résultent de ce que la cubique gauche est une courbe dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.

La première Partie de ce travail est consacrée à la démonstration des propriétés du système des pôles et des plans polaires par rapport à une cubique gauche. Cette démonstration nouvelle est fondée sur cette remarque, que la cubique est une courbe unicursale et que, si l'on appelle λ le paramètre en fonction rationnelle duquel s'expri-

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. X ; 1876.
(2) *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. V ; 1876.

ment les coordonnées des points de la courbe, il y a, entre les trois valeurs λ_1, λ_2, λ_3 de ce paramètre correspondantes aux trois points où la courbe est rencontrée par un plan variable passant par un point fixe, une relation de la forme

$$(1) \quad A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0.$$

La proposition fondamentale de cette théorie, à savoir que les trois points de contact des plans osculateurs menés du point fixe à la cubique sont sur un plan passant par le point, résulte immédiatement de ce que les trois racines de l'équation

$$A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + C\lambda + D = 0,$$

obtenue en faisant, dans la relation (1), $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, vérifient cette relation (1). La suite des raisonnements dans cette première Partie est présentée de façon à montrer l'analogie qu'il y a entre ces propriétés des cubiques gauches et les propriétés des pôles et polaires dans les sections coniques. Les propriétés ainsi établies des plans et de leurs pôles par rapport à une cubique gauche sont, comme il est connu, identiques aux propriétés des plans et de leurs foyers dans le mouvement hélicoïdal d'un corps solide, démontrées par M. Chasles. Cette remarque conduit M. Appell à se poser deux problèmes dont la solution constitue la seconde Partie de son travail.

Le premier de ces problèmes consiste, étant donné le mouvement hélicoïdal d'un corps solide, à déterminer les cubiques telles que le foyer de chacun de leurs plans osculateurs coïncide avec le point de contact de ce plan. En prenant pour axe des z l'axe instantané glissant dans le mouvement et en appelant k le rapport de la vitesse de translation à la vitesse angulaire, M. Appell démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe ait la vitesse de chacun de ses points dirigée perpendiculairement au plan osculateur en ce point, est que ses coordonnées vérifient l'équation différentielle

$$(2) \quad x\,dy - y\,dx + k\,dz = 0,$$

qui exprime que la vitesse d'un point de la courbe est perpendiculaire à la tangente. Cette équation, appliquée aux cubiques gauches,



donne pour équations générales les cubiques cherchées

$$x = x_0 + \frac{A}{\lambda - a} + \frac{B}{\lambda - b} + \frac{C}{\lambda - c},$$

$$y = y_0 + \frac{A'}{\lambda - a} + \frac{B'}{\lambda - b} + \frac{C'}{\lambda - c},$$

$$k(z - z_0) = xy_0 - yx_0 + h\left(\frac{c - b}{\lambda - a} + \frac{a - c}{\lambda - b} + \frac{c - a}{\lambda - c}\right),$$

avec les conditions

$$\frac{BC' - CB'}{(b - c)^2} = \frac{CA' - AC'}{(c - a)^2} = \frac{AB' - BA'}{(a - b)^2} = h,$$

qui expriment que les points d'inflexion de la projection de la courbe sur le plan des xy sont à l'infini.

Le second problème consiste, étant donnée une cubique gauche, à déterminer le mouvement hélicoïdal correspondant. En écrivant les équations de la cubique sous la forme

$$x = \frac{A}{\lambda - a} + \frac{B}{\lambda - b} + \frac{C}{\lambda - c},$$

$$y = \frac{A'}{\lambda - a} + \frac{B'}{\lambda - b} + \frac{C'}{\lambda - c},$$

$$z = \frac{A''}{\lambda - a} + \frac{B''}{\lambda - b} + \frac{C''}{\lambda - c},$$

et en appelant v_x, v_y, v_z les composantes de la vitesse de translation suivant les axes, p, q, r celles de la vitesse angulaire, M. Appell trouve

$$v_x = (B'C'' - C'B'')(c - b) + (C'A'' - A'C'')(a - c) + (A'B'' - B'A'')(b - a),$$
$$p = A(c - b)^2 + B(a - c)^2 + C(b - a)^2,$$

et d'autres formules analogues pour les autres projections.

M. Appell termine son travail par l'exposition de quelques propriétés générales des courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.

PREMIÈRE PARTIE.

MÉLANGES.

NOTE RELATIVE AUX FORMES BINAIRES DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. JULES TANNERY.

lérant deux équations en x du $n^{\text{ième}}$ degré

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

n en λ du $2n - 2^{\text{ième}}$ degré

$$F(\lambda) = 0,$$

en écrivant que l'équation en x

$$\lambda\varphi(x) + \psi(x) = 0$$

double, aura pour racines les valeurs que prend

u $-\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$, quand on y remplace x par les $2n - 2$ racines

ation

$$\varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x) = 0,$$

et $\psi'(x)$ désignant les dérivées de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$. Or, si les deux équations proposées

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

ont une racine commune, cette racine commune annule

$$\varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x)$$

et sa dérivée

$$\varphi(x)\psi''(x) - \psi(x)\varphi''(x),$$

et, par suite, l'équation en x,

$$\varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x) = 0,$$

et l'équation en λ,

$$F(\lambda) = 0,$$

ont une racine double : il suit de là que les discriminants de ces deux équations doivent contenir en facteur le résultant des deux équations $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$. Dans le cas où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont du second degré, les deux discriminants coïncident avec le résultant :

je me suis proposé d'effectuer les calculs dans le cas de deux équations du troisième degré, et de mettre en évidence le second facteur qui, pour le discriminant de l'équation en λ, se trouve être un cube parfait.

La condition pour que l'équation

$$(1)\quad \lambda(a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3) + (a'_0x^3 + 3a'_1x^2 + 3a'_2x + a'_3) = 0$$

ait une racine double est

$$(2)\qquad \alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon = 0,$$

en faisant

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha = 4wv + u^2, \\ \beta = 4w\eta + 4v\zeta + 2u\xi, \\ \gamma = 4wv' + 4w'v + 4\eta\zeta + \xi^2 + 2uu', \\ \delta = 4w'\eta + 4v'\zeta + 2u'\xi, \\ \varepsilon = 4w'v' + u'^2, \end{cases}$$

où l'on suppose

$$(4)\quad \begin{cases} u = a_0a_3 - a_1a_2, \quad u' = a'_0a'_3 - a'_1a'_2, \\ v = a_1a_3 - a_2^2, \quad v' = a'_1a'_3 - a'^2_2, \\ w = a_1^2 - a_0a_2, \quad w' = a'^2_1 - a'_0a'_2, \\ \xi = a_0a'_3 + a'_0a_3 - a'_1a_2 - a_1a'_2, \\ \eta = a_1a'_3 + a'_1a_3 - 2a_2a'_2, \\ \zeta = 2a_1a'_1 - a_0a'_2 - a'_0a_2. \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation (2) s'exprime, comme on le sait, au moyen des deux invariants i et j, définis par les égalités

$$(5)\quad \begin{cases} 6i = 12\alpha\varepsilon - 3\beta\delta + \gamma^2, \\ 72j = 72\alpha\gamma\varepsilon + 9\beta\gamma\delta - 2\gamma^3 - 27(\alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2), \end{cases}$$

et que je me propose de calculer.

Pour cela, je ferai

$$(6)\quad \begin{cases} a = 2(a_1a'_2 - a'_1a_2), \\ a' = 2(a_0a'_1 - a'_0a_1), \\ a'' = 2(a_2a'_3 - a'_2a_3), \\ b = a_1a'_2 - a_2a'_1 - a_0a'_3 + a'_0a_3, \\ b' = a_1a'_3 - a'_1a_3, \\ b'' = a_2a'_0 - a'_2a_0; \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} A = a'a'' - b^2, & B = b'b'' - ab, \\ A' = aa'' - b'^2, & B' = bb'' - a'b', \\ A'' = aa' - b''^2, & B'' = bb' - a''b'', \\ \Delta = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2. & \end{array}\right.$$

ctions des huit coefficients $a_0, a_1, \ldots, a'_0, a'_1, \ldots$, que défi-
t les égalités précédentes, sont liées entre elles par plusieurs
simples, parmi lesquelles je citerai les suivantes :

$$A + 4B + (a+b)^2 = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{ll} A = 4uu' - \xi^2, & B = 2wv' + 2w'v - \eta\zeta, \\ A' = 4vv' - \eta^2, & B' = 2wu' + 2w'u - \xi\zeta, \\ A'' = 4ww' - \zeta^2, & B'' = 2vu' + 2v'u - \xi\eta; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a\xi + b''\eta + b'\zeta = 2(wv' - w'v), \\ b''\xi + a'\eta + b\zeta = 2(uw' - u'w), \\ b'\xi + b\eta + a''\zeta = 2(vu' - v'u); \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} au + b''v + b'w = w\eta - v\zeta, \\ b''u + a'v + bw = u\zeta - w\xi, \\ b'u + bv + a''w = v\xi - u\eta; \end{array}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} au' + b''v' + b'w' = v'\zeta - w'\eta, \\ b''u' + a'v' + bw' = w'\xi - u'\zeta, \\ b'u' + bv' + a''w' = u'\eta - v'\xi; \end{array}\right.$$

$$(13)\quad a\xi^2 + a'\eta^2 + a''\zeta^2 + 2b\eta\zeta + 2b'\xi\zeta + 2b''\xi\eta + \Delta = 0.$$

Toutes ces identités se vérifient très-aisément, sauf la dernière, en remplaçant les diverses quantités qui y entrent par leurs valeurs en fonction des huit coefficients $a_0, a_1, \ldots, a'_0, a'_1, \ldots$. Quant à la dernière, on la déduit des identités (10) ou (11), par l'élimination des quantités u, v, w, ou u', v', w'.

Je reviens maintenant au calcul des deux invariants i et j, qui s'expriment tous les deux, ainsi que le résultant R des deux équations

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$
$$a'_0x^3 + 3a'_1x^2 + 3a'_2x + a'_3 = 0,$$

au moyen des six quantités a, a', a'', b, b', b''. Les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ε sont exprimées par les équations (3) en fonctions de u, v, w,

u', v', w', ξ, η, ζ : on reconnaît de suite que, en se servant des égalités (9), on peut éliminer u, v, w, u', v', w' de γ et des produits $\alpha\varepsilon$, $\beta\delta$; dès lors on pourra exprimer i au moyen de A, A', A'', B, B', B'', ξ, η, ζ. Or il arrive que, en effectuant les calculs, ces trois dernières quantités disparaissent d'elles-mêmes, et que l'on trouve

$$6i = (A - 2B)^2 + 12(A'A'' + B'B'').$$

En vertu d'identités bien connues, on peut remplacer respectivement A'A'' et B'B'' par $\Delta a + B^2$ et $\Delta b + AB$; on obtient ainsi

$$6i = (A + 4B)^2 + 12\Delta(a + b),$$

ou, en vertu de l'égalité (8),

(14) $$6i = (a + b)[12\Delta + (a + b)^3].$$

On calculera j d'une façon analogue, c'est-à-dire qu'au moyen des identités (9) on cherchera à l'exprimer en fonction des quantités A, A', A'', B, B', B'', ξ, η, ζ. La valeur des trois premiers termes qui entrent dans la valeur donnée plus haut de $72j$,

$$72j = 72\alpha\varepsilon\gamma + 9\beta\delta\gamma - 2\gamma^3 - 27(\alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2),$$

s'obtiendra immédiatement en utilisant les valeurs de $\alpha\varepsilon$, $\beta\delta$ et γ dont on a eu besoin pour le calcul de i; quant au calcul de $\alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2$, on l'abrégera en se servant de l'identité suivante, qui résulte immédiatement des égalités (3) :

$$\alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2 = 4(w\delta + w'\beta)(v\delta + v'\beta) + (u\delta + u'\beta)^2 - 2\beta\delta(2wv' + 2w'v + uu').$$

On aperçoit, en effet, qu'au moyen des identités (9) il est facile d'éliminer u, v, w, u', v', w' des quantités $w\delta + w'\beta$, $v\delta + v'\beta$, $u\delta + u'\beta$, $2wv' + 2w'v + uu'$; on parviendra ainsi, et sans autres réductions que celles qui se présentent d'elles-mêmes dans la suite des calculs, à la valeur suivante :

$$\begin{aligned}36j = 54[&(A'A'' - B^2)\xi^2 + (AA'' - B'^2)\eta^2 + (AA' - B''^2)\zeta^2 \\ &+ 2(B'B'' - AB)\eta\zeta + 2(BB'' - A'B')\xi\zeta + 2(BB' - A''B'')\xi\eta] \\ &+ (A - 2B)^3 - 36(A - 2B)(A'A'' + B'B'') - 54AB^2 \\ &+ 54A(A'A'' + B'B''),\end{aligned}$$

qui, en se servant des identités

$$A'A'' - B^2 = \Delta a, \text{ etc.}$$

et de l'identité (13), se réduit à

$$36j = -54\Delta^2 + 18(A + 4B)(a + b)\Delta + (A + 4B)^3,$$

ou finalement, en vertu de l'identité (8),

$$(15) \qquad 36j = -[54\Delta^2 + 18\Delta(a + b)^3 + (a + b)^6].$$

D'après cela, le discriminant de l'équation en λ est

$$(16) \qquad i^3 - 6j^2 = \frac{-\Delta^2}{2}[27\Delta + 2(a + b)^3].$$

Le facteur $27\Delta + 2(a + b)^3$ n'est autre que le résultant des deux équations

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0,$$
$$a'_0 x^3 + 3a'_1 x^2 + 3a'_2 x + a'_3 = 0,$$

ainsi qu'on le reconnaît de suite, en formant le résultant d'après la règle de Bézout; les éléments du déterminant du troisième ordre que l'on forme d'après cette règle s'expriment immédiatement au moyen de a, a', a'', b, b', b'', et, en développant, on arrive sans peine à le mettre sous la forme indiquée.

D'après ce que j'ai dit en commençant, ce résultant doit aussi se mettre en facteur dans le discriminant de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2, & a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 \\ a'_0 x^2 + 2a'_1 x + a'_2, & a'_1 x^2 + 2a'_2 x + a'_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$a' x^4 - 4b'' x^3 + (4a - 2b)x^2 + 4b' x + a'' = 0.$$

Ici les calculs sont beaucoup plus aisés ; on trouve facilement

$$i = \frac{2}{3}(a + b)^2, \qquad j = \frac{2[(a + b)^3 + 27\Delta]}{9},$$

$$i^3 - 6j^2 = -8\Delta[27\Delta + 2(a + b)^3].$$



COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BAILLAUD (B.). — EXPOSITION DE LA MÉTHODE DE M. GYLDÉN POUR LE DÉVELOPPEMENT DES PERTURBATIONS DES COMÈTES ([1]).

Les méthodes célèbres de Lagrange et de Laplace pour le calcul des perturbations des mouvements des corps célestes ont été longtemps appliquées sans aucune modification. Les efforts des géomètres vers la découverte de méthodes nouvelles ont généralement été relatifs à des cas spéciaux, particulièrement au mouvement de la Lune. On doit citer à ce sujet les théories de la Lune de Hansen et de Delaunay. Cauchy donna une belle méthode pour le calcul de perturbations spéciales. D'illustres géomètres s'exercèrent sur le problème des trois corps; on sait que Jacobi réussit à éliminer une des inconnues, élimination qui équivaut à la découverte d'une intégrale; mais ces résultats, quelle que soit leur importance, n'ont pas contribué à simplifier la construction des Tables des corps célestes.

Depuis le commencement du siècle, d'éminents géomètres ont approfondi l'étude d'un assez grand nombre de fonctions transcendantes, dont quelques-unes avaient déjà été introduites par Laplace dans la Mécanique céleste. Parmi ces fonctions, les plus remarquables n'ont pu être appliquées d'une manière naturelle à la solution du problème qui nous occupe : nous voulons dire ces fonctions elliptiques si intéressantes, dont l'étude est aujourd'hui si complète, et qui à certains égards, en tant que fonctions périodiques plus générales que les fonctions trigonométriques, sembleraient devoir s'introduire facilement dans la théorie des perturbations. En juin 1869, M. Hugo Gyldén publia, dans le *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, un Mémoire qui renferme un essai sur le sujet que nous venons d'indiquer. Ce Mémoire fut suivi de plusieurs autres insérés dans les Recueils de Saint-Pétersbourg, de Copenhague et de Stockholm. Dans une thèse présentée à la Faculté des Sciences, M. Baillaud s'est efforcé d'exposer cette méthode avec

---

([1]) *Annales de l'École Normale*, 2e Série, t. V. (44 p.).

toute la simplicité compatible avec la nature du sujet, et en a étudié la portée sur un exemple.

On sait que la détermination des perturbations des corps célestes se fait de la manière suivante : on remplace les trois équations différentielles du second ordre du mouvement de chacun d'eux par six équations du premier ordre, donnant les dérivées par rapport au temps des six inconnues dont dépend le mouvement, en fonction de ces inconnues elles-mêmes et des quantités analogues relatives à la planète perturbatrice. Pour intégrer ces équations, on y remplace dans les seconds membres les inconnues par les valeurs qu'elles auraient sans l'existence de la force perturbatrice, c'est-à-dire par les fonctions du temps qui représentent ces inconnues dans l'hypothèse du mouvement elliptique. On a ainsi des valeurs très-approchées des dérivées des inconnues par rapport au temps. Ces valeurs sont des fonctions du temps, que l'on développe en une série de sinus et de cosinus de fonctions linéaires du temps. L'intégration est immédiate : on obtient ainsi les perturbations du premier ordre ; ces perturbations sont toutes multipliées par la masse de la planète perturbatrice, la masse du Soleil étant prise pour unité.

Les fonctions du temps dont nous venons de parler dépendent essentiellement de la distance Δ de l'astre troublé à la planète perturbatrice, ou plutôt des puissances négatives de cette distance et, par suite, des positions des deux astres au même instant. Il est visible, dès lors, que les termes des séries qui représentent ces fonctions seront de la forme

$$A \frac{\sin}{\cos} (\alpha M + \beta M_1),$$

α et β désignant des nombres entiers, M et M_1 les anomalies moyennes des deux astres, ou des quantités équivalentes. Il est relativement aisé d'obtenir le développement de Δ^2 ; mais ce développement contiendra un très-grand nombre de termes inutiles, et la formation de ses puissances négatives présentera de très-grandes difficultés.

Hansen, qui s'est laborieusement appliqué au perfectionnement de la plupart des méthodes de la Mécanique céleste, avait remarqué que, dans le cas des orbites très-excentriques, on peut, en ne considérant qu'une partie de l'orbite de l'astre troublé, augmenter la convergence des développements relativement à l'anomalie de cet

astre. La méthode de Hansen est exposée dans un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris, et inséré dans le premier volume des *Suppléments aux Comptes rendus*. On comprendra la possibilité de ne représenter par des valeurs réelles d'une variable qu'une partie d'un arc d'ellipse en remarquant que, si l'on pose

$$r = A + B \sin x + C \sin^2 x,$$

r désignant le rayon vecteur de l'astre, on pourra disposer de A, B, C de telle manière que, x variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, r, parti d'une valeur r_1, arrive à une valeur r_2 en passant par un minimum. Si r_1 et r_2 sont deux rayons vecteurs de l'ellipse situés de part et d'autre de l'axe focal, et que le minimum soit $a(1-e)$, cette formule représentera la portion de l'ellipse comprise entre les points auxquels aboutissent les rayons r_1 et r_2 et comprenant le périhélie, pourvu qu'on établisse entre x et l'anomalie de l'ellipse une relation convenable. Hansen a nommé x *anomalie partielle*.

En remplaçant dans la formule précédente r par $\frac{1}{r}$, on représente de même l'autre partie.

Hansen réussit encore, par des transformations faciles à concevoir, à séparer l'orbite au périhélie, à l'aphélie, puis en autant de parties que l'on veut, et l'on reconnaît aisément qu'en multipliant les divisions de l'orbite, on peut augmenter beaucoup la convergence relativement à l'anomalie partielle de l'astre troublé.

La méthode de Hansen, avantageuse surtout dans le cas des orbites très-excentriques, a été appliquée par lui, dans son Mémoire, au calcul des perturbations que la Terre exerce sur la comète d'Encke. Le calcul est inachevé, et il est aisé de reconnaître dans le Mémoire de l'illustre astronome que le travail est encore bien pénible. C'est cette méthode que M. Gyldén a prise pour point de départ; M. Gyldén, en introduisant les fonctions elliptiques, réussit à augmenter la convergence par rapport aux deux variables.

M. Gyldén augmente notablement la convergence des développements par rapport à l'anomalie partielle de l'astre troublé par la transformation suivante. Soit x l'anomalie partielle de Hansen; posons

$$x = \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \omega,$$

ω étant une nouvelle variable, le module étant indiqué par le passage de l'anomalie ordinaire à l'anomalie partielle; et, au lieu de développer suivant les sinus et cosinus de multiples de x, développons suivant ceux de multiples de ω. Les séries qui représentent les développements procèdent suivant les puissances $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, et si voisin que le module soit de l'unité, q est très-petit. Dans l'exemple traité par M. Baillaud, on avait $k = 0,4$ et $q = 0,01$; si $k = 0,98$, q est $< 0,1$. Mais cette transformation ingénieuse n'est qu'un accessoire dans la méthode de M. Gyldén.

Soient ω l'anomalie de l'astre troublé, c l'anomalie de la planète perturbatrice. On a

$$\begin{aligned}\Delta^2 = A &+ B \sin\omega + C \sin 2\omega + \ldots \\ &+ B_1 \cos\omega + C_1 \cos 2\omega + \ldots,\end{aligned}$$

A, B, C, ..., B_1, C_1, ... étant des séries qui procèdent suivant les sinus et cosinus de multiples de c.

Supposons que Δ^2 varie surtout en raison du déplacement de la planète perturbatrice, ce qui arrivera nécessairement si l'on a divisé l'orbite en un assez grand nombre de parties; B, C, B_1, C_1 seront très-petits par rapport à A. C'est par exemple ce qui arrive très-nettement pour les perturbations que Jupiter produit dans le mouvement de la comète d'Encke; on a alors

$$\begin{aligned}\Delta^2 = 45,090 &+ 36,163 \cos c - 22,965 \sin c \\ &+ 2,925 \cos c \sin\omega + 4,964 \cos c \sin\omega.\end{aligned}$$

Dans ces conditions, la méthode de M. Gyldén pourra s'appliquer. La série A aura la forme

$$\begin{aligned}\lambda &+ \lambda_1 \sin c + \lambda_2 \sin 2c + \ldots \\ &+ \mu_1 \cos c + \mu_2 \cos 2c + \ldots,\end{aligned}$$

et les termes successifs étant d'ordres de plus en plus élevés par rapport à l'excentricité de la planète perturbatrice, les coefficients λ, λ_1, μ_1 sont beaucoup plus grands que les autres. Le polynôme

$$\lambda + \lambda_1 \sin c + \mu_1 \cos c$$

peut s'écrire

$$M[1 + f\cos(c + F)].$$



On aura alors

$$\Delta^2 = M[1 + f\cos(c + F)](1 + R),$$

R étant très-petit, et la plus grande difficulté de la formation des puissances négatives de Δ résidera dans celle des puissances négatives de

$$1 + f\cos(c + F);$$

cette difficulté sera très-grande si l'astre troublé peut s'approcher beaucoup de la planète perturbatrice; car f est alors très-voisin de l'unité.

M. Gyldén écrit

$$1 + f\cos(c + F) = (1 + f)\left(1 - \frac{2f}{1+f}\sin^2\frac{c+F}{2}\right),$$

et pose

$$\frac{c+F}{2} = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\omega \quad \left(\operatorname{mod.}\sqrt{\frac{2f}{1+f}}\right).$$

Alors

$$1 + f\cos(c + F) = (1 + f)\Delta^2\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\omega,$$

et les puissances de ce facteur se développeront en séries de sinus et de cosinus de multiples de ω par les formules très-convergentes de la théorie des fonctions elliptiques.

Dans son premier Mémoire, M. Gyldén avait formé Δ^2 pour les perturbations de la comète d'Encke par Jupiter; d'après le résultat écrit plus haut, la méthode est merveilleusement appliquée à ce cas.

M. Baillaud a formé Δ^2 pour les perturbations de la même comète par la Terre; il trouve qu'il faut diviser l'orbite à ses quatre sommets et établir un point de division entre chaque sommet du petit axe et le périhélie pour obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\Delta^2 = 1{,}623 &- 1{,}168\sin c + 0{,}850\cos c \\ &+ 0{,}216\cos\omega - 0{,}243\sin c\cos\omega + 0{,}387\cos c\cos\omega.\end{aligned}$$

Il est visible que la méthode s'appliquera avantageusement; cependant il s'en faut de beaucoup que la simplification soit aussi grande que pour les perturbations produites par Jupiter.

ELLIOT. — Détermination du nombre des intégrales abéliennes de première espèce (¹).

Dans un travail présenté comme thèse l'année dernière à la Faculté des Sciences de Paris, M. Elliot s'est proposé de déterminer le nombre des intégrales abéliennes de première espèce dans le cas général où la courbe algébrique correspondante possède des singularités d'une nature quelconque.

La méthode employée par l'auteur repose essentiellement sur l'étude des fonctions algébriques faite par M. Puiseux dans un Mémoire bien connu et dont il est utile de rappeler le principe.

Soit

$$(1) \qquad F(x, y) = \Sigma A y^{\alpha} x^{\beta} = 0$$

l'équation de la courbe de degré m, quand on a pris pour origine un point singulier. En regardant α comme une abscisse et β comme une ordonnée, on fait correspondre un point à un terme de l'équation. Les valeurs approchées des racines infiniment petites y_1, ou, si l'on veut, les premiers termes de leurs développements en série s'obtiennent en cherchant les termes de degré le moins élevé de l'équation (1), quand on regarde x comme du premier ordre et y comme un infiniment petit d'un ordre convenable μ. En désignant par D le degré d'un terme, l'équation

$$\mu\alpha + \beta = D$$

montre que les termes de même degré sont figurés par des points en ligne droite; l'ordonnée à l'origine de la droite indique le degré du terme, et son coefficient angulaire, changé de signe, le degré de y en x.

Les racines infiniment petites de l'équation (1) répondent alors aux côtés d'un polygone G qui caractérise le point singulier.

Il est clair qu'il existe, pour la dérivée $F'_y(x, y)$, un polygone analogue G′, et, d'après la définition même, ses sommets se déduiront de ceux de G en reculant ceux-ci d'une unité vers les α négatifs, en sorte que les côtés des deux polygones seront parallèles.

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2ᵉ Série, t. V; 1876.

Considérons maintenant l'intégrale

$$(2) \qquad \int \frac{N(x,y)\,dx}{F'_y(x,y)}.$$

Le problème consiste à déterminer les conditions que doit remplir le polynôme arbitraire $N(x,y)$, de degré $m-3$, pour que l'intégrale (2) reste finie, quel que soit x, c'est-à-dire, en ne considérant d'abord que les valeurs infiniment petites de y, pour que le coefficient de dx ait un degré supérieur à -1.

Imaginons que l'on construise, par la règle indiquée, le réseau des points répondant à la fonction $N(x,y)$, et considérons un polygone G'' déduit de G' en abaissant ses sommets d'une unité vers les β négatifs. Si l'on égale à zéro les coefficients des termes de N qui correspondent à des points situés au-dessous de la ligne polygonale G'' ou sur ses côtés, il résulte de ce qui a été dit plus haut que le degré du coefficient différentiel sera supérieur à -1. L'auteur démontre que ces conditions sont nécessaires. Leur nombre s'évalue en fonction des coordonnées des sommets du polygone G et d'autres constantes qui dépendent très-simplement de ces coordonnées.

Quand plusieurs racines y offrent dans leur développement en série le même premier terme, il est nécessaire de continuer l'application de la méthode par la considération de nouveaux polygones.

Le nombre total des conditions d'où l'on déduit celui des intégrales de première espèce s'obtient en répétant pour tous les points critiques ce que l'on a dit de l'un d'eux. L'auteur arrive à la conclusion que le nombre de ces intégrales est moitié de celui des périodes. L'évaluation du dernier nombre a été donnée dans le cas général par MM. Briot et Bouquet dans leur *Théorie des fonctions elliptiques*.

Comme application de sa méthode, l'auteur examine les courbes d'*espèces* zéro et 1 avec des points multiples quelconques. Dans le premier cas, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, qui est unicursale, s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre variable. Dans le second, les coordonnées s'expriment en fonction du paramètre par des formules ne contenant comme irrationnelle qu'un radical carré portant sur une expression, au plus, du quatrième degré.

Une autre application consiste à chercher l'*espèce* de la courbe $y=f(x)$, répondant à une équation différentielle

$$\frac{du}{dz}=f(u),$$

dont l'intégrale est monodrome. L'auteur vérifie, sur plusieurs exemples d'équations, considérées par MM. Briot et Bouquet, que l'espèce est zéro ou 1, selon que l'intégrale s'exprime par des fonctions élémentaires ou par les fonctions elliptiques.

La considération du cas où la courbe est du troisième ou du quatrième degré termine le travail.

MOUCHOT (A.). — La réforme cartésienne étendue aux diverses branches des Mathématiques pures. — Paris, Gauthier-Villars, 1876; 1 vol. gr. in-8°, VII-179 p.

Cet Ouvrage, comme l'auteur nous l'apprend dans sa Préface, est le développement d'un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 17 juin 1865. Il a surtout pour objet, par une nouvelle interprétation des symboles imaginaires, « de compléter le système de coordonnées de Descartes » et « de fournir à la Géométrie supérieure les figures qui lui manquent ».

Affirmer que M. Mouchot y soit complétement parvenu, ou même qu'il soit possible à personne d'y parvenir complétement, serait peut-être téméraire; mais le Livre dont nous parlons n'en restera pas moins une œuvre consciencieuse, intéressante à beaucoup de points de vue, et digne d'être consultée par toutes les personnes qui éprouvent quelque attrait pour cette branche des Mathématiques.

L'Ouvrage se divise en quatre Parties. La première, intitulée : *Travaux de Descartes*, est consacrée à l'examen de la méthode de ce grand géomètre. Après un aperçu historique et critique renfermant des citations nombreuses, et insistant beaucoup sur la résolution graphique des équations, l'auteur arrive à l'introduction des expressions imaginaires, auxquelles la réforme cartésienne ne saurait s'appliquer d'une façon satisfaisante. Il termine, enfin, par



quelques considérations rapides sur les travaux de Riccati, de Lambert, de Carnot et de M. Marie, suivies de l'exposé de la conception nouvelle qu'il propose d'introduire.

« Cette conception », dit-il, « consiste à regarder tout point géométrique comme étant formé de deux points ordinaires que j'appelle ses *composantes*. Un point géométrique est réel tant que ses composantes coïncident; mais, dès qu'elles se séparent, il devient imaginaire, en sorte qu'un point imaginaire existe au même titre qu'un point réel, et ne peut se confondre avec lui. » Il appelle points imaginaires *conjugués* deux points tels que la première composante de l'un soit la seconde de l'autre et réciproquement.

La deuxième Partie, *Définitions d'Arithmétique et d'Algèbre*, contient, sur les opérations ordinaires, sur les grandeurs, sur les relations entre l'Algèbre et la Géométrie, des considérations générales un peu compliquées, un peu confuses peut-être, d'autant plus qu'on y trouve déjà mêlées, à l'occasion, des notions résultant de la définition du point imaginaire que nous venons de reproduire. Le moindre défaut que nous soyons en droit de relever ici, c'est un certain manque de clarté, et une véritable discordance entre le texte et le titre. Ainsi, par exemple, on trouve à la fin une page consacrée à la notion des quantités complexes, et dans laquelle l'auteur prétend établir que ces quantités se rattachent à sa propre conception des droites de modes contraires. Est-ce là un sujet qui rentre dans des « définitions d'Arithmétique et d'Algèbre » ?

Dans la troisième Partie, intitulée : *Corrélation des figures*, on trouve tout d'abord une définition de la corrélation, qui a le tort de manquer de précision d'une façon complète; puis des aperçus sur les travaux géométriques de Leibnitz, de Monge, de Carnot, de Poncelet et de MM. Chasles et Marie. Revenant à la doctrine des quantités complexes, M. Mouchot appuie sur ce fait, qu'elle ne peut servir à compléter, ni la Géométrie supérieure, ni le système de coordonnées de Descartes, tandis que sa propre méthode satisfait à toutes ces exigences, et se prête aux mêmes applications que les quantités complexes.

La quatrième Partie : *Application*, se subdivise en deux Chapitres : *Applications géométriques* et *Applications algébriques*. Sans vouloir pénétrer dans le détail, nous indiquerons seulement,

parmi les applications dont il s'agit, les propriétés métriques des triangles, la circonférence, l'hyperbole équilatère, les foyers, la résolution graphique des équations du second et du troisième degré, l'interprétation géométrique des équations à deux et à trois variables, la distance de deux points, les formules de la Trigonométrie plane, les logarithmes.

Tel est le plan général de l'Ouvrage de M. Mouchot. Après l'avoir lu et relu, nous persistons à penser qu'il y aurait eu grand avantage à lui donner une étendue plus restreinte, à exposer immédiatement la notion qu'il a imaginée, et à la faire suivre, sans plus tarder, d'un petit nombre d'applications bien choisies, et permettant surtout de faire ressortir des résultats nouveaux, des avantages palpables, qui échappent complétement au lecteur, dans l'Ouvrage actuel. Pour avoir voulu trop embrasser et introduire une réforme générale, l'auteur, à notre avis, a manqué son but.

L'interprétation de M. Mouchot paraît ingénieuse, et je suis loin de prétendre qu'elle ne puisse pas conduire à des résultats intéressants. Mais en même temps elle est artificielle, comme celle de M. Marie, avec laquelle elle présente une analogie qui n'a pas échappé à l'auteur, comme toutes les interprétations nouvelles qu'on proposerait encore d'introduire. En somme, le but principal, le but unique, pourrais-je dire, que poursuit M. Mouchot, c'est la représentation du lieu représenté par l'équation $f(x,y) = 0$ lorsque x et y peuvent prendre des valeurs imaginaires (ou mixtes, pour employer la désignation de l'auteur). Or, comme il le dit luimême, p. 151 : « Dans la construction d'un lieu, les valeurs de l'abscisse sont complétement arbitraires tant qu'elles sont réelles, mais il est indispensable de les assujettir à certaines conditions lorsqu'elles sont mixtes. »

Et cette restriction résulte de la nature même des choses. Ainsi que le fait remarquer encore M. Mouchot, « si les valeurs d'une variable indépendante sont parfaitement arbitraires tant qu'elles sont réelles, il ne saurait en être de même, en coordonnées rectilignes, quand ces valeurs sont mixtes. » En d'autres termes, si l'on veut que l'équation $f(x, y) = 0$ représente alors quelque chose, il faut que la variable indépendante ne soit plus indépendante. C'est ce qui tend à détruire en grande partie l'analogie avec la conception de Descartes, et à nous faire croire que toutes les

tentatives auxquelles on peut se livrer pour étendre aux coordonnées cartésiennes la notion des expressions imaginaires sont fatalement obligées de présenter un caractère conventionnel, artificiel, qu'on ne saurait éviter.

La notion des quantités complexes, au contraire, à laquelle M. Mouchot rend justice, tout en refusant de l'accepter, et qu'il regarde comme insuffisante, est en elle-même simple, naturelle, expressive, et se prête admirablement à toutes les opérations du calcul. Seulement, il ne faut pas lui demander ce qu'elle ne saurait donner, non plus qu'aucune autre conception. Dans la relation $f(x,y) = 0$, il n'y a pas lieu de chercher autre chose que l'expression d'un certain *mode de transformation* entre deux courbes, dont on pourrait sans doute tirer des conséquences intéressantes, en dehors de celles qui sont acquises déjà. Il ne semble pas, d'ailleurs, que les *droites mixtes,* proposées par l'auteur, puissent suppléer avec avantage, ainsi qu'il le prétend, cette conception si féconde des quantités complexes. Cette erreur tient sans doute à ce que, profondément pénétré de son sujet, il y trouve un caractère de clarté supérieur à celui des quantités complexes, tandis que c'est le contraire qui est vrai pour tout lecteur non prévenu.

Ces réserves faites, il y aurait injustice à ne pas rendre hommage, comme nous l'avons déjà fait, aux recherches consciencieuses d'un savant qui s'est fait une notoriété bien méritée par des travaux, d'un ordre tout différent, relatifs à l'*utilisation industrielle de la chaleur solaire*. M. Mouchot, chercheur infatigable, professeur éminent, esprit original, est un de ces hommes dont l'intelligence ne doit pas s'appliquer en vain à une branche quelconque des connaissances humaines. Nous sommes loin de partager toutes ses doctrines sur les imaginaires, nous croyons qu'il a exagéré singulièrement la portée de sa découverte. Mais, loin de le décourager dans ces travaux, nous serions heureux qu'il reprît sa théorie, en la simplifiant, en la coordonnant, en élaguant les accessoires inutiles, en présentant surtout, par quelques applications judicieuses, une démonstration topique de l'utilité qu'il peut y avoir parfois à l'emploi de cette notion nouvelle.

Nous ne faisons donc nulle difficulté à convenir qu'il peut y avoir là quelque chose de fécond, et à répéter avec M. Mouchot cette maxime si philosophique d'Aristote, par laquelle se termine

son Ouvrage : « *Nombre de choses sont encore ignorées des savants, qui seront familières aux écoliers des temps à venir!* »

A. L.

BERTINI (E.). — SOPRA UNA CLASSE DI TRASFORMAZIONI UNIVOCHE INVOLUTORIE (¹).

Dans un Mémoire présenté à l'Institut de France en 1859, et dont l'objet a été succinctement défini dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, t. XLIX, p. 542, M. de Jonquières a étudié un mode de transformation qui n'avait pas été considéré jusqu'alors et qui constitue la première généralisation des transformations quadratiques dont on trouve diverses traces dans le *Traité des propriétés projectives* de Poncelet, et qui avaient été étudiées par Magnus et Steiner.

Les figures qui font l'objet du travail de M. de Jonquières peuvent être définies comme il suit : à un point quelconque de l'une d'elles correspond, en général, un point bien déterminé de l'autre ; et, en outre, quand un point de la première parcourt une droite, le point correspondant de la seconde décrit une courbe algébrique d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n-1$. Les principales propriétés de ces figures ont été exposées dans un Mémoire inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1864).

En 1863 et en 1865, dans deux Mémoires présentés à l'Institut de Bologne, M. Cremona, étendant la conception de M. de Jonquières, a établi la théorie la plus générale des transformations géométriques planes (²).

En 1861, M. Chasles avait ouvert une autre voie aux investigations des géomètres en étudiant (*Comptes rendus*, t. LIII) la correspondance qui existe entre les points d'une courbe gauche tracée sur un hyperboloïde et les points de certaines courbes planes.

Depuis, bien des travaux ont été publiés sur les mêmes sujets ; nous nous proposons aujourd'hui d'analyser un beau Mémoire de

---

(¹) *Sur une classe de transformations uniponctuelles et involutives.* (*Annali di Matematica*, t. VIII, 1877, p. 11-23 et 147.)

(²) Voir *Bulletin*, t. V, p. 206-240.



M. Bertini, professeur à l'Université de Pise, sur une classe de transformations uniponctuelles et involutives. On obtient cette transformation en faisant correspondre aux droites d'un plan des courbes d'ordre n, ayant en commun un point $(n-1)$-uple et $2(n-1)$ points simples, et en supposant que deux points correspondants se correspondent doublement. On voit qu'il s'agit d'un cas particulier des transformations de M. de Jonquières.

Désignons par O le point $(n-1)$-uple et par $s_1, s_2, \ldots, s_{2(n-1)}$ les $2(n-1)$ points simples fondamentaux.

Il est clair que, dans ce cas, le système des points fondamentaux et des courbes fondamentales de deux figures correspondantes leur est commun, et qu'à un rayon issu du point O correspond un autre rayon issu de O; ces rayons forment des faisceaux en involution. Il y a donc deux cas à considérer : celui où tout rayon d'un des faisceaux se confond avec son correspondant, et celui où cette coïncidence n'existe pas.

Premier cas. — Chaque rayon porte une involution de points, qui a deux points doubles. Nous écarterons d'abord le cas tout particulier où un de ces points doubles tombe toujours en O. Ces points doubles engendrent une courbe Γ (¹) du même ordre n que la transformation et ayant un point $(n-2)$-uple en O. Une droite quelconque l coupe, en effet, la courbe du réseau qui lui correspond en n points, et le point qui correspond à un quelconque M de ces points doit se trouver, en même temps, sur l et sur OM; il est donc le point M lui-même, et l coupe Γ en n points. A tout point M du plan correspond un autre point M′, conjugué harmonique de M par rapport aux deux points d'intersection de OM avec Γ et autres que O, et puisque tous les points de la droite fondamentale Os_1 correspondent au point fondamental s_1, il faut que les deux points d'intersection de Os avec Γ soient réunis en s_1. Donc tous les points fondamentaux s sont des points doubles de Γ ou des points de contact des tangentes à Γ issues de O; en d'autres termes, tous les points s sont sur la première polaire de O, par rapport à Γ.

Cette première polaire, d'ordre $n-1$, est entièrement détermi-

(¹) Plus loin, la courbe Γ sera nommée *ponctuelle double*.

née par le point $(n-2)$-uple O et par les $2n-2$ points simples s; elle se confond donc avec la courbe fondamentale Φ^{n-1} qui correspond au point O; car cette courbe fondamentale d'ordre $n-1$ est aussi entièrement déterminée par le point $(n-2)$-uple O et par les $2n-2$ points simples s. Nous pourrons donc énoncer ce théorème : *La courbe fondamentale Φ^{n-1} est la première polaire de* O *par rapport à* Γ, *et les $n-2$ branches de Φ^{n-1} qui passent par* O*y sont tangentes aux $n-2$ branches de* Γ.

Il résulte de ce théorème que *tous les points fondamentaux s se trouvent au nombre des points d'intersection de* Γ *et de* Φ^{n-1} *autres que* O; et comme ces points fondamentaux sont précisément au nombre de $2n-2$, il est vrai que réciproquement *tout point d'intersection de* Γ *et de* Φ^{n-1}, *autre que* O, *est un point fondamental* s.

Donc, *si* Γ *a un point double au point* s, deux points fondamentaux s sont réunis en ce point, ou autrement, *tout point double de* Γ *absorbe deux points* s; et ces deux points s se trouvant infiniment voisins sur Φ^{n-1}, *la courbe fondamentale* Φ^{n-1}, *et, par suite, toutes les courbes du réseau, sont tangentes à la conjuguée harmonique de* Os *par rapport aux deux tangentes en* s *à* Γ.

Il est bien aisé de voir que le cas considéré est possible. Supposons que Γ soit du genre p; la définition du genre et la formule $2p-2=n(n-3)-2(d+r)$ que l'on déduit des formules de Plücker (d représente le nombre des points doubles, r celui des points de rebroussement) établissent que, dans ce cas, Γ a $n-p-2$ points doubles $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-p-2}$, et $2p+2$ tangentes, issues de O et ayant leurs points de contact en $c_1, c_2, \ldots, c_{2p+2}$. Si $p=n-2$, il n'y a pas de points d, et l'on peut tirer tous les cas où $p<n-2$ de celui-là, en supposant que les points c se rapprochent infiniment deux à deux.

Transformons quadratiquement le plan P des deux figures considérées en un plan Π, le triangle fondamental, dans P, étant O$d_1 d_2$ et d_1, d_2 représentant deux quelconques des points d. Déterminons l'ordre de la transformation du plan Π. D'après le théorème de M. de Jonquières (*Nouvelles Annales*, 1864, p. 107, art. 13), à une droite R du plan Π correspond dans P une conique C^2 circonscrite au triangle fondamental O$d_1 d_2$; à C^2 correspond une courbe d'ordre $2n$, et cette courbe C^{2n} se décompose dans la courbe

Φ^{n-1}, la droite Od_1, la droite Od_2 et une courbe C^{n-1}. D'après ce même théorème, C^{2n} a en O un point $2(n-1)$-uple, et en chacun des points fondamentaux un point double. Or, le point $2(n-1)$-uple O se décompose : Φ^{n-1} y passe $n-2$ fois, od_1 une fois, od_2 une fois, C^{n-1} y passe donc $2(n-1)-(n-2)-1-1=n-2$ fois; le point double de C^{2n} en d se décompose aussi; car Φ^{n-1} passe par les deux points fondamentaux réunis en d_1, Od_1 passe par l'un d'eux, donc C^{n-1} ne passe que par l'autre seul et n'est point tangente en ce point aux courbes du réseau; même raisonnement pour d_2; les points doubles des points d_3, d_4, ..., d_{n-p-2} se décomposent aussi, car Φ^{n-1} passe en chacun des points réunis en d_3, par exemple; donc C^{n-1} passe aussi, une fois, par chacun de ces points et, par suite, C^{n-1} passe par d_3, ..., d_{n-p-2}, et y est tangente aux courbes du réseau. Les points doubles c_1, c_2, ..., c_{2p+2} sont des points simples pour C^{n-1}, parce que Φ^{n-1} y passe une fois ([1]).

Ainsi la courbe C^{n-1} a, en O, un point $(n-2)$-uple; en chacun des deux points d_1, d_2 un point simple, et elle n'y est pas tangente aux courbes du réseau; aux points d_3, d_4, ..., d_{n-p-2} des points simples, et elle y est tangente aux courbes du réseau; et enfin en c_1, c_2, ..., c_{2p+2} des points simples.

Si nous transformons maintenant quadratiquement la courbe C^{n-1}, le triangle fondamental étant encore Od_1d_2, nous obtenons une courbe $C^{2(n-1)}$, qui se décompose comme il suit : $(n-2)$ fois la droite d_1d_2, la droite Od_1, la droite Od_2 et une courbe $C^{(n-2)}$. $C^{2(n-1)}$ a, en O, un point $(n-1)$-uple qui se décompose aussi de la manière suivante : un point $(n-3)$-uple de C^{n-2} et les points des droites Od_1, Od_2; $C^{2(n-1)}$ a, en d, un point $(n-1)$-uple; comme d_1d_2 y passe $n-2$ fois et od_1 une fois, C^{n-2} n'y passe plus. De même C^{n-2} ne passe pas plus en d_2. En outre, C^{n-2} passe par les $2p+2$ points qui correspondent à c_1, c_2, ..., c_{2p+2} et par les points qui correspondent aux couples de points infiniment voisins d_3, d_4, ..., d_{n-p-2} (C^{n-2} étant unicursale comme C^{n-1}, deux points infiniment voisins de l'une ont pour correspondants deux points infiniment voisins de l'autre).

En résumé, la courbe C^{n-2} du plan Π est de l'ordre $n-2$, elle

(1) Hirst, *Annali di Matematica*, 1865.

a un point $(n-3)$-uple, elle passe par les $2p+2$ points simples qui correspondent aux points c et par les $n-p-4$ points correspondants à $d_3, d_4, \ldots, d_{n-p-2}$, dont chacun représente deux points fondamentaux successifs. La transformation dans le plan Π est donc de l'ordre $n-2$; la courbe Γ est transformée en une courbe (aussi ponctuelle double et de genre p) de l'ordre $n-2$ qui passe par les $2p+2$ points ci-dessus et a des points doubles aux $n-p-4$ autres.

Appliquons au plan Π la même transformation, puis continuons ainsi tant que la courbe ponctuelle double aura des points doubles, et enfin, s'il ne reste qu'un seul point double de cette courbe, prenons pour points fondamentaux, O, un point fondamental simple et le dernier point fondamental double, et nous arriverons à la fin *à une transformation involutive de l'ordre $p+2$ avec $2p+2$ points fondamentaux tous simples et distincts, et une courbe ponctuelle double d'ordre $p+2$, du genre p avec un seul point p^{ple} confondu avec le point $(p+1)$-uple de la transformation. De cette transformation involutive on peut donc déduire, au moyen de transformations quadratiques successives, toutes les transformations involutives de M. de Jonquières possibles qui admettent pour courbe ponctuelle double une courbe Γ du genre p.*

Ainsi, pour $p=0$, toutes les transformations involutives découlent de l'*inversion quadrique* (¹); pour $p=1$, elles naissent de la transformation involutive du troisième ordre que l'on obtient en prenant pour point fondamental double un point quelconque d'une courbe générale du troisième ordre, et pour points fondamentaux simples les quatre autres points d'intersection de cette courbe avec la première polaire de O, etc.

Nous avons démontré entièrement le premier théorème de M. Bertini, afin d'indiquer la marche à suivre dans ces recherches; mais, afin de ne pas abuser de l'hospitalité du *Bulletin*, nous ne ferons qu'énoncer les autres résultats auxquels l'auteur est parvenu.

Pour $p=0$ on peut dire aussi que *les transformations involutives découlent de l'homologie involutive ou harmonique* (²).

(¹) Cette exposition diffère, en quelques points, de celle de M. Bertini. Ed. Dw.

(²) Cremona, *Géométrie projective*, p. 250. — Paris, Gauthier-Villars.

Si Γ a un point $(n-1)$-uple en O, $n-1$ points fondamentaux simples de la transformation sont infiniment voisins de O sur les tangentes en ce point à Γ; les autres $(n-1)$ points fondamentaux simples ne peuvent exister sur Γ. Dans ce cas, *on peut arriver à l'inversion quadrique, le pôle étant sur la conique, et de celle-ci à l'homologie harmonique.*

Second cas. — Il existe deux rayons doubles OM et ON. Ce cas se subdivise en trois autres :

(*a*) Ces deux rayons doubles sont des ponctuelles doubles.

L'ordre n de la transformation doit être pair. Pour transformer quadratiquement le plan P, il faut placer l'un des sommets du triangle fondamental en O, le second en un point de l'une des droites ponctuelles doubles et le troisième en un point fondamental simple, et l'on tombe sur le cas (*c*) ci-après; puis, en répétant le même procédé, on tombe sur le cas (*b*).

(*b*) Aucun des rayons doubles n'est ponctuelle double.

Il y a alors quatre points doubles; le point O *absorbe les* $n-2$ *autres.* — *L'ordre n de la transformation doit être pair, car, dans toute transformation involutive d'ordre impair, il existe nécessairement une courbe ponctuelle double.*

(*c*) Un des rayons doubles est une ponctuelle double.

Alors l'autre rayon a deux points doubles, *n doit être impair et, quand n est impair, une droite et la courbe correspondante se coupent, en général, simplement sur la droite ponctuelle double.*

Les propriétés du cas particulier (*c*) découlent aussi des considérations suivantes qui ramènent le cas (*c*) au cas (*b*).

Transformons le plan dans lequel on a le cas (*c*) quadratiquement, en plaçant un des sommets du triangle fondamental en O, le second en un point M de la droite ponctuelle double et le troisième en un point fondamental simple *s*. En nous appuyant sur le théorème précité de M. de Jonquières, nous verrons que l'ordre de la transformation diminue d'une unité et devient pair.

Il ne reste donc plus qu'à traiter le cas (*b*), auquel les deux autres sont ramenés.

Si $n=2$, *le cas* (*b*) *est la transformation involutive ordinaire que l'on obtient en se donnant un faisceau de coniques et en fai-*

sant correspondre à chaque point son conjugué par rapport à ce faisceau (¹).

Cette transformation conduit à l'homologie harmonique par une transformation quadratique faite au moyen d'un réseau de coniques passant par deux des trois points O, s_3, s'_2 et par un des points u (les quatre points u sont les quatre points doubles, O, s_3 et s'_2 les trois points fondamentaux). L'axe d'homologie est alors la droite qui correspond quadratiquement à ce point double, et le centre d'homologie est le point correspondant quadratiquement à celui des points u qui est extérieur au triangle fondamental employé.

Si les points u situés sur l'un des deux rayons doubles se confondent, les conclusions ci-dessus ne changent pas.

Il reste à supposer que n est un nombre pair quelconque. Soient encore u', u''; u'_1, u''_1 les points doubles et $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{n-1}$ les points fondamentaux simples, s_1 correspondant à la droite Os'_1, etc. Transformons quadratiquement notre plan P en un plan Π, en mettant, dans ce plan, un des sommets du triangle fondamental en O et les deux autres en deux points s, ou en deux points s', ou même en un point s et un point s' (à la condition que ces deux derniers ne soient pas homologues). L'ordre de la transformation diminue de 2; les points fondamentaux simples du plan Π sont ceux qui correspondent quadratiquement à s_3, $s_4, \ldots, s_{n-1}, s'_3, s'_4, \ldots, s'_{n-1}$, si s_1 et s_2 (ou s'_1 et s'_2) ont été pris pour points fondamentaux de la transformation quadratique.

En répétant cette opération, on arrive à une transformation du second ordre et de celle-ci à l'homologie harmonique.

Ces conclusions restent vraies quand les points s, s' se rapprochent infiniment de O et aussi quand les points doubles u deviennent respectivement successifs.

Nous avons épuisé ainsi tous les cas qui peuvent se présenter dans les transformations de Jonquières involutives, et l'existence effective de tous ces cas peut se démontrer en faisant, en sens inverse, les transformations quadratiques indiquées. Nous pourrons donc conclure que :

(¹) Cette transformation et l'inversion quadrique sont donc les seules transformations involutives du second ordre.

Toutes les transformations de Jonquières involutives, à l'exception de celles qui admettent une courbe ponctuelle double irrationnelle, peuvent être déduites de l'homologie harmonique au moyen de transformations quadratiques successives (¹).

Il est aussi digne de remarque que :

Toute transformation uniponctuelle involutive d'ordre n, qui a une courbe ponctuelle double d'ordre n, est nécessairement une transformation de Jonquières.

Ed. Dewulf.

DINI (U.). — Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata (²).

L'existence de fonctions continues n'ayant point de dérivées a été implicitement établie par Riemann dans son Mémoire sur les séries trigonométriques. Hankel a donné des exemples de fonctions continues de x admettant une dérivée pour les valeurs incommensurables de x, n'en admettant pas pour les valeurs commensurables. Il est vrai que les démonstrations de Hankel n'étaient pas toujours à l'abri de toute objection. Depuis, M. P. Du Bois-Reymond, prenant pour point de départ certains résultats obtenus par M. Weierstrass, a publié dans le tome 79 du *Journal de Borchardt* un Mémoire sur le sujet. Dans le tome IV (2ᵉ Série) des *Annales de l'École normale supérieure,* M. Darboux a aussi traité la question, et le *Bulletin* a rendu compte de son travail (t. X, p. 76). Quoique publiés postérieurement à ceux de M. Weierstrass, les résultats de M. Darboux n'en ont pas moins été obtenus indépendamment, ainsi qu'en font foi les dates respectives des deux Mémoires et des Communications de ce géomètre à la *Société mathématique.*

M. Dini détermine une classe générale de fonctions n'admettant point de dérivée, classe qui comprend comme cas particuliers les fonctions étudiées par M. Du Bois-Reymond. Cette classe de fonctions est déterminée par le théorème suivant :

(¹) *Voir* le théorème de Nöther au *Bulletin,* 1873, p. 239. Ed. Dw.

(²) *Annali di Matematica pura ed applicata,* 2ᵉ Série, t. VIII, p. 121-137.

« Lorsque les termes $u_n(x)$ de la série $\Sigma u_n(x)$ sont finis et continus dans l'intervalle (a, b), admettent dans cet intervalle une dérivée finie et déterminée lorsque n est fini, sont tels enfin que la somme de la série soit, toujours dans le même intervalle, une fonction finie et continue $f(x)$ de x, cette fonction finie et continue n'aura pas de dérivée déterminée et finie, tout au plus cette dérivée pourra-t-elle être, en certains points, infinie et déterminée quant au signe, étant d'ailleurs, en d'autres points en nombre infini, infinie et indéterminée quant au signe, pourvu que les conditions suivantes soient remplies :

» 1° Les termes $u_n(x)$, dans l'intervalle (a, b), admettent des maxima et des minima en nombre fini, mais croissant indéfiniment avec n, de façon que, à partir d'une valeur n suffisamment grande, ces maxima et minima se succèdent dans tout l'intervalle (a, b) à des distances moindres que toute quantité donnée.

» 2° Soient δ_m la distance maximum entre un maximum et un minimum consécutifs de $u_m(x)$, et D_m le minimum des diverses oscillations de $u_m(x)$ dans l'intervalle (a, b); la quantité $\frac{\delta_m}{D_m}$ a pour limite zéro, pour $m = \infty$.

» 3° La quantité

$$\frac{4\delta_m}{D_m} \sum_{1}^{m-1} u'_n,$$

où les u'_n sont les maxima des valeurs absolues des dérivées de $u_n(x)$ dans l'intervalle (a, b), ou les limites supérieures de ces valeurs, reste, lorsque m croit indéfiniment, toujours inférieure à l'unité plus une quantité finie, et, en même temps, pour toutes les valeurs de m supérieures à un nombre m' aussi grand qu'on voudra, la différence $u_m(x'+h) - u_m(x')$ a, quel que soit x', le signe de $R_m(x'+h) - R_m(x')$, $R_m(x)$ étant défini par l'égalité

$$R_m(x) = \sum_{m+1}^{\infty} u_n(x),$$

et h étant choisi de façon que $x'+h$ coïncide avec le premier point, à droite ou à gauche de x', qui corresponde à un maximum ou à un minimum de $u_m(x)$, en sorte que l'on ait, en valeur absolue,

$u_m(x'+h) - u_m(x') \geqq \frac{D_m}{2}$; ou, au moins, si cette dernière condition ne se vérifie pas ou se trouve être douteuse, il existe une limite supérieure finie pour les valeurs absolues de $R_m(x'+h) - R_m(x')$, qui correspondent aux diverses valeurs de x' et de h supposé toujours déterminé comme ci-dessus, et, $2R'_m$ étant cette limite supérieure ou un nombre plus grand, la quantité

$$\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n + \frac{4R'_m}{D_m}$$

reste toujours inférieure à l'unité augmentée d'une quantité finie. »

M. Dini s'est occupé du même sujet dans une Note présentée à l'Académie par M. Cremona (séance du 8 avril 1877). De cette sorte, nous extrayons les résultats qui suivent :

Soit $f(x)$ une fonction finie et continue de x dans l'intervalle (a, b); pour tous les points x contenus dans cet intervalle, en excluant b si $b > a$, le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, lorsque h tendra vers zéro par des valeurs positives, finira par tendre vers une limite déterminée, finie ou infinie (dérivée à droite de x) ou bien finira par osciller entre deux nombres $\lambda_x - \varepsilon$ et $\Lambda_x + \varepsilon$, ε étant une quantité positive aussi petite qu'on voudra, λ_x et Λ_x étant des nombres déterminés finis ou infinis qui, s'ils sont finis, sont, pour une infinité de valeurs de h aussi petites qu'on voudra, aussi voisins qu'on voudra du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; l'intervalle $\Lambda_x - \lambda_x$, le champ dans lequel, pour ainsi dire, vient osciller le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand h tend vers zéro par des valeurs positives, est ce que l'auteur appelle l'*oscillation de ce rapport* : deux quantités analogues λ'_x et Λ'_x correspondent au cas où l'on fait tendre h vers zéro par des valeurs négatives. Ainsi, au lieu de la dérivée, il y a lieu de considérer les quatre fonctions λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x, qui évidemment se réduisent à une seule quand la dérivée existe.

Dans le cas où λ_x et Λ_x sont finis, on peut toujours écrire, pour h positif et suffisamment petit,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\lambda_x + \Lambda_x}{2} + \theta_{x,h}\left(\frac{\Lambda_x - \lambda_x}{2} + \varepsilon_{x,h}\right),$$

$\varepsilon_{x,h}$ étant une quantité positive ou nulle, pouvant être rendue plus petite que toute quantité donnée quand on fait décroître h indéfiniment, et $\theta_{x,h}$ étant une quantité qui varie continûment entre -1 et $+1$. J. T.

FERRARIS (G.). — LE PROPRIETÀ CARDINALI DEGLI STRUMENTI DIOTTRICI. — Torino, Hermann Loescher. 1 vol in-8°.

La théorie des lentilles et des instruments d'optique exposée dans les Ouvrages élémentaires suppose toujours que les lentilles sont infiniment minces, en sorte que les formules et les résultats auxquels elle conduit sont éloignés des résultats que donne la pratique. Gauss est le premier qui, dans ses *Dioptrische Untersuchungen* (1840), ait donné une explication complète de l'action des lentilles, en tenant compte de leur épaisseur; mais les calculs de l'illustre mathématicien comportent de nombreuses formules, et leur étude exige des connaissances mathématiques étendues. Depuis, le même sujet a été traité d'après les mêmes méthodes algébriques par Listing (1853), Helmholtz (1856) et Casorati (1872).

Il est évident d'ailleurs que, dans le plus grand nombre des cas, des constructions géométriques, faites de proche en proche, peuvent être substituées au jeu des formules analytiques; aussi la théorie de Gauss a-t-elle été successivement exposée à ce point de vue plus élémentaire par Maxwell (1858), Neumann (1866), Gavarret (1866), Martin (1867), et enfin par Reusch (1870). Ces divers auteurs se sont cependant plutôt attachés au développement de quelques points spéciaux qu'à un exposé absolument général.

Dans le volume que publie aujourd'hui la librairie Loescher, M. Ferraris s'est proposé de donner un exposé tout à fait complet et élémentaire de l'action des lentilles épaisses sur les rayons de lumière; pour cela, il a coordonné avec un soin remarquable les travaux de ses devanciers en modifiant parfois leurs démonstrations, afin de les assujettir à un même mode d'exposition didactique.

Dans un premier Chapitre, M. Ferraris, après avoir exposé les propriétés générales des rayons lumineux homogènes qui traversent

vers le centre un système dioptrique quelconque [1], démontre, par des considérations exclusivement géométriques, l'existence et les relations qui lient les plans conjugués, les plans focaux, les plans principaux et enfin les points nodaux. Les 64 pages consacrées à cette exposition renferment toute la théorie des lentilles simples.

Après ces préliminaires indispensables, le savant professeur examine la marche des rayons de lumière dans les systèmes optiques composés, comme l'œil humain, et les combinaisons de lentilles qui constituent les microscopes, les lunettes ou les télescopes. L'explication des phénomènes est ici plus complète, tout en restant élémentaire, que lorsqu'on fait abstraction de l'épaisseur des lentilles, et les notions relatives au grandissement, à l'anneau oculaire, au champ et à l'éclairement des images se trouvent naturellement introduites. L'étendue du champ elle-même reçoit alors une définition plus rationnelle que celle qui est le plus ordinairement adoptée : pour M. Ferraris le champ est l'angle du cône qui a pour sommet le premier point principal de l'objectif et qui limite les portions de l'objet visibles simultanément et avec une *clarté uniforme* et maximum. Les formules qui permettent de calculer l'étendue du champ d'une lunette renferment donc le diamètre de l'anneau oculaire ou l'ouverture de l'objectif, et permettent, par suite, d'examiner l'influence de la surface de l'objectif sur la clarté absolue de l'image et l'éclat relatif de ses divers points; leur discussion montre que non-seulement cette clarté augmente avec le diamètre de l'objectif, mais elle fait encore connaître le diamètre que devrait avoir cette lentille pour obtenir avec un grossissement donné la clarté maximum que permet l'ouverture de la pupille.

La grandeur à donner aux diaphragmes et aux œilletons est encore fixée par la condition de limiter le champ à la région de l'image où la clarté est constante, et par le jeu des formules précédemment établies par M. Ferraris. Toutes ces questions, qui n'entrent point dans le cadre ordinaire des Traités d'Optique et qui ne sont en général connues que des seuls constructeurs d'instruments, sont traitées avec tous les détails utiles et avec une clarté d'exposition vraiment remarquable.

---

[1] La locution *proprietà cardinali* s'applique aux propriétés des rayons centraux de lumière homogène.

Le volume de M. Ferraris se termine enfin par l'application directe des théories précédentes aux principaux instruments d'optique, le microscope, la lunette astronomique, la lunette terrestre; cette portion de l'Ouvrage renferme, comme la précédente, des paragraphes intéressants pour le physicien ou l'astronome, et où les détails techniques abondent.

Notre conviction est que *Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici* seront consultées avec fruit par tous ceux qui ont le désir de connaître complétement la construction des instruments d'optique. G. R.

GORDAN und NÖTHER. — Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet ([1]).

Hesse a énoncé dans le tome 42 et dans le tome 56 du *Journal de Crelle* le théorème suivant : « Quand le déterminant des dérivées secondes d'une forme algébrique, entière et homogène à n variables, est identiquement nul, cette forme peut, au moyen d'une transformation linéaire, être ramenée à une forme semblable avec $n-1$ variables. On avait déjà remarqué depuis longtemps que les démonstrations données par Hesse étaient insuffisantes. MM. Gordan et Nöther ont repris le sujet, et, après différentes recherches (on peut comparer le travail de Gordan dans les *Erlanger Berichte* du 2 décembre 1875), sont parvenus à la conclusion suivante : *Le théorème de Hesse est vrai pour les formes à* 2, 3, 4 *variables, mais non plus pour celles qui ont cinq variables ou davantage.* La forme

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3,$$

où P_1, P_2, P_3 dépendent seulement de x_4, x_5, est un exemple de forme à cinq variables, dont le hessien est identiquement nul, et à laquelle le théorème de Hesse ne s'applique pas.

([1]) *Mathematische Annalen*, t. X.

GORDAN (P.). — UEBER DEN FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA ([1]).

Il s'agit d'un perfectionnement de la démonstration algébrique donnée par Gauss, de l'existence d'une racine d'une équation entière $f(x) = 0$ à coefficients réels. La démonstration de Gauss est fondée sur l'étude d'une équation dont les racines s'expriment au moyen de la somme et du produit de deux racines de l'équation proposée. M. Gordan étudie la résultante $R(u)$ de $f(x)$ et de $f(x+u)$. Il existe toujours une valeur de u pour laquelle $R(u) = 0$ et pour laquelle $f(x)$ et $f(x+u)$ ont, par conséquent, un facteur commun; $f(x)$ est donc décomposable en facteurs. Si l'on pose $f(x) = g(x)\,h(x)$, il y a lieu de distinguer deux cas, selon que les coefficients de $g(x)$ et de $h(x)$ sont réels ou imaginaires. Dans tous les cas, la résolution de l'équation $f(x) = 0$ est ramenée à la résolution d'une équation de degré moindre. Si $g(x)$ est imaginaire, u est aussi imaginaire, et, de plus, *purement* imaginaire : dès lors $g\left(x + \frac{2}{u}\right)$ a ses coefficients réels.

MÉLANGES.

SUR LES EXPRESSIONS APPROCHÉES, LINÉAIRES PAR RAPPORT A DEUX POLYNOMES;

PAR M. P. TCHEBYCHEF ([2]).

(Traduit du russe.)

§ 1.

Dans une Lettre à M. Braschmann ([3]), nous avons montré de quelle manière, en développant une fonction u en une fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots}}$$

([1]) *Mathematische Annalen*, t. X.

([2]) Lu dans la séance du 8-20 mars 1877 de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg (t. XXX, Supplément, des *Mémoires* de cette Académie).

([3]) *Journal de Mathématiques de Liouville*, 2e Série, t. X.

et déterminant ses fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_1 q_0 + 1}{q_1}, \quad \ldots,$$

on peut trouver les valeurs des polynômes X, Y, pour lesquels l'expression

$$uX - Y$$

diffère le moins possible d'une fonction donnée v. Ainsi que nous l'avons indiqué dans la Lettre que nous venons de citer, et démontré dans le Mémoire intitulé : *Sur le développement d'une fonction en série au moyen des fractions continues* (¹), les polynômes X, Y, qui satisfont à cette condition, sont déterminés par les séries

$$(1) \qquad \begin{cases} X = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \omega_3 Q_3 + \ldots, \\ Y = -Ev + \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 + \omega_3 P_3 + \ldots, \end{cases}$$

où nous désignons par E la partie entière d'une fonction et par

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \ldots$$

des fonctions entières, que l'on obtient au moyen de la valeur de la fonction v et des dénominateurs

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad \ldots,$$
$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad \ldots,$$

fournis par le développement ci-dessus de la fonction u en fraction continue, au moyen de la formule générale

$$\omega_i = (-1)^{i-1} E[q_i(vQ_i - EvQ_i)],$$

que l'on peut écrire, d'une manière plus abrégée,

$$(2) \qquad \omega_i = (-1)^{i-1} E[q_i F(vQ_i)],$$

en représentant par la notation

$$F(vQ_i)$$

(¹) *О разложеніи функцій въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. IX, 1866).

l'ensemble de tous les termes du développement de la fonction $v Q_i$ qui renferment des puissances négatives de la variable.

En arrêtant les séries ci-dessus aux termes correspondants quelconques

$$\omega_m Q_m, \quad \omega_m P_m,$$

on trouve le système des polynômes X, Y, tel que X est d'un degré inférieur à Q_{m+1}, et que la différence entre l'expression $uX - Y$ et la fonction v est du degré le moins élevé compatible avec la supposition que X est un polynôme de degré moindre que Q_{m+1}. En outre, le degré du polynôme X est déterminé par le degré du terme

$$\omega_m Q_m,$$

le dernier des termes conservés dans le développement de X, et le degré de la différence

$$uX - Y - v$$

est déterminé par le degré du premier terme de la série

$$\omega_{m+1}(uQ_{m+1} - P_{m+1}) + \omega_{m+2}(uQ_{m+2} - P_{m+2}) + \ldots,$$

qui ne se réduit pas à zéro (¹). En supposant que le premier de ces termes soit

$$\omega_{m+n}(uQ_{m+n} - P_{m+n}),$$

et désignant par ρ le degré de la fonction

$$\omega_{m+n},$$

on conclura de ce qui vient d'être dit que, en général, le degré d'approximation de l'expression $uX - Y$ par rapport à v est déterminé par le degré du produit

$$x^\rho(uQ_{m+n} - P_{m+n}),$$

et conséquemment par le degré de la fraction

$$\frac{x^\rho}{Q_{m+n+1}},$$

(¹) *Voir* les articles cités plus haut, et notre Mémoire intitulé : *О наибольшихъ*... *Sur les valeurs maxima et minima des sommes formées avec les valeurs d'une fonction entière et de ses dérivées* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XII, 1867).

de même que, d'après les propriétés des fractions convergentes, le degré de la différence

$$uQ_{m+n} - P_{m+n}$$

est égal au degré de la fraction

$$\frac{1}{Q_{m+n+1}}.$$

On voit d'après cela que l'expression

$$uX - Y,$$

X, Y étant des fonctions entières, et X étant d'un degré qui ne surpasse pas celui de $x^\sigma Q_m$, peut représenter la fonction v avec une exactitude poussée jusqu'aux termes du degré de

$$\frac{x^\rho}{Q_{m+n+1}},$$

dans le cas seulement où les équations suivantes sont satisfaites :

$$\omega_{m+1} = 0, \quad \omega_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta\omega_m \overline{\leq} \sigma, \quad \delta\omega_{m+n} \overline{\leq} \rho,$$

où nous désignons, suivant la notation d'Abel, par δ le degré d'une fonction.

Lorsque ces conditions sont remplies, les séries (1), arrêtées aux termes $\omega_m Q_m$, $\omega_m P_m$, donnent, comme on l'a vu, une valeur de X d'un degré au plus égal à celui de $x^\sigma Q_m$, et l'expression $uX - Y$ diffère de v par des termes d'un degré au plus égal à celui de

$$\frac{x^\rho}{Q_{m+n+1}}.$$

D'après cela, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la formule

$$uX - Y$$

puisse représenter la fonction v avec une exactitude poussée jusqu'à x^{-N}, le degré de X ne surpassant pas M, s'écriront ainsi

$$\omega_{m+1} = 0, \quad \omega_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta\omega_m \leqq \sigma, \quad \delta\omega_{m+n} \leqq \rho,$$

en désignant par

$$Q_m, \quad Q_{m+n}$$

les derniers dénominateurs des fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \quad \ldots,$$

dont les degrés ne dépassent pas les limites M et N — 1, et par σ, ρ les degrés des fractions

$$\frac{x^M}{Q_m}, \quad \frac{Q_{m+n+1}}{x^N}.$$

§ 2.

Nous allons maintenant démontrer que ces conditions peuvent être remplacées par celles-ci, qui sont plus simples :

$$(4) \qquad \delta F(\nu Q_{l-1}) \leqq \delta \frac{x^M}{Q_l}, \quad \delta F(\nu Q_l) \leqq \delta \frac{Q_l}{x^N},$$

dans lesquelles

$$Q_{l-1}, \quad Q_l$$

sont les deux derniers termes de la série

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad \ldots,$$

qui, étant multipliés entre eux, donnent un produit de degré moindre que $M + N$.

Pour cela, trouvons d'abord une limite supérieure des degrés

$$\delta F(\nu Q_m), \quad \delta F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad \delta F(\nu Q_{m+n}),$$

dans le cas où les conditions (3) sont satisfaites. Après nous être convaincus, d'après cela, de la nécessité que les conditions (4) soient vérifiées, nous démontrerons que celles-ci, de leur côté, supposent l'existence de chacune des conditions (3).

D'après la liaison qui existe entre les fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \quad \ldots$$

de l'expression

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}},$$

on a

$$Q_{i+1} = Q_i q_i + Q_{i-1},$$

ce qui donne, en multipliant par ν,

$$\nu Q_{i+1} = \nu Q_i q_i + \nu Q_{i-1}.$$

En passant de l'égalité des fonctions à l'égalité de leurs parties fractionnaires, on trouve, d'après notre notation,

(5) $$F(\nu Q_{i+1}) = F(\nu Q_i q_i) + F(\nu Q_{i-1}).$$

En décomposant maintenant les fonctions

$$\nu Q_i, \quad \nu Q_i q_i$$

en une partie entière et une partie fractionnaire, il vient

$$\nu Q_i = E(\nu Q_i) \quad + F(\nu Q_i),$$
$$\nu Q_i q_i = E(\nu Q_i q_i) + F(\nu Q_i q_i),$$

ce qui donne, par l'élimination de Q_i,

$$F(\nu Q_i q_i) = q_i F(\nu Q_i) + q_i E(\nu Q_i) - E(\nu Q_i q_i).$$

Portant cette valeur de

$$F(\nu Q_i q_i)$$

dans l'égalité (5), et désignant, pour abréger, par U_i la fonction entière

$$E(\nu Q_i q_i) - q_i E(\nu Q_i),$$

on obtient l'égalité

$$q_i F(\nu Q_i) = F(\nu Q_{i+1}) - F(\nu Q_{i-1}) + U_i.$$

Si nous remarquons que les fonctions

$$F(\nu Q_{i+1}), \quad F(\nu Q_{i-1})$$

ne contiennent que des termes avec des puissances négatives de la variable, on en conclut

$$E[q_i F(\nu Q_i)] = U_i,$$

ce qui, d'après la formule (2),

$$\omega_i = (-1)^{i-1} E[q_i F(\nu Q_i)],$$

nous donne

$$U_i = (-1)^{i-1} \omega_i,$$

et, en conséquence, l'expression trouvée plus haut de la fonction $q_i F(\nu Q_i)$ est fournie par l'égalité

$$q_i F(\nu Q_i) = F(\nu Q_{i+1}) - F(\nu Q_{i-1}) + (-1)^{i-1} \omega_i,$$

qui nous servira à obtenir la limite supérieure des degrés des fonctions

$$F(\nu Q_m), \quad F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad F(\nu Q_{m+n}),$$

dans le cas où l'on a

$$\omega_{m+1} = 0, \quad \omega_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta\omega_m \leqq \sigma, \quad \delta\omega_{m+n} \leqq \rho.$$

Comme, dans ce cas, pour toutes les valeurs de i, depuis $i = m+1$ jusqu'à $i = m+n-1$ inclusivement, la fonction ω_i se réduit à zéro, il s'ensuit que, pour toutes ces valeurs, l'égalité que nous venons de trouver se réduira à la suivante :

$$(6) \qquad q_i F(\nu Q_i) = F(\nu Q_{i+1}) - F(\nu Q_{i-1}).$$

En remarquant que la fonction q_i est d'un degré non inférieur au premier, on conclura de cette égalité que, dans la suite

$$F(\nu Q_m), \quad F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad F(\nu Q_{m+n}),$$

parmi trois termes consécutifs

$$F(\nu Q_{i+1}), \quad F(\nu Q_i), \quad F(\nu Q_{i-1}),$$

la fonction du milieu

$$F(\nu Q_i)$$

devra dans tous les cas être d'un degré moindre que celui d'une des fonctions extrêmes

$$F(\nu Q_{i+1}), \quad F(\nu Q_{i-1}).$$

ar là que, dans la suite

$$\delta F(\nu Q_m),\quad \delta F(\nu Q_{m+1}),\quad \ldots,\quad \delta F(\nu Q_{m+n}),$$

n des termes intermédiaires ne peut présenter un maximum, iite il ne peut y avoir qu'un minimum.

posant que

$$\delta F(\nu Q_\lambda)$$

emier terme de la suite

$$\delta F(\nu Q_m),\quad \delta F(\nu Q_{m+1}),\quad \ldots,\quad \delta F(\nu Q_{m+n}),$$

ie une valeur minimum, nous remarquerons que, pour leurs de i, depuis $i = m + 1$ jusqu'à $i = \lambda - 1$, la

$$F(\nu Q_{i-1})$$

degré plus élevé que

$$F(\nu Q_{i+1}),$$

et par suite, d'après l'égalité (6), son degré déterminera le degré de l'expression

$$q_i F(\nu Q_i).$$

On tire de là, pour les i grandeurs considérées, l'égalité

$$\delta F(\nu Q_i) = \delta \frac{F(\nu Q_{i-1})}{q_i}.$$

En y faisant

$$i = m + 1,\quad m + 2,\quad \ldots,\quad \lambda - 1,$$

on obtiendra une suite d'équations qui serviront à passer successivement de la fonction

$$F(\nu Q_m)$$

aux fonctions

$$F(\nu Q_{m+1}),\quad F(\nu Q_{m+2}),\quad \ldots,\quad F(\nu Q_{\lambda-1}).$$

Ces équations nous donnent

$$\delta F(\nu Q_{m+1}) = \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1}},$$

$$\delta F(\nu Q_{m+2}) = \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1}\, q_{m+2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\delta F(\nu Q_{\lambda-1}) = \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1}\, q_{m+2} \ldots q_{\lambda-1}}.$$

En passant aux termes de la suite

$$(7) \quad \delta F(\nu Q_m), \quad \delta F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad \delta F(\nu Q_\lambda), \quad \ldots, \quad \delta F(\nu Q_{m+n}),$$

qui suivent le premier terme mentionné

$$\delta F(\nu Q_\lambda),$$

nous remarquerons qu'aucun de ces termes ne peut être moindre que le terme en question, et par suite nous aurons ou

$$\delta F(\nu Q_{\lambda+1}) = \delta F(\nu Q_\lambda), \quad \text{ou} \quad \delta F(\nu Q_{\lambda+1}) > \delta F(\nu Q_\lambda),$$

selon que le terme en question devra, ou non, être suivi d'un terme qui lui soit égal.

Pour ce qui est du troisième terme

$$\delta F(\nu Q_{\lambda+2}),$$

il ne peut avoir la même valeur que le terme en question ; autrement il se trouverait, dans la suite

$$F(\nu Q_m), \quad F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad F(\nu Q_{m+n}),$$

trois termes du même degré, ce qui a été démontré impossible par ce qui précède. On voit par là que, après le terme

$$\delta F(\nu Q_{\lambda+1})$$

de la suite (7), les termes doivent aller nécessairement en croissant, et par conséquent, pour toutes les valeurs de i, depuis

$= \lambda + 1$ jusqu'à $i = m + n - 1$, on aura

$$\delta F(\nu Q_{i+1}) > \delta F(\nu Q_{i-1}).$$

'ensuit de là, en vertu de (6), que, pour ces valeurs de i, le degré
terme

$$q_i F(\nu Q_i)$$

déterminé par le degré du terme $F(\nu Q_{i+1})$, ce qui suppose
ş

$$\delta F(\nu Q_i) = \delta \frac{F(\nu Q_{i+1})}{q_i}.$$

y faisant tour à tour

$$i = m + n - 1, \quad m + n - 2, \quad \dots, \quad \lambda + 1,$$

ient une suite d'équations, qui serviront à passer successi-
de la fonction

$$F(\nu Q_{m+n})$$

ctions

$$F(\nu Q_{m+n-1}), \quad F(\nu Q_{m+n-2}), \quad \dots, \quad F(\nu Q_{\lambda+1}).$$

ces équations on tire

$$\delta F(\nu Q_{m+n-1}) = \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1}},$$

$$\delta F(\nu Q_{m+n-2}) = \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\delta F(\nu Q_{\lambda+1}) = \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2} \cdots q_{\lambda+1}}.$$

§ 3.

De cette manière on déterminera, au moyen des deux fonctions extrêmes de la suite

$$F(\nu Q_m), \quad F(\nu Q_{m+1}), \quad \dots, \quad F(\nu Q_{m+n-1}), \quad F(\nu Q_{m+n}),$$

les degrés de toutes les autres, à l'exclusion d'une seule fonction

$$F(\nu Q_\lambda).$$

Pour déterminer le degré de cette fonction, remarquons que la formule (6) donne, pour $i = \lambda$,

$$q_\lambda F(\nu Q_\lambda) = F(\nu Q_{\lambda+1}) - F(\nu Q_{\lambda-1}).$$

Comme, en vertu du paragraphe précédent, les termes

$$F(\nu Q_{\lambda+1}),\quad F(\nu Q_{\lambda-1})$$

sont des mêmes degrés que les expressions

$$\frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1}q_{m+n-2}\cdots q_{\lambda+1}},\quad \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1}q_{m+2}\cdots q_{\lambda-1}},$$

l'une au moins de ces expressions sera d'un degré non inférieur à celui de

$$q_\lambda F(\nu Q_\lambda),$$

et par suite nous aurons

$$\delta F(\nu Q_\lambda) \overline{\overline{<}}\, \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1}q_{m+2}\cdots q_{\lambda-1}q_\lambda},$$

ou

$$\delta F(\nu Q_\lambda) \overline{\overline{<}}\, \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1}q_{m+n-2}\cdots q_{\lambda+1}q_\lambda}.$$

Comme, en vertu du paragraphe précédent, pour

$$i = m+1,\quad m+2,\quad \ldots,\quad \lambda-1,$$
$$i = \lambda+1,\quad \lambda+2,\quad \ldots,\quad m+n-1,$$

on a ou l'égalité

$$\delta F(\nu Q_i) = \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1}q_{m+2}\cdots q_i}$$

ou l'égalité

$$\delta F(\nu Q_i) = \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1}q_{m+n-2}\cdots q_i},$$

et qu'alors il est évident qu'une au moins des conditions

$$\delta F(\nu Q_i) \overline{\overline{>}}\, \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1}q_{m+2}\cdots q_i},$$
$$\delta F(\nu Q_i) \overline{\overline{<}}\, \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1}q_{m+n-2}\cdots q_i},$$

ous avons trouvées ci-dessus pour

$$i = \lambda,$$

atisfaite, nous en conclurons que, pour toutes les valeurs de i $i = m + 1$ jusqu'à $i = m + n - 1$, on aura l'une ou l'autre onditions

$$\delta F(\nu Q_i) \overline{\underset{<}{=}} \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1} q_{m+2} \ldots q_i}$$

$$\delta F(\nu Q_i) \overline{\underset{<}{=}} \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1} q_{m+n-2} \ldots q_i}.$$

e qui est des limi ieures des degrés des fonctions

$$F(\nu Q_m), \quad F(\nu Q_{m+n}),$$

vent être déduites des dernières conditions (3),

$$\delta\omega_m \overline{\underset{<}{=}} \sigma, \quad \delta\omega_{m+n} \overline{\underset{<}{=}} \rho.$$

r cela, nous remarquerons que, d'après la formule (2), qui ie les fonctions

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \ldots,$$

on a

$$\omega_m = (-1)^{m-1} E[q_m F(\nu Q_m)],$$
$$\omega_{m+n} = (-1)^{m+n-1} E[q_{m+n} F(\nu Q_{m+n})];$$

d'où il s'ensuit que les conditions précédemment démontrées, relativement aux degrés des fonctions

$$\omega_m, \quad \omega_{m+n},$$

supposent que les fonctions

$$q_m F(\nu Q_m), \quad q_{m+n} F(\nu Q_{m+n})$$

ne sont pas de degrés supérieurs à

$$\sigma, \quad \rho,$$

et que, par suite,

$$\delta F(\nu Q_m) \leq \delta \frac{x^\sigma}{q_m}, \quad \delta F(\nu Q_{m+n}) \leq \delta \frac{x^\rho}{q_{m+n}}.$$

En conséquence, les limites trouvées plus haut du degré de $F(\nu Q_i)$ se réduisent à celles-ci,

$$\delta F(\nu Q_i) \leqq \delta \frac{x^\sigma}{q_m q_{m+1} \cdots q^i}$$

ou

$$\delta F(\nu Q_i) \leqq \delta \frac{x^\rho}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2} \cdots q_i}.$$

Ces formules sont susceptibles d'une simplification notable.

D'après notre notation, la fraction convergente du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_k + \ddots}}},$$

correspondante au quotient incomplet q_k, est

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}},$$

et par suite le produit des quotients incomplets

$$q_1 q_2 q_3 \cdots q_k$$

sera du même degré que le dénominateur Q_{k+1}.

En vertu de cela, on trouve que les produits

$$q_m q_{m+1} \cdots q_i,$$
$$q_{m+n} q_{m+n-1} \cdots q_i$$

seront de mêmes degrés que les fractions

$$\frac{Q_{i+1}}{Q_m}, \quad \frac{Q_{m+n+i}}{Q_i}.$$

Par conséquent, les égalités que nous avons trouvées plus haut donnent

$$\delta F(\nu Q_i) \leqq \delta \frac{x^\sigma Q_m}{Q_{i+1}},$$

$$\delta F(\nu Q_i) \leqq \delta \frac{x^\rho Q_i}{Q_{m+n+1}}.$$

nme, d'après cette notation (§ 1),

$$x^n Q_m,\quad \frac{x^t}{Q_{m+n+1}}$$

le mêmes degrés que

$$x^M,\quad x^{-N},$$

inégalités conduiront à la suivante :

$$\delta F(\nu Q_i) \leqq \delta \frac{x^M}{\ \ \ \ }, \quad \text{ou} \quad \leqq \delta \frac{Q_i}{x^N}.$$

it par là que la limite supé ieure du degré de chacune des ns

$$F(\nu Q_m),\quad F(\nu Q_{m+1}),\quad \ldots,\quad F(\nu Q_{m+n})$$

erminée par la plus grande des deux quantités

$$\delta \frac{x^M}{Q_{i+1}},\quad \delta \frac{Q_i}{x^N},$$

· la valeur correspondante de i.

posant que, dans la suite

$$Q_1,\quad Q_2,\quad Q_3,\quad \ldots,$$

les deux dernières fonctions qui, étant multipliées l'une par l'autre, donnent un produit d'un degré inférieur à $M + N$ soient

$$Q_{l-1},\quad Q_l,$$

nous remarquerons qu'elles devront satisfaire aux inégalités

$$(8)\qquad \begin{cases} \delta(Q_{l-1}.Q_l) < M + N, \\ \delta(Q_l.Q_{l+1}) \geqq M + N; \end{cases}$$

et comme

$$\delta \frac{x^M}{Q_{i+1}} - \delta \frac{Q_i}{x^N} = M + N - \delta(Q_i.Q_{i+1}),$$

ces égalités supposent que l'on a

$$\delta \frac{x^M}{Q_{l+1}} > \delta \frac{Q_l}{x^N},$$

si $i = l - 1$, et que

$$\delta\,\frac{Q_i}{x^N} \geqq \delta\,\frac{x^M}{Q_{i+1}},$$

si $i = l$; par conséquent, d'après ce que nous avons trouvé relativement à la limite supérieure du degré

$$\delta F(\nu Q_i),$$

nous aurons, pour $i = l - 1$ et $i = l$,

$$(9)\qquad \begin{cases} \delta F(\nu Q_{l-1}) \leqq \delta\,\dfrac{x^M}{Q_l}, \\ \delta F(\nu Q_l) \quad \leqq \delta\,\dfrac{Q_l}{x^N}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant démontrer que ces inégalités, déduites, comme on l'a vu, des conditions (3), supposent à leur tour nécessairement que chacune des conditions (3) soit satisfaite.

§ 4.

D'après notre système de notations,

$$\frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}},\quad \frac{P_l}{Q_l},\quad \frac{P_{l+\mu}}{Q_{l+\mu}}$$

représentent les fractions convergentes du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_{l-2} + \cfrac{1}{q_{l-1} + \cfrac{1}{q_l + \cfrac{1}{q_{l+1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1} + \cdots}}}}}},$$

qui correspondent aux quotients incomplets

$$q_{l-2},\quad q_{l-1},\quad q_{l+\mu-1}.$$

En représentant par

$$\frac{S}{T}$$

...ction ordinaire à laquelle se réduit la fraction continue

$$q_l + \cfrac{1}{q_{l+1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1}}},$$

...ouve, en vertu des propriétés des fractions continues,

$$Q_{l+\mu} = Q_l S + Q_{l-1} T.$$

...nt cette égalité par ν, on a

$$\nu Q_{l+\mu} = \nu Q_l S + \nu Q_{l-1} T,$$

...uppose l'égalité

$$F(\nu Q_{l+\mu}) = F(\nu Q_l S) + F(\nu Q_{l-1} T).$$

...mposant les fonctions

$$\nu Q_l,\quad \nu Q_l S,\quad \nu Q_{l-1},\quad \nu Q_{l-1} T$$

une partie entière et une fraction, il vient

$$\begin{aligned}
\nu Q_l &= E(\nu Q_l) + F(\nu Q_l),\\
\nu Q_l S &= E(\nu Q_l S) + F(\nu Q_l S),\\
\nu Q_{l-1} &= E(\nu Q_{l-1}) + F(\nu Q_{l-1}),\\
\nu Q_{l-1} T &= E(\nu Q_{l-1} T) + F(\nu Q_{l-1} T);
\end{aligned}$$

par l'élimination de Q_l, Q_{l-1}, en tant qu'ils sont en dehors des signes E, F, on en tire

$$\begin{aligned}
F(\nu Q_l S) &= SF(\nu Q_l) + SE(\nu Q_l) - E(\nu Q_l S),\\
F(\nu Q_{l-1} T) &= TF(\nu Q_{l-1}) + TE(\nu Q_{l-1}) - E(\nu Q_{l-1} T).
\end{aligned}$$

En portant ces valeurs des fonctions

$$F(\nu Q_l S),\quad F(\nu Q_{l-1} T)$$

dans l'expression trouvée plus haut de la fonction

$$F(\nu Q_{l+\mu}),$$

et posant, pour abréger,

$$SE(\nu Q_l) - E(\nu Q_l S) + TE(\nu Q_{l-1}) - E(\nu Q_{l-1} T) = U.$$

il vient

$$(10) \qquad F(\nu Q_{l+\mu}) = SF(\nu Q_l) + TF(\nu Q_{l-1}) + U.$$

Comme S et T sont les termes de la fraction simple

$$\frac{S}{T},$$

à laquelle se réduit la fraction continue

$$q_l + \cfrac{1}{q_{l+1} + \ldots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1}}},$$

ces quantités seront des mêmes degrés que les produits

$$q_l \; q_{l+1} \ldots q_{l+\mu-1},$$
$$q_{l+1} \, q_{l+2} \ldots q_{l+\mu-1},$$

et par suite des mêmes degrés que les fractions

$$\frac{Q_{l+\mu}}{Q_l}, \quad \frac{Q_{l+\mu}}{Q_{l+1}},$$

formées avec les dénominateurs des fractions convergentes.

$$\frac{P_l}{Q_l}, \quad \frac{P_{l+1}}{Q_{l+1}}, \quad \frac{P_{l+\mu}}{Q_{l+\mu}}$$

du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \ldots + \cfrac{1}{q_{l-2} + \cfrac{1}{q_{l-1} + \ldots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1} + \ldots}}}}$$

D'après cela nous aurons

$$\delta S = \delta \frac{Q_{l+\mu}}{Q_l}, \quad \delta T = \delta \frac{Q_{l+\mu}}{Q_{l+1}}.$$

En remarquant maintenant que, en vertu de (9),

$$\delta F(\nu Q_l) \le \delta \frac{Q_l}{x^N}, \quad \delta F(\nu Q_{l-1}) \le \frac{x^M}{Q_l},$$

on trouve

$$\delta S + \delta F(vQ_l) = \delta S F(vQ_l) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu}}{x^N},$$

$$\delta T + \delta F(vQ_{l-1}) = \delta T F(vQ_{l-1}) \leqq \delta \frac{x^M Q_{l+\mu}}{Q_l Q_{l+1}}.$$

Or, d'après (8), le produit

$$Q_l Q_{l+1}$$

est d'un degré non inférieur à M + N, d'où il s'ensuit que la dernière inégalité donne

$$\delta T F(vQ_{l-1}) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu}}{x^N}.$$

On voit par là que, dans l'expression de la fonction

$$F(vQ_{l+\mu}),$$

d'après la formule (10), les deux termes qui contiennent la variable à des degrés négatifs sont d'un degré non supérieur à

$$\frac{Q_{\lambda+\mu}}{x^N},$$

et par suite

$$\delta F(vQ_{l+\mu}) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu}}{x^N}.$$

Si l'on remarque maintenant que

$$\delta q_{\lambda+\mu} = \delta \frac{Q_{\lambda+\mu+1}}{Q_{\lambda+\mu}},$$

nous en conclurons que

$$\delta q_{l+\mu} F(vQ_{l+\mu}) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu+1}}{x^N}.$$

En y faisant successivement

$$\mu = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n + m - l - 1,$$

et remarquant que, pour trois de ces valeurs de μ, la fonction $Q_{l+\mu+1}$ atteint seulement la limite Q_{m+n}, dont le degré, d'après le § 1, ne surpasse pas N — 1, nous en conclurons que

$$\delta q_l F(vQ_l) < 0, \quad \delta q_{l+1} F(vQ_{l+1}) < 0, \quad \ldots, \quad \delta q_{m+n-1} F(vQ_{m+n-1}) < 0,$$

d'où il s'ensuit que, en déterminant les fonctions

$$\omega_l, \ \omega_{l+1}, \ \ldots, \ \omega_{m+n-1},$$

par la formule

$$\omega_i = (-1)^{i-1}\mathrm{E}[q_i \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i)],$$

on trouvera

$$\omega_l = 0, \quad \omega_{l+1} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0.$$

En faisant maintenant $\mu = m + n - l$, on aura

$$\delta q_{m+n} \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{m+n}) < \delta \frac{\mathrm{Q}_{m+n+1}}{x^{\mathrm{N}}},$$

et par suite, en déterminant la fonction ω_{m+n} par la même formule, on remarquera qu'elle sera d'un degré non supérieur à celui de $\frac{\mathrm{Q}_{m+n+1}}{x^{\mathrm{N}}}$. Comme on a, d'après notre notation (§ 1),

$$\delta \frac{\mathrm{Q}_{m+n+1}}{x^{\mathrm{N}}} = \rho,$$

on en conclut que

$$\delta \omega_{m+n} \leqq \rho.$$

Ainsi nous sommes assurés que les inégalités (9) entraînent la vérification des conditions

$$\omega_l = 0, \quad \omega_{l+1} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta \omega_{m+n} \leqq \rho.$$

Pour démontrer maintenant que la même chose a lieu relativement aux autres conditions (3), représentons par

$$\frac{\mathrm{S}_1}{\mathrm{T}_1}, \quad \frac{\mathrm{S}_2}{\mathrm{T}_2}$$

les fractions convergentes du développement

$$q_{l-\lambda} + \cfrac{1}{q_{l-\lambda+1} + \ldots},$$

qui correspondent aux quotients incomplets q_{l-2}, q_{l-1}. A l'aide de ces fractions, les fractions convergentes du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \ldots + \cfrac{1}{q_{l-\lambda-2} + \cfrac{1}{q_{l-\lambda-1} + \ldots}}},$$

respondantes aux quotients incomplets

$$q_{l-\lambda-2},\quad q_{l-\lambda-1},\quad q_{l-2},\quad q_{l-1}$$

nt déterminées les unes par les autres, de la manière suivante :

$$\frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}} = \frac{P_{l-\lambda}S_1 + P_{l-\lambda-1}T_1}{Q_{l-\lambda}S_1 + Q_{l-\lambda-1}T_1},$$

$$\frac{P_l}{Q_l} = \frac{P_{l-\lambda}S_2 + P_{l-\lambda-1}T_2}{Q_{l-\lambda}S_2 + Q_{l-\lambda-1}T_2}.$$

ant maintenant les équations

$$Q_{l-1} = Q_{l-\lambda}S_1 + Q_{l-\lambda-1}T_1,$$

$$Q_l = Q_{l-\lambda}S_2 + Q_{l-\lambda+1}T_2$$

rt à

$$Q_{l-\lambda},\quad Q_{l-\lambda-1},$$

quant que, d'après les propriétés des fractions conver-

$$S_1T_2 - S_2T_1 = \pm 1,$$

n trouve pour $Q_{l-\lambda}$ l'expression

$$\pm Q_{l-\lambda} = Q_{l-1}T_2 - Q_lT_1.$$

Multipliant cette expression par ν, et passant de l'égalité des fonctions à l'égalité de leurs parties fractionnaires, il vient

$$\pm F(\nu Q_{l-\lambda}) = F(\nu Q_{l-1}T_2) - F(\nu Q_lT_1).$$

Or, en vertu des égalités

$$\nu Q_{l-1}T_2 = E(\nu Q_{l-1}T_2) + F(\nu Q_{l-1}T_2),$$

$$\nu Q_{l-1} = E(\nu Q_{l-1}) + F(\nu Q_{l-1}),$$

$$\nu Q_lT_1 = E(\nu Q_lT_1) + F(\nu Q_lT_1),$$

$$\nu Q_l = E(\nu Q_l) + F(\nu Q_l),$$

on trouve

$$F(Q_{l-1}T_2) = T_2F(\nu Q_{l-1}) + T_2E(\nu Q_{l-1}) - E(\nu Q_{l-1}T_2),$$

$$F(\nu Q_lT_1) = T_1F(\nu Q_l) + T_1E(\nu Q_l) - E(\nu Q_lT_1).$$

Portant ces valeurs des fonctions

$$F(\nu Q_{l-1}T_2),\quad F(\nu Q_l T_1)$$

dans l'expression obtenue plus haut de la fonction

$$F(\nu Q_{l-\lambda})$$

et faisant, pour abréger,

$$T_2 E(\nu Q_{l-1}) - E(\nu Q_{l-1}T_2) - T_1 E(\nu Q_l) + E(\nu Q_l T_1) = V,$$

il vient

$$(11)\qquad \pm F(\nu Q_{l-\lambda}) = T_2 F(\nu Q_{l-1}) - T_1 F(\nu Q_l) + V.$$

Comme, d'après nos notations,

$$\frac{S_1}{T_1},\quad \frac{S_2}{T_2}$$

sont les fractions convergentes du développement

$$q_{l-\lambda} + \cfrac{1}{q_{l-\lambda+1} + \ldots + \cfrac{1}{q_{l-2} + \cfrac{1}{q_{l-1} + \ldots}}},$$

correspondantes aux quotients incomplets

$$q_{l-2},\quad q_{l-1},$$

leurs dénominateurs T_1, T_2 devront être de mêmes degrés que les produits

$$q_{l-\lambda+1}q_{l-\lambda+2}\ldots q_{l-2},$$

$$q_{l-\lambda+1}q_{l-\lambda+2}\ldots q_{l-2}q_{l-1},$$

et par suite de mêmes degrés que les fractions

$$\frac{Q_{l-1}}{Q_{l-\lambda+1}},\quad \frac{Q_l}{Q_{l-\lambda+1}},$$

...es au moyen des dénominateurs des fractions convergentes

$$\frac{P_{l-\lambda+1}}{Q_{l-\lambda+1}},\quad \frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}},\quad \frac{P_l}{Q_l}$$

... la fraction continue

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{\ldots}{\ldots+\cfrac{1}{q_{l-\lambda}+\cfrac{\ldots}{\ldots+\cfrac{1}{q_{l-2}+\cfrac{1}{q_{l-1}+\ldots}}}}}};$$

...nséquent,

$$\delta T_1=\delta\,\frac{Q_{l-1}}{Q_{l-\lambda+1}},\quad \delta T_2=\delta\,\frac{Q_l}{Q_{l-\lambda+1}}.$$

...a, d'après (9),

$$\delta F(\nu Q_l)\mathrel{\substack{=\\<}}\delta\,\frac{Q_l}{x^N},\quad \delta F(\nu Q_{l-1})\mathrel{\substack{=\\<}}\delta\,\frac{x^M}{Q_l};$$

...e là

$$\delta T_1 F(\nu Q_l)\mathrel{\substack{=\\<}}\delta\,\frac{Q_{l-1}Q_l}{x^N Q_{l-\lambda+1}},\quad \delta T_2 F(\nu Q_{l-1})\mathrel{\substack{=\\<}}\delta\,\frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}}.$$

Comme, d'après (8), le produit $Q_{l-1}Q_l$ est de degré inférieur à $M+N$, la première de ces inégalités nous donne

$$\delta T_1 F(\nu Q_l)<\delta\,\frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}}.$$

On voit par là que les deux fonctions

$$T_2 F(\nu Q_{l-1}),\quad T_1 F(\nu Q_l)$$

sont de degré non inférieur à

$$\frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}},$$

et dans ce cas, d'après la formule (11) et en remarquant que λ ne

contient pas de puissances négatives de la variable, on trouve

$$\delta F(\nu Q_{l-\lambda}) \overline{\overline{<}} \delta \frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}},$$

ce qui, joint à l'égalité

$$\delta q_{l-\lambda} = \delta \frac{Q_{l-\lambda+1}}{Q_{l-\lambda}},$$

nous donne

$$\delta q_{l-\lambda} F(\nu Q_{l-\lambda}) \overline{\overline{<}} \delta \frac{x^M}{Q_{l-\lambda}}.$$

En faisant ici

$$\lambda = l - m - 1, \quad l - m - 2, \quad \ldots, \quad 1,$$

et remarquant que de plus, d'après le § 1, la fraction

$$\frac{x^M}{Q_{l-\lambda}}$$

reste de degré inférieur à zéro, il vient

$$\delta q_{m+1} F(\nu Q_{m+1}) < 0,$$
$$\delta q_{m+2} F(\nu Q_{m+2}) < 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\delta q_{l-1} F(\nu Q_{l-1}) < 0;$$

d'où il s'ensuit que, en déterminant les fonctions

$$\omega_{m+1}, \quad \omega_{m+2}, \quad \ldots, \quad \omega_{l-1}$$

par la formule générale

$$\omega_i = (-1)^{i-1} E[q_i F(\nu Q_i)],$$

on trouvera

$$\omega_{m+1} = 0, \quad \omega_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{l-1} = 0.$$

En posant, dans la formule précédente

$$\lambda = l - m,$$

et remarquant que, suivant notre notation (§ 1)

$$\delta \frac{x^M}{Q_m} = \sigma,$$

on trouve

$$\delta q_m F(v Q_m) \stackrel{=}{<} \sigma ;$$

d'où l'on conclut, d'après la formule ci-dessus qui détermine la valeur de la fonction ω_i, que

$$\delta \omega_m \stackrel{=}{<} \sigma .$$

Ainsi nous sommes assurés de la vérification des conditions

$$\omega_{m+1} = 0, \quad \omega_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{l-1} = 0,$$
$$\delta \omega_m \stackrel{=}{<} \sigma ,$$

qui, avec les conditions démontrées plus haut

$$\omega_l = 0, \quad \omega_{l+1} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta \omega_{m+n} = \rho ,$$

comprennent toutes les conditions (3).

On voit par là que les inégalités (4) constituent les conditions non-seulement nécessaires, mais encore suffisantes, pour que la formule

$$u X - Y ,$$

X, Y étant entières, et X de degré non supérieur à m, puisse donner une expression approchée de la fonction v aux quantités près de l'ordre x^{-N} exclusivement.



COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CLEBSCH (A.). — VORLESUNGEN ÜBER GEOMETRIE, bearbeitet und herausgegeben von Dr F. LINDEMANN, mit einem Vorworte von F. KLEIN. Ersten Bandes, zweiter Theil. — Leipzig, Teubner, in-8°, 554 p. (faisant suite aux 496 pages de la première Partie) (¹).

La seconde Partie dont nous aurons à nous occuper ici étant une continuation immédiate de la première Partie, nous n'aurons qu'à reprendre l'analyse déjà commencée de cet Ouvrage, qui a pour base les leçons de Clebsch, mais dont M. Lindemann est l'auteur responsable.

La cinquième Section, qui ouvre la seconde Partie, contient la discussion des *courbes du troisième ordre ou de la troisième classe*. Les propriétés des neuf points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, celles du faisceau de ces courbes qui ont les mêmes points d'inflexion, et de la série des courbes de la troisième classe qui ont les droites polaires des points d'inflexion pour tangentes de rebroussement, fournissent, par leur belle symétrie et par la simplicité de leur représentation algébrique, la meilleure illustration de la théorie des polaires et des courbes hessienne, steinérienne et cayleyenne. La dernière de ces courbes devient ici identique à la courbe hermitienne d'un système. En se plaçant ici au point de vue algébrique, on a l'avantage de pouvoir former un système complet des formes invariantes qui appartiennent à une forme ternaire cubique. Parmi les applications que l'auteur en fait, nous citerons la formation (en partie d'après M. Gundelfinger) des équations de condition des différentes dégénérations d'une cubique.

L'auteur considère la Géométrie sur une courbe cubique de deux points de vue. Le premier, qui est géométrique (ou algébrique), est intimement lié aux générations de ces courbes qu'on doit à Chasles et à Grassmann. Le second, qui dépend de la représentation d'un point variable d'une courbe du troisième ordre par des fonctions elliptiques d'un paramètre variable, fait paraître toute

(¹) Voir *Bulletin*, t. X, p. 113.

l'élégance et toute la simplicité de cette application de la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes à la Géométrie, qui est une des plus belles productions du génie de Clebsch. La présente exposition de cette application des fonctions transcendantes est toutefois due à M. Lindemann, tandis que plusieurs des autres parties de cette Section ont été élaborées dans les leçons de Clebsch.

La discussion de la Géométrie sur une cubique peut servir d'introduction à la sixième Section, qui a pour titre : *La Géométrie sur une courbe algébrique et sa connexion avec la théorie des intégrales abéliennes.* Celle-ci se compose de même de deux Parties : dans la première on se sert seulement de méthodes algébriques et géométriques ; dans la seconde on fait usage de fonctions transcendantes.

La première de ces deux Parties commence par une discussion des transformations birationnelles (*eindeutige*) d'une courbe algébrique. On y trouve sept démonstrations de la conservation du genre. Viennent ensuite des recherches très-étendues sur les systèmes de points d'intersection de courbes algébriques et sur les modules, c'est-à-dire les constantes d'une courbe algébrique qui ne sont pas altérées par une transformation birationnelle (de même que les invariants ne sont pas altérés par une transformation linéaire). Dans ces recherches, qui ont notamment pour but d'obtenir algébriquement des résultats trouvés par Riemann, Clebsch et d'autres au moyen des transcendantes, M. Lindemann continue les discussions commencées à la fin de la quatrième Section. Les démonstrations et les théorèmes qu'il expose sont en partie dus à MM. Brill et Nöther, en partie à M. Lindemann lui-même. Dans la seconde Partie de la sixième Section, l'auteur expose la détermination des points d'une courbe algébrique au moyen des fonctions abéliennes, et les applications du théorème d'Abel à l'étude des propriétés des systèmes de points d'intersection. Il a besoin d'emprunter ici à la théorie des fonctions plusieurs théorèmes dont il adapte toutefois les formes et les expressions au but actuel ; ce mélange a pour le lecteur l'inconvénient qu'on ne sait pas toujours jusqu'à quel point l'auteur continue ses citations et où commencent, sur la base de celles-ci, ses démonstrations rigoureuses.

Les courbes des genres $p = 0$ et $p = 1$ n'étant pas comprises dans la discussion générale, l'auteur s'occupe après, en particulier,



de ces courbes, dont on peut exprimer les coordonnées par des fonctions rationnelles ou elliptiques ; il ajoute une étude particulière des courbes du genre $p = 2$, ou hyperelliptiques.

Nous avons déjà rappelé que les importantes théories dont nous venons de parler doivent à Clebsch la place qu'elles ont trouvée dans la Géométrie ; l'élaboration actuelle appartient à M. Lindemann.

La septième Section, dont une partie est tirée d'un manuscrit de Clebsch, contient un aperçu sur *la Théorie des connexes*. On sait quelles nouvelles voies cette importante conception de Clebsch ouvre à la Science, en fournissant le moyen d'appliquer aux équations différentielles algébriques les instruments de l'Algèbre moderne. A cause de la connexion intime de l'Algèbre avec la Géométrie, il est clair qu'une partie des résultats qu'on obtient ainsi coïncident avec ceux que M. Fouret obtient en prenant pour point de départ les conceptions de la théorie des caractéristiques.

Les progrès de la théorie des équations différentielles algébriques seront suivis de ceux de la théorie générale des équations différentielles. Guidé par un manuscrit de M. Klein, au concours duquel M. Lindemann rend justice dans sa Préface, et qui lui a été utile notamment pour le choix des points de vue, l'auteur ouvre, à la fin de son Livre, des vues intéressantes sur les grandes espérances qu'il est permis de fonder sur l'influence des principes de l'Algèbre moderne et de la Géométrie moderne sur les équations différentielles. Il rappelle à cet égard les travaux de MM. Lie et Mayer, notamment les *Berührungstransformationen* du premier savant, ainsi que la nouvelle discussion, due à M. Darboux, des principes de la théorie des solutions singulières. Nous sommes persuadés, nous aussi, que nous aurons là un champ très-fertile : les grands progrès que la Géométrie et l'Algèbre ont faits dans notre siècle ne laisseront pas de contribuer essentiellement à la solution des problèmes, appartenant jusqu'à présent au domaine de la théorie des fonctions, qui ont pour objet la déduction immédiate, sans intégration, des propriétés d'une fonction définie par une équation différentielle.

Si nous avons réussi à donner une idée nette de ce que contient le Livre qui nous occupe, on aura entrevu que ses principes sont choisis et suivis avec clarté. L'auteur tend partout à établir les propriétés indépendantes des transformations, les propriétés étant

celles d'une courbe regardée comme lieu ou enveloppe, celles d'un système de courbes, ou celles de la combinaison de coordonnées ponctuelles ou linéaires qui s'appelle *connexe*, et les transformations étant les transformations linéaires, ou les transformations birationnelles les plus générales. Pour atteindre ce but, il se sert le plus loin possible des moyens algébriques et géométriques dont nous avons parlé dans notre analyse de la première Partie ; ensuite il introduit aussi l'usage des transcendantes.

Cependant, la mise en œuvre, même de principes qu'on a clairement sous les yeux, peut être une tâche très-difficile, surtout lorsqu'il s'agit d'un ouvrage si étendu, et lorsque, en beaucoup d'endroits, il n'existe pas encore de voies frayées conduisant au but qu'on a sous les yeux. La manière dont M. Lindemann s'est acquitté de cette tâche, dans un espace de temps très-court, est la preuve d'une grande habileté et d'un travail très-assidu, ayant eu pour résultat un ouvrage très-utile aux progrès de la Science ; mais on devait s'attendre à ce que ce Livre contînt des passages moins heureusement traités que d'ordinaire par l'auteur.

M. Lindemann dit dans sa Préface que son plan s'est étendu pendant le travail, et qu'à cause de cette accumulation successive de nouvelles recherches son Livre manque de la régularité d'un ouvrage bien arrondi. Nous sommes loin de vouloir lui reprocher d'avoir saisi les occasions d'introduire ainsi, d'une manière plus étendue que ne l'aurait demandé l'ensemble de son Ouvrage, « des conceptions et des méthodes peu connues en dehors du cercle des amis et élèves de Clebsch » ; au contraire, nous lui en sommes très-reconnaissants ; mais la manière successive dont s'est faite cette accumulation rend parfois la lecture très-difficile : on oublie les démonstrations antérieures et les restrictions qui peuvent y être jointes; on est réduit à avoir confiance en l'auteur à cet égard, et parfois même cette confiance est ébranlée. Ces remarques s'appliquent notamment à ce qui concerne la géométrie sur une courbe algébrique. Cette discussion, qui est commencée dans les derniers paragraphes de la quatrième Section, occupe toute la longue sixième Section. N'étant pas assez familiers avec cette matière pour juger de la valeur de toutes les démonstrations et discussions qui s'y trouvent, nous nous bornons ici à constater la difficulté qu'on a à les suivre ; mais, d'après les observations d'un meilleur juge sur

cette matière [1], les difficultés que l'auteur avait ici à vaincre ont en plusieurs endroits dépassé ses forces. La tentative de vouloir former dès à présent un tout complet de cette matière, où beaucoup des recherches datent presque d'hier, et où beaucoup restent encore à faire pour établir la connexion nécessaire, était donc sans doute trop hardie; mais, quoique même M. Lindemann n'y ait pu réussir complétement, sa collection des différentes recherches faites dans cette direction et ses nouvelles recherches propres contribueront essentiellement à préparer l'exécution complète du plan qu'il s'est proposé à cet égard. Grâce aux travaux que provoquera son Ouvrage et à ses propres études intermédiaires, nous espérons que M. Lindemann réussira, dans une nouvelle édition de son livre, à faire de la géométrie sur une courbe algébrique un corps de doctrine, solidement établi par des démonstrations complètes, et assez facile à étudier.

En parlant d'une future édition, nous nous permettons aussi d'émettre l'espérance que M. Lindemann trouvera alors assez de temps pour éviter certaines faiblesses dans le détail. Nous pensons moins au trop grand nombre d'erreurs typographiques qu'à plusieurs conclusions ou expressions inexactes ou, du moins, obscures. Certainement tout auteur mathématique sait combien ces petites fautes, dont l'influence ne s'étend pas loin (au cas contraire on aurait le moyen de les découvrir) sont difficiles à éviter; mais le nombre que nous en avons trouvé, sans les chercher expressément, semble indiquer que le livre de M. Lindemann en contient trop, surtout pour un ouvrage qui porte le titre de « *Leçons* ». Nous nous contenterons d'appuyer cette remarque par quelques exemples.

A la page 587 on trouve une confusion de la courbe cayleyenne d'une courbe donnée avec celle de la courbe qui a la courbe donnée pour hessienne. Le lecteur est donc chargé du soin de s'assurer que cette confusion n'a aucune conséquence sérieuse, et c'est ce qui a lieu en effet.

A la page 606, l'auteur regarde une quantité dont l'expression se réduit à $\frac{0}{0}$ comme déterminée, sans donner au lecteur les moyens de

---

(1) M. Nöther, dans la partie historique et littéraire du *Zeitschrift* de Schlömilch, 1877, p. 73 et suivantes.

voir comment le numérateur et le dénominateur tendent à devenir égaux à zéro.

A la page 843 on trouve une distraction étrange : l'auteur demande qu'un nombre M' et un facteur r' de M' soient premiers entre eux.

A la page 1002, l'auteur remarque que les courbes intégrales (*Hauptcoincidenzcurven*) d'un connexe $(1, n)$ sont tangentes aux $n^2 + n + 1$ droites fondamentales du connexe. Il semble indiquer que chacune de ces droites enveloppe les courbes, et il n'observe pas que le contact en un point ordinaire de la droite résulte de la circonstance que la droite est (ou fait partie de) la courbe intégrale passant par le point. Nous nous permettrons de rappeler, à cette occasion, un fait semblable : la droite à l'infini n'enveloppe pas le système de courbes représentées par l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$f\left(\frac{dy}{dx}, x, y\right) = 0,$$

où f est une fonction algébrique générale de l'ordre n en $\frac{dy}{dx}$ et de l'ordre m en x et y ; mais elle appartient elle-même à ce système ; les autres courbes du système la rencontrent aux $m + n$ points déterminés par $\frac{dx}{dx} = \frac{y}{x}$.

H. Z.

BECKER (JOHANN KARL), Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Manheim. — DIE ELEMENTE DER GEOMETRIE AUF NEUER GRUNDLAGE STRENG DEDUCTIV DARGESTELLT. — Erster Theil. Mit 145 Holzschnitten. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 1877, XV-295 p.

Nous savons très-bien qu'un Recueil qui doit s'occuper de satisfaire autant d'intérêts différents que le *Bulletin* ne peut s'astreindre à rendre compte en général de tous les ouvrages élémentaires de Mathématiques. Mais le livre que nous avons entre les mains, bien que portant pour titre : *Éléments*, n'appartient pas en réalité à cette catégorie. On pouvait bien s'attendre, au contraire, à ce que l'auteur, bien connu comme un heureux et vaillant champion sur le terrain de la Géométrie philosophique, ne devait pas se tenir sur

le sentier frayé depuis longtemps, et qu'il traiterait son sujet d'une manière complétement originale. Et c'est, en effet, ce qui est arrivé.

M. Becker veut déduire, suivant une marche uniforme, toute la théorie de l'espace, sans égard aux divisions habituellement observées en Planimétrie et Stéréométrie, en Géométrie synthétique et en Géométrie analytique, de certains principes très-simples et regardés comme indiscutables. Il nous présente, comme préliminaires, la première Partie qui traite des lois des *figures simples,* et qui est déjà bien suffisante pour asseoir notre jugement sur la nature et la valeur du plan de l'Ouvrage entier. Nous croyons devoir commencer par signaler ici tout d'abord une différence essentielle qui distingue la manière dont Becker conçoit les principes de tous les autres points de vue connus jusqu'ici. Tandis qu'ordinairement les efforts du géomètre tendent à réduire au moindre nombre possible la série des vérités indémontrables, qu'on les appelle *axiomes* avec Euclide, *hypothèses* avec Riemann, ou *faits* avec Helmholtz, notre auteur, dès le début, se dégage formellement et expressément de cette tendance. Combien y a-t-il d'axiomes, dit-il, qui soient nécessaires pour la fondation d'un édifice doctrinal solide et harmonisé, cela nous est indifférent; si avec sept axiomes on peut parvenir à une connaissance plus précise et plus intuitive qu'avec trois, il n'hésitera pas personnellement à préférer le premier mode de fondation au second? Pour cette raison, il n'attachera pas non plus une grande importance à la démonstration, peut-être possible, de l'introduction dans un de ses théorèmes d'une supposition encore non démontrée, pourvu que celle-ci soit elle-même directement saisissable à l'intuition. En résumé, M. Becker fonde, comme on voit, son nouveau système entièrement sur le procédé intuitif, et sur ce procédé seulement.

Qu'il soit permis à l'auteur de cet article, qui sur les points principalement en question est d'un avis un peu différent, et qui a échangé déjà avec M. Becker de nombreuses lettres à ce sujet, d'exposer en quelques mots sa manière de voir sur les principes de la doctrine de ce géomètre. Que l'intuition immédiate puisse faire naître en nous une certitude intime, à laquelle ni la syllogistique rigoureuse des Grecs ni la métagéométrie d'un Bolyai ne pourraient jamais nous conduire, et que, en conséquence, tout livre composé

spécialement en vue de l'enseignement doive ne jamais cesser de faire un appel continuel à l'évidence, c'est là aussi notre propre et entière conviction, et en cela nous nous placerons absolument sur le même terrain que M. Becker. Mais cette base, reposant uniquement sur la contemplation directe, est-elle réellement indiscutable? Des recherches théoriques plus approfondies ne peuvent-elles pas, à cette satisfaction *instinctive*, pour ainsi dire, que nous procure l'intuition, en ajouter une autre plus *abstraitement intellectuelle?* Il existe cependant des tentatives dans ce sens vraiment dignes d'attention, tentatives qui nous ont au moins fait approcher à un certain degré du but idéal qu'il s'agirait d'atteindre. Mais de ces efforts, dont le succès partiel constitue, à nos yeux, un des résultats les plus remarquables de la puissance analytique de l'entendement humain, M. Becker semble faire peu de cas : il ne le dit pas, il est vrai, d'une manière expresse, mais sa véritable manière de voir peut se lire très-bien entre les lignes de sa Préface. C'est là la seule divergence sur la conception des principes qui existe entre l'auteur et nous. Nous lui accordons très-volontiers que son entreprise est parfaitement conséquente avec elle-même, et partant qu'elle est légitime; mais nous affirmerons non moins formellement que cela ne rend nullement superflue une critique complète des principes sur lesquels il s'appuie, et que cette critique, au contraire, devient par là même tout à fait nécessaire. Au point de vue pédagogique, comme au point de vue mathématique, nous sympathisons entièrement avec l'auteur; mais au point de vue de cette branche de la science, que l'on a assez improprement nommée la *métaphysique de la Géométrie,* nous considérerions comme très-regrettable qu'une répugnance systématique, comme celle que l'on rencontre chez M. Becker, pour l'examen des sources de nos connaissances, se répandît généralement.

Ayant ainsi expliqué en quoi notre point de vue diffère de celui de l'auteur, nous nous astreindrons, dans ce qui va suivre, à accepter complétement sa base pour la nôtre, et à examiner jusqu'à quel point il est resté fidèle à la marche qu'il s'est tracée. Nous commencerons par déclarer qu'à notre avis il a, sous ce rapport, parfaitement réussi, et que nous avons vraiment affaire à une nouvelle création, qui s'imposera même à l'attention des personnes assez nombreuses qui sont par principe les adversaires de cette méthode.

Parmi les objets qui sont naturellement traités dans ce Livre, ceux qui forment l'introduction et la conclusion sont indubitablement les plus importants, et nous allons nous en occuper ici en particulier, tandis que, pour les matières exposées dans les autres Sections d'après une méthode plus rapprochée nécessairement de la méthode habituelle, nous pourrons nous contenter d'un coup d'œil général. Ces deux objets à examiner à part sont la construction des figures fondamentales élémentaires, et une discussion présentée sous un jour tout nouveau, des surfaces connexes, soit continues, soit morcelées.

La première de ces deux Parties a été déjà publiée en résumé dans le tome XX du *Journal de Schlömilch;* mais ici elle se trouve naturellement exposée avec plus de développements et de détails. Comme premier axiome, l'auteur pose la continuité et l'étendue infinie de l'espace; comme second axiome, la possibilité de figures susceptibles de coïncider entre elles. Bien que l'énonciation de ce second axiome se rattache à la notion de distance, donnée dès le début, les partisans mêmes de la Géométrie, « dégagée de toute contradiction », ne peuvent guère en faire un reproche à l'auteur, car cette notion est prise aussi comme idée première chez Lobatchefsky et Bolyai. Le troisième axiome établit dans l'enchaînement le plus étroit les restrictions que la liberté de mouvement d'un corps éprouve par la fixation d'un ou de deux de ses points; cet axiome assure alors immédiatement la possibilité de démontrer l'existence d'une surface sphérique et la faculté de déplacer les figures tracées sur cette surface. Il suffisait pour cela de fixer un seul point à l'intérieur de ce corps; si l'on fixe deux points, un dernier couple d'axiomes nous affirme que les points qui sont déterminés d'une manière univoque par leur distance à ces deux points remplissent une ligne unique et indéfinie, et aussi les points dont la position n'est pas complétement fixée par ces distances remplissent une ligne rentrante sur elle-même. C'est là, il est vrai, une manière d'introduire les notions fondamentales de la Planimétrie, la « droite » et le « cercle », qui est en rupture ouverte avec la tradition; mais nous sommes forcés de convenir qu'elle nous a semblé excellente. Il est pourtant certain que nous ne tenons pas pour impossible de déduire ces deux notions de celle de la sphère, bien que tous les essais dirigés jusqu'ici vers ce but par Deahna,

Lobatchefsky et autres soient encore sujets à objection, et nous avons le ferme espoir que cette déduction deviendra un jour une vérité. Mais elle n'en portera pas moins un caractère toujours artificiel, et la féconde fraîcheur des axiomes de Becker, pris sur la vie, lui fera toujours défaut. Les recherches analytiques qui ont conduit autrefois Helmholtz à ses résultats aprioristiques concernant la faculté de déplacement des corps solides se trouvent ici exposées de la manière la plus heureuse dans le langage de la Géométrie intuitive.

Maintenant la définition connue de la circonférence du cercle est devenue un théorème ; on peut démontrer rigoureusement que tous les points d'une ligne engendrée comme nous l'avons indiqué doivent rester à une distance constante de chacun des points de la ligne ou de l'axe mentionné d'abord. La notion du plan n'est pas encore acquise, mais nous pouvons bien, en attendant, définir celle de l'angle, laquelle conduit à son tour, toutes les hypothèses cinématiques étant déjà données, à la notion du cône de révolution et finalement à celle du cône en général. On opérera ensuite avec des angles, dont la propriété d'être entièrement situés dans un seul et même plan se présente alors comme une propriété tout à fait secondaire ; les théorèmes connus sur les angles opposés par le sommet, sur les angles adjacents, sur les angles droits prennent alors tout naturellement la place qui leur convient. On sait maintenant que l'on obtient une surface conique en faisant tourner un côté d'un angle quelconque autour de l'autre côté comme axe ; si cet angle est droit, la surface conique correspondante porte le nom de *plan* et l'on démontre pour ce plan qu'une droite et aussi un cercle peuvent y être renfermés tout entiers.

Tel est le contenu du premier Chapitre ; le second traite de la Géométrie plane. Nous citerons, comme digne d'attention, l'intéressante démonstration par exhaustion du théorème de proportionnalité des angles et des arcs, et la définition précise du caractère des figures symétriques et des figures à centre par rapport à leurs sommets ou à leurs côtés. Pour pouvoir établir à l'abri de toute objection les fondements de la théorie des parallèles, M. Becker indique la nécessité d'un nouvel axiome (le sixième), qu'il énonce ainsi : « Une étendue dans l'espace est toujours plus grande que sa partie, c'est-à-dire ne peut pas être renfermée tout entière dans



cette partie ». Du reste, la manière de voir de l'auteur sur ce chapitre est assez connue, d'après ses précédents écrits et particulièrement d'après la polémique qu'il a tout récemment soutenue contre Lüroth, pour que nous puissions nous dispenser d'entrer dans plus de détails. Mais nous voudrions signaler encore à l'attention du lecteur la manière élégante dont M. Becker a traité les rapports harmoniques et les polygones généraux à n sommets.

Depuis le § 64 jusqu'à la fin du volume, l'auteur s'occupe de la théorie des polyèdres, qui forme encore une des parties les plus remarquables du Livre. C'est un mérite incontestable de M. Becker d'avoir appliqué un monde réel des corps, la théorie de la connexité de Riemann, que le maître lui-même avait établie seulement pour des figures superficielles imaginaires créées par lui, et d'avoir ainsi rendu possible une classification systématique des surfaces polyédrales ([1]). Nous ne pouvons songer ici à donner un compte rendu détaillé de ces recherches de l'auteur, et à faire connaître chacun des nombreux et beaux résultats qu'il a obtenus; nous nous contenterons de dire qu'ils présentent plus d'un point de contact avec les anciens travaux, bien connus, de Möbius, et avec les travaux plus récents, poursuivis d'après un plan méthodique par M. Hess, à Marbourg.

Les savants des pays voisins de race latine avaient eu jusqu'à ces derniers temps sur leurs confrères d'Allemagne l'avantage incontesté d'écrire leurs Traités avec plus de clarté. De nombreux livres d'enseignement publiés dans ces dernières années témoignent que les auteurs allemands apprennent peu à peu à suivre l'exemple de leurs émules. Parmi ces livres, l'Ouvrage que nous venons d'analyser a sans aucun doute le droit de figurer. L'auteur devra se préparer à soutenir des attaques contre le plan et les détails de son œuvre; nous-même, nous sommes loin d'être partout de son avis; mais ce dont nous sommes certain, c'est que, *dans son espèce,* son système est tout aussi bon que pourrait l'être un système intitulé « exempt de toute contradiction », comme celui des *pangéomètres* modernes.

S. Günther.

([1]) La même chose a été faite, presque à la même époque, par C. Jordan, comme M. Becker lui-même le fait remarquer.

KLEIN (F.). — UEBER DEN ZUSAMMENHANG DER FLACHEN ([1]).

L'étude de la connexité des surfaces a son origine dans les recherches de Riemann sur la théorie des fonctions : elle est, dans les expositions habituelles, soumise à des restrictions qu'il est nécessaire de lever pour constituer une théorie purement géométrique. C'est ce qu'a fait M. Klein dans un travail précédent où il a cherché à déterminer la connexité des différents types de surfaces sous lesquels il a classé les surfaces générales du troisième ordre (*Math. Ann.*, t. VI, p. 551). En opposition avec une recherche analogue de M. Schläfli (*Annali di Matematica*, t. V, p. 289), il a développé (*Math. Ann.*, t. VII, p. 549), une méthode pour déterminer surtout la connexité des surfaces qui s'étendent à l'infini; il a montré qu'on ne devait pas toujours regarder une surface comme une *nappe* simple, que les surfaces telles qu'on puisse passer par un chemin continu d'une face sur l'autre devaient être regardées comme *doubles*. M. Schläfli a depuis (*Annali*, t. VII, p. 193) reconnu la justesse des critiques dirigées contre ses déterminations numériques et ses résultats ne diffèrent plus de ceux de M. Klein que par l'appréciation de l'importance de certaines suppositions arbitraires. Dans la Note que nous analysons, l'auteur commence par rectifier une inadvertance qu'il avait commise dans le travail inséré au tome VII des *Mathematische Annalen*, puis il éclaircit sa conception des *doubles surfaces;* il en donne une définition qui est indépendante de la nature et même de l'existence de tout espace entourant la surface; cette conception est, en effet, applicable à toutes les variétés doublement infinies : M. Klein, comme exemple, traite, au point de vue de la connexité, les congruences de lignes de premier ordre et de première classe, qui possèdent des directrices séparées, d'ailleurs réelles ou imaginaires.

([1]) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.

KLEIN (F.). — UEBER DEN VERLAUF DER ABEL'SHEN INTEGRALE BEI DEN CURVEN VIERTEN GRADES. — UEBER EINE NEUE ART VON RIEMANN'SCHEN FLACHEN (¹).

On sait que Riemann a fondé sa théorie des fonctions abéliennes sur des considérations essentiellement géométriques : il étudiait la marche des fonctions sur les surfaces qui portent son nom et qui recouvrent plusieurs fois le plan des $x+iy$. D'un autre côté, cette théorie trouve, ainsi que l'a montré Clebsch, une application immédiate dans l'étude des courbes algébriques, lesquelles sont aussi susceptibles d'une étude purement géométrique. M. Klein s'est appliqué depuis longtemps à trouver le lien des deux méthodes géométriques, et, sous ce point de vue, il a publié, dans le tome VII des *Mathematische Annalen*, un court Mémoire sur un nouveau mode de surfaces de Riemann. Il est parvenu à transporter en quelque sorte les considérations de Riemann relatives à ses surfaces sur des courbes qui leur correspondent, en associant à chaque tangente imaginaire de la courbe le point réel par lequel elle passe, et en prenant pour base la surface à plusieurs feuillets formée par tous ces points. M. Harnack, dans le tome IX des *Mathematische Annalen*, a étudié cette surface pour les courbes de troisième classe, relativement aux intégrales elliptiques.

Dans le Mémoire précédemment cité, M. Klein traite des courbes de degré plus élevé et des intégrales correspondantes. Dans le second des deux Mémoires que nous analysons, les surfaces sont étudiées, quant à l'arrangement et à la réunion de leurs feuillets. Un calcul direct établit l'exactitude de l'ordre de connexion (*Zusammenhangszalh*) qui doit être attribué à la surface dans sa relation avec les surfaces ordinaires de Riemann. Ces rapports sont particulièrement étudiés pour les courbes de troisième ordre qui, en tant que courbes de sixième classe, conduisent à des surfaces à six feuillets superposés : on trouvera là une discussion sur la position des tangentes imaginaires d'inflexion, d'où résultent des renseignements sur les coefficients numériques contenus dans les formules de Plücker, qui se rapportent à ces tangentes.

Dans l'autre Mémoire : *Sur la marche des intégrales abé-*

(¹) *Mathematische Annalen*, t. X.

liennes, etc., on utilise les nouvelles surfaces de Riemann, et au moyen des courbes de quatrième classe, on donne une image de la marche de l'intégrale toujours finie : on est amené à tracer précisément sur la surface la courbe le long de laquelle reste constante la partie réelle ou la partie imaginaire de l'intégrale normale qui correspond à un mode déterminé suivant lequel la surface est découpée. Pour cela, quelques importantes recherches sur les courbes de quatrième classe sont nécessaires. En particulier, M. Klein détermine les parties constantes imaginaires contenues dans les périodes de l'intégrale normale, et parvient ainsi à divers théorèmes sur la réalité de certaines courbes de contact.

KÖNIGSBERGER (L.). — UEBER DIE ENTWICKLUNG DER HYPERELLIPTISCHEN INTEGRALE ERSTER UND ZWEITER GATTUNG IN REIHEN (¹).

Ce travail se rapporte à une remarque faite par M. Hermite dans une Lettre à M. Brioschi, remarque d'après laquelle les coefficients de la formule de réduction d'une intégrale elliptique générale de seconde espèce sont liés simplement aux coefficients des développements en série des intégrales elliptiques normales de première et de seconde espèce. M. Königsberger a trouvé l'origine de ce lien dans la forme sous laquelle M. Weierstrass a donné ces coefficients de réduction, qui se trouvent être des *résidus* relatifs aux points de discontinuité.

M. Königsberger établit des relations analogues pour les fonctions hyperelliptiques : son travail débute par des développements relatifs aux points de discontinuité, au moyen desquels, comme pour les fonctions elliptiques, l'auteur parvient à la formule de réduction pour une intégrale hyperelliptique générale. L'auteur montre ensuite que les coefficients de la formule de réduction par laquelle on ramène une intégrale générale de seconde espèce aux formes normales des intégrales de première et de seconde espèce sont liés simplement aux coefficients du développement en séries de certaines intégrales hyperelliptiques de première et de seconde espèce. Ces dernières n'appartiennent plus, comme dans le cas des

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX ; 1876.

intégrales elliptiques, à la même irrationnelle, mais bien à la racine carrée d'un polynôme réciproque, racine carrée qui, pour les intégrales elliptiques, se ramène immédiatement à celle qui est donnée.

SOHNCKE (L.). — ZUR THEORIE DES OPTISCHEN DREHVERMÖGENS VON KRYSTALLEN ([1]).

Les cristaux qui jouissent du pouvoir rotatoire manifestent extérieurement, par une disposition en hélice de certaines facettes modifiantes, une particularité de leur structure interne, liée à leur qualité de cristaux dextrogyres ou lévogyres. Il est naturel de se demander si le pouvoir rotatoire dont ils sont doués ne tient pas à une disposition hélicoïdale de l'éther dans leur intérieur.

M. Briot a démontré qu'une telle structure serait sans influence sur des rayons se propageant dans le sens de l'axe des spirales, mais qu'elle doit avoir pour effet de dédoubler les rayons perpendiculaires à l'axe en deux composantes elliptiques de gyration contraire et dont la vitesse de propagation serait différente. Pour expliquer dans ce système le pouvoir rotatoire du quartz, M. Briot a admis que dans ce cristal les spirales d'éther ont leurs axes parallèles aux faces du prisme hexagonal, c'est-à-dire perpendiculaires à l'axe du cristal, qui est aussi l'axe de la disposition hélicoïdale des facettes.

Il y a là, d'après M. Sohncke, une sorte de contradiction, que ce physicien cherche à faire disparaître en s'appuyant sur une expérience importante de Reusch et sur certaines idées qu'il a émises relativement à la structure cristalline en général.

Reusch est parvenu à imiter les propriétés optiques que le quartz présente dans le sens de son axe, en empilant des lames de mica à deux axes, toutes de même épaisseur, de telle sorte qu'une même direction cristalline se trouve dans la lame n° 2, à 60 degrés, et dans la lame n° 3, à 120 degrés de la position qu'elle occupe dans la lame n° 1, et ainsi de suite. L'imitation s'approche d'autant plus d'être parfaite que le nombre des triades (groupes de trois lames) est plus grand, l'épaisseur de chacune plus faible.

([1]) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.

L'objet du Mémoire est : 1° la théorie optique d'une triade de Reusch et l'application de la formule à laquelle on arrive au cas où l'épaisseur de la triade, multipliée par un certain coefficient qui dépend des propriétés optiques des lames, est infiniment petite par rapport à la longueur d'onde de la lumière employée; 2° l'étude des dispositions spiraloïdes que l'on peut supposer exister dans un cristal.

L'auteur a démontré, dans un Mémoire antérieur (*Ann. de Poggendorff; Ergänzungsband*, t. VII, p. 337), 54 systèmes réguliers de points en nombre indéfini, lesquels se classent naturellement dans les divers systèmes adoptés en cristallographie. Parmi les systèmes réguliers, un très-petit nombre affectent la disposition spiraloïde, et se classent dans les systèmes du cube, des prismes droits à base carrée ou rectangle, et du rhomboèdre. On sait que, jusqu'ici, le pouvoir rotatoire n'a été observé que dans le système cubique (chlorate de soude) et dans le système du rhomboèdre.

L'expérience de Reusch correspond à une disposition spiraloïde plus compliquée, puisque le mica appartient à l'un des systèmes cristallins à axes obliques. On pourrait imaginer des cristaux naturels appartenant à ces derniers systèmes et présentant le pouvoir rotatoire, grâce à une disposition analogue. Les points formant le système complexe correspondant seraient rangés suivant deux séries de spirales indépendantes.

DAUG (H.-T.), professor vid Upsala Universitet. — DIFFERENTIAL-OCH INTEGRAL-KALKYLENS ANVANDNING VID UNDERSÖKNING AF LINIER I RYMDEN OCH BUGTIGA YTOR. I [1]. — Upsala, 1877. 1 vol. grand in-8°, 200 p.

Cet Ouvrage, dont l'auteur publie aujourd'hui la première Partie, est, à quelques additions près, la reproduction des leçons professées par lui dans l'année 1874-1875. Le volume se divise en deux

---

[1] DAUG (H.-T.), professeur à l'Université d'Upsal : *Application du Calcul différentiel et du Calcul intégral à l'étude des lignes dans l'espace et des surfaces courbes*. Iʳᵉ Partie.

Parties, l'une consacrée à l'étude des lignes dans l'espace, l'autre à l'étude des surfaces.

I. L'auteur commence par indiquer les différentes formes d'équations qui peuvent servir à représenter une ligne, l'expression de la longueur de l'arc, la définition des lignes osculatrices. Il traite ensuite de la tangente, du plan tangent et du plan osculateur, de la normale et du plan normal, de la polaire, de la binormale, de la normale principale. Systèmes de lignes congruents. Direction de la binormale. Plan rectifiant. Relations entre les cosinus correspondant aux directions de la tangente, de la binormale et de la normale principale. Indicatrice sphérique. Double courbure des lignes. Formules de Serret (¹). Cercle osculateur, etc. Sphère osculatrice. Courbure géodésique.

II. Représentation analytique d'une surface. Notations et formules de réduction qui seront employées; coefficients E, F, G de Gauss, etc. Aire d'une surface. Tangentes, plan tangent; normale, plan normal. Indicatrice de Dupin ; diverses formes de ses équations. Tangentes conjuguées; systèmes de lignes conjuguées. Théorème d'Euler sur la courbure des sections normales. Sections obliques; théorème de Meusnier. Points sphériques (ombilics). Représentation d'une surface sur une autre surface. Courbure des surfaces. Surfaces applicables sur d'autres surfaces. Lignes de courbure. Lignes géodésiques. Systèmes de coordonnées géodésiques. Lieu des centres de courbure d'une surface donnée.

On voit, par ce résumé, que cette première Partie de l'Ouvrage de M. Daug traite complétement la partie élémentaire de la théorie des courbes et des surfaces. Les calculs sont élégants et symétriques. L'exécution typographique fait le plus grand honneur à l'Imprimerie académique de M. Berling, à Upsal. J. H.

(¹) Ces formules ont été publiées pour la première fois par M. Frenet.

ЕРМАКОВЪ (В.), профессоръ математики въ Кiевскомъ университетѣ. — Интегрированiе дифференцiальныхъ уравненiй механики. Интегрированiе дифференцiальныхъ уравненiй съ частными производными перваго порядка. — Кiевъ, 1877 (¹). Grand in-8°, VI-96 pages.

Le double titre de cet Ouvrage s'explique à la fois par son contenu et par l'idée fondamentale de l'auteur. Dans ce Mémoire, l'auteur a pour but principal d'exposer les procédés d'intégration des équations canoniques. Jusqu'ici, au lieu de s'occuper directement de l'intégration des équations canoniques, les géomètres, autant que sache M. Ermakof, ont accordé plus d'attention à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquelles conduisent les équations canoniques.

L'auteur trouve très-avantageux d'exposer d'abord la théorie complète des équations canoniques. Il pense que l'on peut ensuite faire voir en quelques mots comment, d'un système complet d'équations canoniques, on peut tirer l'intégrale des équations aux dérivées partielles. C'est seulement dans ces derniers temps que Lie et Mayer ont démontré que l'intégration de m équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre peut se ramener à l'intégration d'une équation différentielle entre un nombre de variables moindre de $m - 1$ que le nombre primitif.

Le théorème de Lie et Mayer est d'une haute importance pour les équations canoniques. En combinant les recherches de Jacobi avec celles de Lie et Mayer, l'auteur parvient à ce résultat :

Si l'on a m intégrales, satisfaisant à certaines conditions, le nombre des variables dans les équations canoniques pourra être abaissé de $2m$ unités.

L'auteur démontre ce théorème indépendamment des équations aux dérivées partielles.

Dans son Mémoire, il expose aussi une courte théorie de l'intégration des systèmes simultanés d'équations canoniques.

(¹) Ermakof, professeur de Mathématiques à l'Université de Kief. — *Intégration des équations différentielles de la Mécanique. Intégration des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre.* — Kief, 1877.

Voici le résumé détaillé du travail de M. Ermakof :

Dans les §§ 1-7, l'auteur expose les procédés d'intégration des équations simultanées aux différentielles ordinaires et des équations linéaires aux dérivées partielles. Ces théorèmes servent d'introduction à l'intégration des équations canoniques.

Dans les §§ 8-10, il donne la condition à laquelle doit satisfaire une intégrale des équations canoniques ; il introduit le symbole de Poisson ; il établit l'identité donnée par Donkin, et en déduit le théorème de Poisson, à l'aide duquel de deux intégrales on peut en tirer une troisième.

Dans les §§ 11-14, sont établies les formules les plus générales pour la transformation des équations canoniques, de manière que les équations transformées conservent encore la forme canonique.

L'auteur démontre, dans le § 15, que l'intégration des équations canoniques peut être ramenée à l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Les §§ 16-18 contiennent quelques conséquences des formules de transformation des équations canoniques, et la démonstration d'une propriété de leurs intégrales.

Dans le § 19, on démontre qu'à l'aide de la moitié du nombre des intégrales satisfaisant à certaines conditions, on peut obtenir les intégrales restantes des équations canoniques, ainsi que l'intégrale de l'équation aux différentielles partielles.

Les §§ 20-21 contiennent la démonstration d'une propriété d'un système d'intégrales canoniques, et de l'existence d'une multitude infinie de systèmes d'intégrales canoniques.

Dans les §§ 22-23, sont données les conditions de l'existence simultanée de certains systèmes d'équations canoniques.

Dans le § 24, on démontre que l'intégration de m systèmes canoniques simultanés d'équations à $2n+m$ variables peut se ramener à l'intégration d'un seul système canonique d'équations à $2n+m$ variables.

Le § 25 contient la démonstration d'une propriété des intégrales des équations canoniques.

Dans les §§ 26-28, se trouve exposée la méthode de Jacobi pour trouver des intégrales telles que les parenthèses de Poisson, formées avec ces intégrales, se réduisent identiquement à zéro.

Le § 29 fait voir que, si l'on a m intégrales satisfaisant à certai-

nes conditions, on peut abaisser de $2m$ le nombre des variables des équations canoniques.

Dans les §§ 30-31, on donne une autre méthode d'abaissement du nombre des variables, un peu différente de la précédente.

Dans les §§ 32-33, on considère quelques cas particuliers d'équations canoniques.

Le § 34 traite de la méthode de la variation des constantes arbitraires pour les équations qui se refusent à l'intégration directe.

L'auteur fait voir, dans le § 35, que, si les formules de transformation des équations canoniques contiennent m constantes arbitraires qui n'entrent ni dans les équations données, ni dans les équations transformées, on peut alors trouver, au moyen des quadratures, n intégrales indépendantes de la forme des équations données.

A partir du § 36, l'auteur consacre spécialement le reste du Mémoire à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans les §§ 36-37, il donne les formules générales pour l'intégration des équations aux dérivées partielles.

Dans les §§ 38-40, il expose une méthode pour obtenir l'intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles ; il donne les conditions de l'existence simultanée de plusieurs équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue, et il développe une méthode pour trouver une intégrale complète de plusieurs équations aux dérivées partielles.

Dans les §§ 41-42, il fait voir comment de l'intégrale complète on déduit l'intégrale générale.

Dans les §§ 43-44, il présente l'intégrale complète sous différentes formes, et expose une méthode de résolution du problème de Cauchy.

L'auteur termine son Mémoire par une courte esquisse historique du développement de la question traitée, et montre que le contenu des §§ 24, 29, 35 et 44 forme une partie de son Mémoire complétement indépendante, non-seulement au point de vue de l'exposition, mais encore au point de vue du fonds même.

Le travail de M. Ermakof mérite une attention toute spéciale, à cause de la clarté de l'exposition, qui forme un tout complet, et de la richesse des matériaux scientifiques que l'on y trouve.

A la fin du Mémoire, l'auteur donne une liste des ouvrages qui contiennent la littérature de cette question.

Nous regrettons de ne pas rencontrer, dans cette liste, les noms des géomètres russes : Ianichefsky, Beyer, Zernof, Jiroukhine, Sokolof. Nous n'y voyons pas non plus mentionnés les travaux de Boole, de Strauch, de Du Bois-Reymond, non plus que le Mémoire de Hoüel, portant le même titre : « *Thèse de Mécanique :* Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique. (1855). »

N. Bougaïef.

GEELMUYDEN (H.). — Om Indflydelsen af Banens Excentricitet paa den Varmemængde, som en Himmellegeme modtager fra Solen (¹).

L'auteur commence par développer l'expression de la quantité de chaleur qu'une planète reçoit du Soleil dans un certain temps assez court, pendant lequel l'excentricité de l'orbite peut être considérée comme constante, spécialement pendant le temps de la révolution; cette expression est, comme on sait, proportionnelle au petit axe de l'ellipse. Il trouve ensuite comment cette expression varie avec l'excentricité, toutes choses égales d'ailleurs. Il en fait l'application, en passant, à la Terre, pendant la période historique astronomique (les 2000 dernières années), durant laquelle on sait que l'excentricité a diminué, et par suite aussi la chaleur annuelle. Il compare cette action avec une autre, due à la même cause, savoir l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune; tandis que la longitude de la Lune a diminué, en 2000 ans, d'environ $\frac{1}{2}$ seconde ou de 0,00000021 de sa propre valeur, la diminution de la chaleur reçue annuellement par la Terre pendant la même période, exprimée également en parties de sa propre valeur, est 65 fois plus grande.

Pour trouver un moyen plus simple de comparer les différents cas, l'auteur recherche d'abord quelle variation il faudrait attribuer à la distance moyenne a pour qu'elle équivalût à une variation

(¹) *Sur l'influence de l'excentricité de l'orbite sur la quantité de chaleur qu'un astre reçoit du Soleil.* (*Archiv for Mathematik*, t. I; Christiania, 1876).

donnée de l'excentricité e, et il trouve

$$\frac{\delta a}{a} = -\frac{1}{2} e \delta e \left(1 - \frac{3}{2} e + \frac{11}{8} e^2 - \ldots\right).$$

Il cherche de même la distance x par laquelle il faudrait remplacer a pour produire dans l'apport de la chaleur annuelle la variation qui est réellement produite par le changement de e en e'; il obtient

$$\frac{x-a}{a} = \frac{(e-e')(e+e')}{4} \left(1 - \frac{3}{2} e + \frac{49e^2 + 39e'^2}{64} - \ldots\right).$$

Afin de pouvoir appliquer ces résultats à la Terre pour un intervalle de temps considérable, il a fait usage des équations données par Le Verrier (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. II), pour le calcul de l'excentricité à une époque quelconque, après avoir toutefois calculé les influences des corrections sensibles apportées depuis la publication de ce travail aux masses des planètes; les valeurs ainsi trouvées ne sont pas cependant notablement différentes des valeurs calculées par M. Le Verrier. L'auteur donne ensuite quelques exemples de l'influence exercée par cette cause sur la chaleur annuelle; il trouve ainsi que la diminution subie par l'excentricité depuis 70000 ans a produit la même diminution de chaleur que si la Terre s'était éloignée annuellement de 0,21 milles géographiques du Soleil. La plus grande valeur que puisse prendre l'excentricité de l'orbite terrestre est, suivant l'auteur, 0,0667; la chaleur reçue par la Terre pendant une révolution dans de telles circonstances surpasse d'autant la chaleur qui serait reçue dans le cas d'une orbite circulaire, que si la Terre eût parcouru un autre cercle d'un rayon plus court de 22213 milles.

M. Geelmuyden étudie enfin le cas des comètes; pour avoir une unité commode, il compare la chaleur reçue par la comète avec la chaleur annuellement reçue par la Terre, en faisant abstraction de l'influence que la nature physique propre d'une sphère peut exercer sous ce rapport. On reconnaît que la plupart des comètes reçoivent, pendant une révolution, à peu près la même quantité de chaleur que la Terre dans une année, que le temps de la révolution soit long ou court; et c'est là une conséquence naturelle de ce que les comètes ne peuvent être visibles pour nous que si la distance périhélie qui, pour la plupart, est un quart du paramètre, est infé-

rieure ou très-peu supérieure au rayon de l'orbite terrestre. L'expression de la chaleur reçue pendant une révolution peut, en effet, se mettre aussi sous une forme telle qu'elle est inversement proportionnelle à la racine carrée du paramètre de l'orbite. Comme une comète reçoit évidemment la plus grande partie de sa chaleur dans la courte période où elle se trouve dans le voisinage du Soleil (ce dont on indique quelques exemples), l'auteur, en terminant, propose cette idée, que les énormes différences de température qui en résultent peuvent être la cause de la consistance singulière observée dans les comètes, ou, en d'autres termes, que leur aspect vaporeux est une conséquence de l'excentricité de leurs orbites; il pense également que toutes les comètes à nous connues sont anciennes dans le système solaire, parce que les nombreuses orbites paraboliques calculées ne sont que des représentations inexactes d'ellipses allongées.

PICARD. — APPLICATION DE LA THÉORIE DES COMPLEXES LINÉAIRES A L'ÉTUDE DES SURFACES ET DES COURBES GAUCHES. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris; juin 1877. In-4°, 40 p.

La première Partie de ce travail est consacrée à l'étude des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. M. Picard est amené à étudier ces courbes par la considération des surfaces réglées, dont les génératrices font partie d'un complexe. Le plan tangent en un point d'une telle surface ne coïncide pas en général avec le plan correspondant à ce point dans le complexe. Sur chaque génératrice il y a deux points seulement jouissant de cette propriété. Le lieu des points ainsi obtenus forme sur la surface une courbe telle, que ses tangentes appartiennent au complexe linéaire dont font partie les génératrices de la surface. Cette courbe est de plus une ligne asymptotique de la surface. Inversement, toute courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire admet le mode précédent de génération. Cela permet d'obtenir immédiatement les équations générales des courbes jouissant de cette propriété. Ces courbes possèdent un certain nombre de points remarquables qui n'appartiennent pas en général à une courbe gauche, nous voulons parler des points où la tangente a avec la

courbe un contact de second ordre. On peut facilement se rendre compte de la forme de la courbe dans le voisinage de ces points. M. Picard termine la première Partie en considérant les courbes unicursales dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Après avoir donné leurs équations, il démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe plane unicursale d'ordre m puisse être considérée comme la projection d'une courbe de degré m dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire ayant son axe perpendiculaire au plan de la courbe plane est que celle-ci ait un point d'inflexion à l'infini. On déduit aisément de là qu'une courbe unicursale d'ordre m, de l'espèce qui nous occupe, a $2(m-3)$ points où le contact de la tangente est du second ordre.

La seconde Partie est consacrée plus particulièrement à l'étude des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire. M. Picard donne d'abord une propriété caractéristique des équations différentielles de Riccati : le rapport anharmonique de quatre solutions quelconques de cette équation est une constante. On déduit facilement de là qu'une génératrice quelconque rencontre quatre lignes asymptotiques données sur la surface en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Si l'on connaît sur une surface réglée deux lignes asymptotiques, la courbe des autres est ramenée à une seule quadrature : c'est ce qui arrive dans le cas où les génératrices de la surface font partie d'un complexe linéaire. On a vu en effet dans la première Partie qu'on pouvait obtenir immédiatement une ligne asymptotique de cette surface ; mais cette ligne, rencontrant en deux points chaque génératrice, peut être comptée pour deux.

Il peut arriver que les génératrices d'une surface réglée appartiennent à une infinité de complexes linéaires. Une ligne asymptotique correspond alors sur la surface à chacun des complexes. On a dans ce cas toutes les lignes asymptotiques. Les résultats généraux sont alors appliqués à certaines surfaces réglées unicursales, en particulier aux surfaces gauches du troisième ordre, et aux surfaces du quatrième ordre ayant pour courbe double une cubique gauche. M. Picard indique ensuite une classe étendue de surfaces réglées algébriques dont toutes les lignes asymptotiques sont algébriques.

Les derniers paragraphes sont consacrés à indiquer l'analogie qui existe entre l'étude des surfaces réglées et celle des surfaces ayant un système de lignes de courbure circulaire. Cette analogie trouve son point de départ dans le théorème suivant : « Un cercle de courbure quelconque de la surface rencontre quatre lignes de courbure de l'autre système en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. » De ce théorème résultent les mêmes conséquences que celles qui ont été signalées pour la recherche des lignes asymptotiques des surfaces réglées. Nous retrouvons ici des surfaces analogues aux surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire : ce sont les surfaces enveloppes d'une série de sphères coupant une sphère donnée sous un angle constant. On connaît *a priori* sur ces surfaces une ligne de courbure du second système rencontrant en deux points chaque cercle de courbure du premier système.

On peut obtenir enfin des surfaces analogues aux surfaces réglées dont les génératrices font partie de deux et par suite d'une infinité de complexes linéaires, en considérant des surfaces enveloppes d'une série de sphères coupant deux sphères données et par suite une infinité de sphères sous des angles constants.

MÉLANGES.

SUR LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE-GÉOMÉTRIQUE DE QUATRE ÉLÉMENTS;

Par C.-W. BORCHARDT (¹).

Le Mémoire sur la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments, que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie en l'année 1858, était un fragment de recherches plus profondes dans lesquelles je me proposais d'étendre à quatre éléments l'algorithme

(¹) *Monatsberichte der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*; 9 novembre 1876.

connu dont l'application répétée donne comme limite la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments.

Déjà à cette époque, j'étais en possession de l'algorithme qui doit être considéré dans le cas de quatre éléments. Je savais que son application répétée conduit à une limite qui est indépendante de l'ordre des éléments et qui est une fonction analytique de ces éléments; je présumais, en outre, que cette limite pourrait s'exprimer à l'aide d'intégrales hyperelliptiques. En reprenant cette ancienne recherche dans ces derniers temps, j'ai réussi à aplanir les difficultés qui m'avaient arrêté jadis, grâce à la théorie des fonctions hyperelliptiques établie par mon ami M. Weierstrass, qui a bien voulu m'en communiquer quelques parties encore inédites, et en particulier celles qui sont relatives à la définition des périodes par les équations différentielles.

1. L'algorithme relatif à quatre éléments, dont je m'étais occupé il y a dix-huit ans, s'obtient de la façon suivante :

Soient a, b, c, e quatre quantités réelles et positives, rangées par ordre de grandeur décroissante et vérifiant l'inégalité

$$a - b - c + e > 0.$$

Formons d'abord la moyenne arithmétique de ces quatre éléments; puis partageons les quatre éléments en deux couples, comme on peut le faire de trois façons différentes, et prenons la moyenne géométrique de chaque couple et la moyenne arithmétique des deux moyennes géométriques qui se correspondent; nous obtenons ainsi, à l'aide des quatre éléments a, b, c, e, les quatre fonctions a_1, b_1, c_1, e_1, données par les équations suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4}(a + b + c + e), \\ b_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{ce}), \\ c_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ac} + \sqrt{be}), \\ e_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ae} + \sqrt{bc}). \end{aligned}\right.$$

Une permutation des éléments a, b, c, e entre eux ne produit qu'une permutation des quantités b_1, c_1, e_1 entre elles.

L'analogie de cet algorithme avec celui qui conduit à la moyenne arithmétique-géométrique de deux quantités résulte déjà des équations précédentes ; elle devient peut-être plus évidente encore si l'on présente ces équations sous une autre forme. De même que les équations

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}$$

de la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments sont comprises dans l'équation unique

$$2(a_1 + \varepsilon b_1) = (\sqrt{a} + \varepsilon\sqrt{b})^2,$$

dans laquelle on attribue à ε la double valeur $\varepsilon = \pm 1$, de même les équations (1) sont comprises dans l'équation unique

$$(2) \quad 4(a_1 + \varepsilon b_1 + \varepsilon' c_1 + \varepsilon\varepsilon' e_1) = (\sqrt{a} + \varepsilon\sqrt{b} + \varepsilon'\sqrt{c} + \varepsilon\varepsilon'\sqrt{e})^2,$$

dans laquelle on donne à chacune des quantités ε, ε' la double valeur $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$.

Si l'on applique de nouveau l'algorithme (1) aux quantités a_1, b_1, c_1, e_1, on en déduit quatre nouvelles quantités a_2, b_2, c_2, e_2, qui dépendent des quantités a_1, b_1, c_1, e_1 comme celles-ci dépendent de a, b, c, e, et ainsi de suite ; soient a_n, b_n, c_n, e_n les quantités obtenues après n opérations. Quand n augmente indéfiniment, les quatre quantités a_n, b_n, c_n, e_n tendent vers la même limite g. On démontre, en effet, que la différence $a-e$ entre la plus grande et la plus petite des quatre quantités devient à chaque opération plus petite que la moitié de sa valeur précédente, de façon que

$$a_1 - e_1 < \frac{1}{2}(a-e), \quad a_2 - e_2 < \frac{1}{2}(a_1 - e_1), \quad \ldots,$$

et par conséquent

$$a_n - e_n < \frac{1}{2^n}(a-e);$$

d'où il résulte, pour $n = \infty$,

$$a_n = b_n = c_n = e_n = g.$$

Dans le cas de la moyenne arithmétique-géométrique de deux

éléments, l'algorithme gagne en clarté, si l'on adjoint aux deux quantités $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $b_1 = \sqrt{ab}$ une troisième quantité $b'_1 = \frac{1}{2}(a-b)$, qui, exprimée en fonction des quantités correspondantes a_1 et b_1, prend la valeur $b'_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$. Si, à tous les degrés des opérations, on introduit des quantités formées de la même manière, il faut adjoindre aux éléments donnés a, b la racine carrée $b' = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Par analogie avec ce qui précède, on aura, dans le cas de quatre éléments, à adjoindre aux quatre quantités a_1, b_1, c_1, e_1, définies par l'algorithme (1), six nouvelles quantités b'_1, c'_1, e'_1 et b''_1, c''_1, e''_1, dont les expressions ne diffèrent des quantités (1) que par les signes, et qui sont données par les équations

$$b'_1 = \frac{1}{4}(a+b-c-e), \quad b''_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ab} - \sqrt{ce}),$$
$$c'_1 = \frac{1}{4}(a-b+c-e), \quad c''_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ac} - \sqrt{be}),$$
$$e'_1 = \frac{1}{4}(a-b-c+e), \quad e''_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ae} - \sqrt{bc}).$$

Si l'on exprime ces quantités en fonction des quantités correspondantes a_1, b_1, c_1, e_1, et si l'on introduit, à chaque degré des opérations, les quantités formées de la même manière, on est amené à adjoindre aux éléments donnés a, b, c, e les quantités b', c', e' et b'', c'', e'' ayant les valeurs suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} b' = \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ab}} + \sqrt{\mathfrak{ce}}), & b'' = \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ab}} - \sqrt{\mathfrak{ce}}), \\ c' = \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ac}} + \sqrt{\mathfrak{be}}), & c'' = \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ac}} - \sqrt{\mathfrak{be}}), \\ e' = \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ae}} + \sqrt{\mathfrak{bc}}), & e'' = \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ae}} - \sqrt{\mathfrak{bc}}), \end{cases}$$

dans lesquelles

$$(3')\quad \begin{cases} \mathfrak{a} = a + b + c + e, \\ \mathfrak{b} = a + b - c - e, \\ \mathfrak{c} = a - b + c - e, \\ \mathfrak{e} = a - b - c + e. \end{cases}$$

Il est digne de remarque que, dans les carrés de ces six quantités adjointes, il n'entre qu'une irrationnelle $\sqrt{abce}$.

2. La quantité g, définie plus haut comme limite de l'algorithme (1), répété un nombre infini de fois, est une certaine fonction analytique des quatre éléments a, b, c, e. Et d'abord cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(4)\quad f(a,b,c,e)=f\left(\frac{a+b+c+e}{4}, \frac{\sqrt{ac}+\sqrt{ce}}{2}, \frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{2}, \frac{\sqrt{ae}+\sqrt{bc}}{2}\right);$$

ensuite elle est une fonction homogène du premier degré des quatre éléments ; enfin, si les quatre éléments prennent une valeur commune a, elle devient égale à cette même valeur a. Réciproquement ces trois conditions définissent complétement la limite g. En effet, l'équation fonctionnelle est vérifiée non-seulement par g, mais encore par toute fonction de g; et réciproquement, toute fonction f des quatre éléments a, b, c, e, vérifiant cette équation, est une fonction de g. Si, en outre, f doit être une fonction homogène du premier ordre des quatre éléments, on aura $f = \mathfrak{m}g$, où $\mathfrak{m}$ est un facteur numérique arbitraire, qui, d'après la troisième condition, doit être égal à l'unité.

Au lieu de déterminer la fonction g des quatre éléments a, b, c, e par l'équation fonctionnelle (4) et les deux autres conditions, on peut la définir par un système d'équations différentielles, comme cela est arrivé pour la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments dans mon Mémoire sur ce sujet ([1]). Pour pouvoir mieux comparer entre eux les résultats correspondants, je commencerai par énoncer sous une forme un peu différente ceux qui sont relatifs au cas de ces deux éléments.

Soit g la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments a, b ; $\frac{g}{a}$ est alors une fonction homogène de degré zéro de a, b. Introduisons comme nouvelle variable le rapport des deux éléments a, b,

$$p=\frac{b}{a},$$

([1]) *Journal für Mathematik*, Bd. 58, p. 131-132, éq. (9), (10).

de façon que $\frac{g}{a}$ dépende uniquement de p, et écrivons l'équation

$$(5) \qquad d \log \frac{g}{a} = \mathrm{P}\, d \log p,$$

qui permet de déduire P de g par une différentiation; dans ces conditions, le résultat donné par moi, dans le Mémoire de l'année 1858 cité plus haut, peut s'énoncer de la manière suivante : La fonction P de p satisfait à une équation différentielle du premier ordre et du second degré, de sorte que $d\mathrm{P}$ est égal au produit de $d \log p$ par une expression entière du second degré en P, dont les coefficients sont des fonctions *rationnelles* de p. Au moyen de cette équation différentielle, qui définit P comme fonction de p, et d'une quadrature indiquée par l'équation (5), on obtient la limite g.

Dans le cas de la moyenne arithmétique-géométrique g de quatre éléments a, b, c, e, le résultat correspondant s'exprime de la façon suivante :

Avec les quatre éléments et les six quantités qui leur ont été adjointes dans le n° 1, formons les trois variables

$$(6) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{eb''}{cb'} = \dfrac{e}{c} \cdot \dfrac{\sqrt{\mathfrak{ab}} - \sqrt{\mathfrak{ce}}}{\sqrt{\mathfrak{ab}} + \sqrt{\mathfrak{ce}}}, \\[2ex] q = \dfrac{bc''}{ec'} = \dfrac{b}{e} \cdot \dfrac{\sqrt{\mathfrak{ac}} - \sqrt{\mathfrak{be}}}{\sqrt{\mathfrak{ac}} + \sqrt{\mathfrak{be}}}, \\[2ex] r = \dfrac{ce''}{be'} = \dfrac{c}{b} \cdot \dfrac{\sqrt{\mathfrak{ae}} - \sqrt{\mathfrak{bc}}}{\sqrt{\mathfrak{ae}} + \sqrt{\mathfrak{bc}}}, \end{cases}$$

dans lesquelles $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{e}$ sont les quantités auxiliaires définies par les équations (3′); $\frac{g}{a}$, qui est une fonction homogène de degré zéro de a, b, c, e, dépendra uniquement de p, q, r. Si nous posons l'équation

$$(7) \qquad d \log \frac{\mathrm{G}}{a} = \mathrm{P}\, d \log p + \mathrm{Q}\, d \log q + \mathrm{R}\, d \log r,$$

qui détermine P, Q, R comme les dérivées partielles de g, ces trois fonctions P, Q, R satisfont à trois équations simultanées aux différentielles totales du premier ordre et du second degré, de sorte que





chacune des différentielles dP, dQ, dR est égale à une expression linéaire et homogène en $d\log p$, $d\log q$, $d\log r$, entière et du second degré en P, Q, R, dont les coefficients sont des fonctions *rationnelles* de p, q, r.

Au moyen de ce système d'équations aux différentielles totales qui définissent P, Q, R comme fonctions de p, q, r et d'une quadrature indiquée par l'équation (7), on obtient la limite g.

3. Cette quantité g, considérée d'abord comme la limite de l'algorithme (1) répété un nombre infini de fois, puis définie par le système précédent d'équations différentielles comme fonction analytique des éléments a, b, c, e, peut d'un autre côté s'exprimer par des intégrales hyperelliptiques. Mais le passage des équations différentielles aux intégrales, qui, dans le cas de la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments, est facilité par notre connaissance exacte des fonctions hypergéométriques, présente dans le cas présent de grandes difficultés.

Dans ce cas, c'est également l'inverse de la valeur de g qui peut se représenter par des intégrales complètes. On peut, en effet, avec les éléments donnés a, b, c, e et les quantités adjointes (3), former quatre nouvelles quantités α_0, α_1, α_2, α_3, telles que, si l'on considère la fonction entière du cinquième degré

$$R(x) = x(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3),$$

la valeur inverse de g soit donnée par l'équation

$$\frac{4\pi^2}{g} = \int_0^{\alpha_3} dx' \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx \, \frac{x - x'}{\sqrt{R(x)\,R(x')}}.$$

La détermination non encore indiquée des quantités α est comprise dans le théorème suivant :

Déduisons des quatre éléments a, b, c, e quatre quantités a_1, b_1, c_1, e_1, au moyen de l'algorithme

$$4a_1 = a + b + c + e,$$
$$2b_1 = \sqrt{ab} + \sqrt{ce},$$
$$2c_1 = \sqrt{ac} + \sqrt{be},$$
$$2e_1 = \sqrt{ae} + \sqrt{bc};$$

de celles-ci déduisons, par le même algorithme, quatre nouvelles quantités a_2, b_2, c_2, e_2, et ainsi de suite à l'infini; les quatre quantités a_n, b_n, c_n, e_n tendent, quand n croît indéfiniment, vers une même limite g, dont la valeur se détermine comme il suit :

Si nous posons

$$\mathfrak{a} = a + b + c + e,$$
$$\mathfrak{b} = a + b - c - e,$$
$$\mathfrak{c} = a - b + c - e,$$
$$\mathfrak{e} = a - b - c + e;$$

$$2b' = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{e}}, \quad 2b'' = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - \sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{e}},$$
$$2c' = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} + \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{e}}, \quad 2c'' = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} - \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{e}},$$
$$2e' = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} + \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \quad 2e'' = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} - \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}};$$

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta = (abce\,b'c'e'\,b''c''e'')^{\frac{1}{4}}, \\ \alpha_0 = \dfrac{acb'}{\Delta}, \quad \alpha_1 = \dfrac{cc'e'}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \dfrac{ac''e'}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \dfrac{b'c'c''}{\Delta}, \end{cases}$$

$$(9) \qquad R(x) = x(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3).$$

on aura

$$(10) \qquad \frac{4\pi^2}{g} = \int_0^{\alpha_0} dx' \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx \frac{x - x'}{\sqrt{R(x)\,R(x')}}.$$

4. Le résultat que je viens d'énoncer, et qui correspond exactement à la détermination connue de la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments, peut aussi s'établir d'une manière relativement élémentaire, si, au lieu de prendre pour point de départ l'algorithme donné plus haut, on s'appuie sur la théorie des intégrales hyperelliptiques de M. Weierstrass et des fonctions ϑ qui s'y rapportent.

Dans la théorie des fonctions hyperelliptiques à quatre périodes, il y a quatre intégrales complètes réelles différentes, qui se distinguent les unes des autres en partie par leurs limites, en partie par les numérateurs qui multiplient sous le signe d'intégration l'inverse de la racine carrée de la fonction du cinquième degré $R(x)$. A chaque transformation, chacune de ces quatre intégrales complètes se partage en une somme de deux intégrales, et tant que



l'on ne considère que les intégrales simples, on ne trouve aucune fonction qui se transforme en elle-même, même en faisant abstraction des facteurs qui pourraient s'introduire. On obtient seulement une pareille fonction se reproduisant par la transformation, en prenant le déterminant des quatre intégrales complètes, ou, ce qui est la même chose, l'intégrale double précédente; on arrive de cette façon à la fonction qui, dans les fonctions hyperelliptiques à quatre périodes, correspond à la moyenne arithmétique-géométrique dans les fonctions elliptiques.

La détermination de la moyenne arithmétique-géométrique de quatre éléments peut, d'après cela, se déduire de la transformation du second degré des fonctions hyperelliptiques à quatre périodes, à la condition d'appliquer cette transformation au déterminant des quatre intégrales complètes réelles, et d'introduire comme modules des intégrales, au lieu des quantités considérées par Richelot, les rapports des carrés des valeurs que l'on obtient en annulant les deux arguments des quatre fonctions ϑ que l'on déduit de la fonction ϑ principale en altérant chaque argument de sa période réelle. Si l'on égale, en effet, à a, b, c, e les produits par g des carrés des valeurs que prennent ces quatre fonctions ϑ pour des valeurs nulles des arguments, et à a_1, b_1, c_1, e_1 les carrés des valeurs que prennent les quatre fonctions ϑ transformées (¹) pour des valeurs nulles des arguments, il existe entre ces deux séries de quatre quantités les quatre relations qui ont été réunies plus haut dans la relation unique

$$4(a_1 + \varepsilon b_1 + \varepsilon' c_1 + \varepsilon\varepsilon' e_1) = (\sqrt{a} + \varepsilon\sqrt{b} + \varepsilon'\sqrt{c} + \varepsilon\varepsilon'\sqrt{e})^2.$$

5. L'algorithme qui fait l'objet de cette Communication peut s'étendre à des éléments dont le nombre est égal à une puissance quelconque de 2.

Mais c'est seulement pour la première et la seconde puissance de 2, c'est-à-dire pour 2 ou 4 éléments, cas dans lequel on est conduit à des fonctions elliptiques et hyperelliptiques à quatre périodes, que l'algorithme possède l'importante propriété de ne

(¹) C'est-à-dire les quatre fonctions ϑ dans lesquelles τ_{11}, τ_{12} τ_{22} ont été remplacés par $2\tau_{11}$, $2\tau_{12}$, $2\tau_{22}$.

pas changer de valeur quand on permute les éléments entre eux. Si l'on exige cette propriété pour l'algorithme, l'extension de l'algorithme à quatre éléments est la seule possible.

Le nom de *moyenne arithmétique-géométrique* n'est plus applicable à l'extension de l'algorithme à un plus grand nombre d'éléments; car, dans ce cas de 8 éléments par exemple, l'algorithme n'a un sens que si l'on a déterminé à l'avance un certain ordre de succession des éléments.

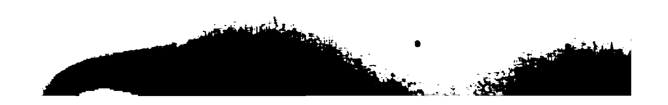
Dans le cas d'éléments réels et positifs au nombre de 2^ρ, on peut également définir l'algorithme analogue par une équation unique remplaçant un système de 2^ρ équations. Soient, en effet, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho$ des lettres désignant l'unité positive ou négative, et μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_\rho$ des indices pouvant prendre chacun les valeurs $0, 1$; considérons deux séries de 2^ρ quantités $a_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho}$ et $a'_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho}$, liées les unes aux autres par les 2^ρ équations résultant de l'équation

$$(11)\quad 2^\rho \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho} \varepsilon_1^{\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_2} \ldots \varepsilon_\rho^{\mu_\rho} a'_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho} = \left(\sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho} \varepsilon_1^{\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_2} \ldots \varepsilon_\rho^{\mu_\rho} \sqrt{a_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho}} \right)^2,$$

lorsqu'on y met pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho$ toutes les combinaisons d'unités positives et négatives. Cet algorithme donne pour une des quantités a' la moyenne arithmétique de tous les éléments a, et pour chacune des $2^\rho - 1$ quantités a' restantes la moyenne arithmétique de $2^{\rho-1}$ moyennes géométriques de deux des quantités a. Ces $2^\rho - 1$ quantités restantes ne se transforment plus les unes dans les autres par permutation des éléments a entre eux; elles se transforment en des quantités différentes des quantités a', comme on peut le voir immédiatement en remarquant que, pour $\rho > 2$, il est impossible de former une fonction de 2^ρ éléments qui, par permutation des éléments entre eux, ne prenne pas plus de $2^\rho - 1$ valeurs différentes. Pour l'algorithme ainsi généralisé, on démontre comme précédemment que la différence entre la plus grande et la plus petite des quantités a' est plus petite que la moitié de la différence correspondante pour les éléments a, d'où il résulte que, par la répétition indéfinie du même algorithme, les 2^ρ quantités

$$a^{(n)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho}$$

tendent vers une même limite g, quand n croît indéfiniment.



La limite g de l'algorithme généralisé n'est pas donnée, en général, par les fonctions abéliennes avec 2^ρ périodes; on ne l'obtient au moyen de ces fonctions que dans des cas particuliers.

Désignons, en effet, par $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_\rho)$ la fonction ϑ principale de Weierstrass, définie par l'équation

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \Sigma e^{(2\mathfrak{f}+\mathfrak{F})\pi\sqrt{-1}},$$

dans laquelle

$$\mathfrak{f} = n_1 v_1 + n_2 v_2 + \ldots + n_\rho v_\rho,$$
$$\mathfrak{F} = n_1^2 \tau_{11} + 2n_1 n_2 \tau_{12} + \ldots + n_\rho^2 \tau_{\rho\rho},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de n_1, $n_2, \ldots, n_\rho$, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Si l'on pose

$$(12)\qquad a_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho} = g\left[\vartheta\left(\frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_2}{2}, \ldots, \frac{\mu_\rho}{2}; \tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{\rho\rho}\right)\right]^2,$$

$$(13)\qquad a'_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho} = g\left[\vartheta\left(\frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_2}{2}, \ldots, \frac{\mu_\rho}{2}; 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, \ldots, 2\tau_{\rho\rho}\right)\right]^2,$$

les grandeurs a, a' ainsi définies satisfont aux 2^ρ relations comprises dans l'équation (11), mais elles ne fournissent qu'une solution particulière; car les quantités a définies par l'équation (12) ne dépendent que de $\frac{\rho(\rho+1)}{2}+1$ quantités g, $\tau_1, \ldots, \tau_{\rho\rho}$, de sorte qu'il est nécessaire qu'il y ait

$$2^\rho - \frac{\rho(\rho+1)}{2} - 1$$

relations entre les 2^ρ éléments a de l'algorithme (11) pour que cette solution particulière (12) puisse s'appliquer. Déjà dans le cas de $\rho = 3$, c'est-à-dire pour 8 éléments a, il faut qu'il y ait une relation entre ces éléments pour que l'application répétée de l'algorithme (11) conduise à une limite que l'on puisse exprimer par des intégrales abéliennes.

Si ces

$$2^\rho - \frac{\rho(\rho+1)}{2} - 1$$

relations n'ont pas lieu entre les éléments a de l'algorithme (11),

l'application répétée de l'algorithme conduit encore à une limite; l'avenir nous apprendra de quelle nature sont les fonctions transcendantes au moyen desquelles cette limite peut se représenter.

HEXAGRAMME DE PASCAL;

PAR M. E. DEWULF.

M. Joseph Veronese, étudiant à l'Université de Rome, a présenté, le 8 avril 1877, à l'Académie royale des Lincei, un intéressant Mémoire sur l'hexagramme de Pascal. Il serait difficile de donner une analyse succincte de ce beau travail, sur lequel nous comptons, du reste, revenir à propos des résultats élégants obtenus par M. Cremona en reliant cette question à la théorie des surfaces de troisième ordre; nous nous proposons seulement ici de faire apprécier l'étude du jeune géomètre italien, en donnant, d'après lui, un aperçu historique de la question qu'il a traitée.

Pascal, encore enfant, a trouvé, en 1640, le célèbre théorème qui établit la condition pour que six points soient situés sur une même courbe du second ordre. Jusqu'en 1806, aucun géomètre ne chercha à étendre ce théorème; Brianchon en déduisit alors la condition, non moins importante, pour que six droites soient tangentes à une même courbe de la seconde classe. Depuis lors, quelques géomètres, des plus renommés de notre siècle, ont fait de cette question l'objet de leurs recherches.

En 1828, Steiner démontra que les 60 droites de Pascal, qui correspondent aux 60 hexagones que l'on peut former avec 6 points d'une conique, se coupent 3 à 3 en 20 points G, que l'on a désignés sous le nom de *points de Steiner*. Il crut que ces 20 points étaient placés 4 à 4 sur 5 droites concourantes en un même point; mais Plücker montra que ces 20 points G sont situés 4 à 4 sur 15 droites, qui seront désignées sous le nom de *droites de Steiner-Plücker*.

Otto Hesse parvint à démontrer que les 20 points de Steiner sont conjugués 2 à 2 par rapport à la conique fondamentale des six points, et il montra que la figure de Steiner est identique à celle

qui est formée par 3 triangles perspectifs 2 à 2 par rapport à un même centre. Les 9 côtés des trois triangles, les 3 droites concourantes au centre commun et les 3 droites de perspective (axes d'homologie) représentent les 15 droites de Steiner-Plücker.

Cayley étudia la même figure et chercha spécialement à représenter toutes ces droites par des notations abrégées; enfin Staudt et Grassmann dirigèrent aussi leurs recherches vers le même objet.

Les mathématiciens anglais firent, à leur tour, des découvertes sur ce sujet, et elles sont comme les réciproques de celles de leurs devanciers français et allemands. Kirkman démontra que les 60 droites de Pascal ne se coupent pas seulement 3 à 3 en 20 points G, mais qu'elles se rencontrent encore en 60 autres points, connus sous le nom de *points de Kirkman*. Il démontra aussi que ces 60 points sont alignés 2 à 2 sur 90 droites, dont chacune passe respectivement par le point d'intersection de 2 des 15 côtés obtenus au moyen des 6 points de la conique fondamentale. Cayley et Salmon trouvèrent en même temps que les 60 points de Kirkman sont situés 3 à 3 sur 20 droites (droites de Cayley-Salmon); puis Salmon démontra que ces 20 droites se coupent 4 à 4 en 15 points (points de Salmon), et que chacune d'elles passe par un seul point de Steiner.

Dès 1868, Hesse fit remarquer une certaine réciprocité entre les droites de Pascal et les points de Kirkman, entre les points de Steiner et les droites de Cayley-Salmon, entre les droites de Steiner-Plücker et les points de Salmon. Mais ni ce géomètre, ni Schröter ne parvinrent à rien de net à cet égard.

En 1874, Bauer s'occupa des mêmes figures en partant de la considération de deux triangles 123, 456 inscrits dans une conique et en les regardant comme conjugués par rapport à une même conique Σ. Il trouva que les deux points de Steiner qui correspondent au symbole 123 (123 étant les chiffres de rang impair qui restent fixes dans les six hexagones des droites de Pascal de ces deux points) ont pour droites polaires par rapport à la conique Σ les deux droites de Cayley-Salmon qui passent respectivement par ces points.

Tel était l'état des découvertes faites sur la figure de l'hexagramme de Pascal, lorsque le jeune géomètre italien entreprit de l'étudier à son tour. Il démontre que les 60 droites de Pascal se divisent en 6 groupes de 10 droites, qui renferment leurs 10 points de

Kirkman correspondants et qui sont polaires de ces 10 points par rapport à une certaine conique π, et qu'il existe, par conséquent, dans l'hexagramme complet, 6 coniques π ; 5 de ces groupes déterminent le sixième. Il démontre, en outre, qu'il n'existe pas seulement un système $[kp]$ de 60 droites de Pascal et de 60 points de Kirkman, mais qu'il existe une infinité de ces systèmes, dont chacun se compose de 6 groupes analogues à ceux du système $[kp]$, qui donnent lieu à 6 autres coniques ; 5 de ces coniques déterminent un groupe du système précédent et un du système suivant.

La figure des points de Steiner et des droites de Cayley est commune à tous ces systèmes, c'est-à-dire que les 60 points d'un système sont situés 3 à 3 sur les 20 droites de Cayley-Salmon, et que 60 droites du même système se coupent 3 à 3 aux 20 points de Steiner.

Ces systèmes sont liés, en outre, par certains points et certaines droites fixes, et par certaines involutions engendrées par les 60 droites et les 60 points des systèmes en nombre infini autour des points de Steiner et sur les droites de Cayley-Salmon.

Le Mémoire de M. Veronese est une monographie complète de l'hexagramme mystique.

TERME GÉNÉRAL D'UNE SÉRIE QUELCONQUE DÉTERMINÉE A LA FAÇON DES SÉRIES RÉCURRENTES ;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

Une série est déterminée à la façon des séries récurrentes lorsqu'on connaît les valeurs de ses premiers termes, ainsi qu'une équation du premier degré, absolument quelconque, liant chaque terme de cette série à un ou plusieurs des termes précédents.

Cette équation du premier degré n'étant assujettie, ni à présenter un nombre fixe de termes, ni à avoir tous ses coefficients constants, ni à être homogène par rapport aux termes de la série, on voit que ce mode de détermination n'implique rien touchant la nature

de la série et que toute série peut être ainsi déterminée. Aussi l'objet du Mémoire que nous analysons est-il, non point l'étude d'une espèce particulière de série, mais la résolution d'un problème général, qui peut se présenter à propos d'une série quelconque.

Ce problème consiste à trouver le terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes. C'est un problème fort important, car sa fréquence ne le cède en rien à sa généralité. Un très-grand nombre de séries se présentent, en effet, spontanément déterminées à la façon des séries récurrentes : telles sont les séries récurrentes proprement dites, les séries récurrentes de Lagrange, les séries sommées par Stirling; telles sont encore les séries formées par les intégrales qui se ramènent les unes aux autres, par les termes des réduites des fractions continues, par les fonctions Y_μ et Z_ν, par les X_n de Legendre, par les nombres de Bernoulli, par les dérivées successives des fonctions algébriques, par celles des fonctions qui satisfont aux équations différentielles linéaires de tous genres, etc., etc.

II.

Ce problème n'a été résolu jusqu'à présent que pour les seules séries récurrentes proprement dites, c'est-à-dire que dans le cas, extrêmement particulier, où l'équation du premier degré présente un nombre fixe de termes, a tous ses coefficients constants et se trouve homogène par rapport aux termes de la série.

Pour le résoudre dans sa pleine généralité, M. Désiré André fait observer d'abord que, si l'on représente par U_1, U_2, U_3, ... les termes de la série, l'équation du premier degré qui lie chaque terme à un ou plusieurs des précédents peut toujours s'écrire

$$U_n = u_n + \sum_1^{\lambda_n} {}_k A_k^{(n)} U_{n-k},$$

u_n désignant une quantité connue fonction de n; λ_n un entier connu fonction de n et au plus égal à $n-1$; $A_k^{(n)}$ un coefficient connu, fonction de n et de k.

Ensuite, se fondant sur trois lemmes très-faciles à établir, sinon

évidents, il montre que l'on a

$$U_n = \sum_{p}^{n}{}_{1} \Psi(n, p)\, u_p,$$

et, en même temps,

$$\Psi(n, p) = \Sigma A_{k_1}^{(n_1)} A_{k_2} A_{k_3}^{(n_3)} \ldots,$$

la caractéristique Σ s'étendant, dans cette dernière expression, à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $n_1, n_2, n_3, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots$ qui satisfont aux conditions

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 + \ldots &= n - p, \\ n_1 &= k_1 + p, \\ n_t &= k_t + n_{t-1}, \\ 0 < k_t &\leqq \lambda_{n_t}, \end{aligned}$$

et l'expression $\Psi(n, n)$ devant être regardée comme égale à l'unité.

On voit que les formules qui précèdent font connaître, dans tous les cas, l'expression de U_n, c'est-à-dire résolvent pleinement le problème proposé.

III.

Lorsqu'on applique les formules générales qui précèdent, on est conduit, suivant les cas, à des calculs et à des résultats fort différents les uns des autres. Les différences qu'ils présentent proviennent des formes différentes qu'affecte la relation du premier degré, de façon qu'on est naturellement amené à énumérer, ou, pour mieux dire, à classer toutes ces formes.

Pour trouver les fondements de cette classification, il suffit de remarquer que l'équation du premier degré renferme trois arguments distincts, savoir, n dans λ_n, n et c dans $A_k^{(n)}$. Il se peut que $A_k^{(n)}$ dépende de n ou n'en dépende pas, dépende de k ou n'en dépende pas ; il se peut que λ_n varie avec n, ou bien, à partir d'une certaine valeur de n, devienne absolument constant.

Ces diverses alternatives, combinées entre elles de toutes les manières possibles, déterminent huit cas distincts, ni plus ni moins, dans chacun desquels il convient d'abord de voir ce que devient la formule générale, ensuite de l'appliquer à un exemple particulier.



IV.

Dans le premier cas, l'équation du premier degré dépend en réalité des trois arguments, et l'expression de U_n ne se simplifie pas. C'est à ce cas que se ramènent la détermination de la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers, celle des coefficients d'une équation en fonction des sommes des puissances semblables des racines, celle du nombre des substitutions irréductibles, c'est-à-dire des permutations de n lettres où aucune lettre n'est à son rang. M. Désiré André trouve que ce dernier nombre, qu'il désigne par I_n, est donné par la formule

$$I_n = n!\sum_{0}^{n}{}_t \frac{(-1)^t}{t!}.$$

Dans le deuxième cas, $A_k^{(n)}$ dépend de n et de k; mais, à partir d'un certain rang, λ_n devient constant. L'expression de U_n ne se simplifie pas, et les exemples abondent. C'est à ce cas, en effet, que se ramènent la plupart des intégrales, les fonctions Y_μ et Z_ν, les X_n de Legendre, les séries étudiées par Stirling, etc., etc. L'auteur considère, en particulier, une série pour laquelle on a

$$U_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} + e^n U_{n-1} + e^{2n-1} U_{n-2} + e^{3n-3} U_{n-3},$$

et il donne l'expression de son terme général : 1° à l'aide des nombres des combinaisons régulières; 2° sous la forme d'une somme de dérivées.

Le troisième cas ne diffère du premier qu'en ce que $A_k^{(n)}$ est indépendant de k. L'expression générale de U_n s'y simplifie légèrement. Mais les Mathématiques actuelles ne présentent pour ainsi dire aucune série déterminée de cette façon. L'auteur en détermine une définie par les deux équations

$$U_1 = u_1 = 1, \quad U_n = n\sum_{1}^{\varepsilon}{}_k U_{n-k},$$

dans la seconde desquelles ε désigne le plus petit entier, positif et non nul, qui rende $n - \varepsilon - 1$ multiple de 3; et il fait connaître l'expression de son terme général.

L'équation du premier degré se simplifie encore un peu dans le quatrième cas, où $A_k^{(n)}$ dépend de n, mais non pas de k, et où λ_n devient constant à partir d'une certaine valeur de n. Dans l'impossibilité, absolue peut-être, de rencontrer un exemple, M. Désiré André a imaginé une série pour laquelle l'équation du premier degré s'écrit ainsi

$$U_n = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a}} (U_{n-1} + U_{n-2}),$$

a désignant un nombre positif quelconque. Il donne l'expression de U_n et montre qu'avec les valeurs qu'il choisit pour U_1 et U_2 ce terme U_n tend, lorsque n croît au delà de toute limite, vers la valeur déterminée $\frac{a}{3}$.

Dans le cinquième cas, λ_n dépend de n, mais $A_k^{(n)}$ ne dépend que de k; d'ordinaire, l'expression générale de U_n ne s'y simplifie pas. Les exemples manquent encore. L'auteur étudie la série définie par les équations

$$U_1 = 1, \quad U_n = \sum_{1}^{n-1} k^2 U_{n-k};$$

il donne l'expression de son terme général d'abord sous forme combinatoire, ensuite sous forme d'une simple dérivée d'ordre $n-1$.

C'est au sixième cas, où λ_n et $A_k^{(n)}$ sont tous deux indépendants de n, que se rapportent les séries récurrentes proprement dites, ainsi que les séries récurrentes de Lagrange, au moins pour la plupart. Dans ce cas, la formule qui donne en général U_n se simplifie considérablement. L'auteur obtient, en effet, pour U_n deux expressions, l'une combinatoire, l'autre sous forme de dérivée. Grâce à ces expressions, le terme général de toute série récurrente peut être calculé sans qu'on ait à résoudre préalablement aucune équation algébrique. En appliquant ces résultats à la détermination de la somme S_n des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^m + T_1 x^{m-1} + T_2 x^{m-2} + \ldots + T_m = 0,$$

M. Désiré André parvient, pour cette somme, à quatre expressions différentes, dont l'une constitue la formule de Waring. La plus

remarquable des trois autres formules nous paraît être celle-ci

$$S_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{X^n - X^{\theta-1}}{X-1}Y\right)\right]_{x=0},$$

dans laquelle on désigne par X le polynôme

$$-T_1 x - T_2 x^2 - T_3 x^3 - \ldots - T_m x^m,$$

par Y la dérivée première, par rapport à x, de ce même polynôme X, et par θ la partie entière du quotient de $n+m-1$ divisé par m.

Lorsqu'on suppose $A_k^{(n)}$ indépendant de n et de k, mais λ_n variant avec n, on se trouve dans le septième cas de la classification; l'expression générale de U_n ne se simplifie point, et l'on ne rencontre presque aucun exemple de séries. L'auteur étudie la série définie par les équations

$$U_1 = 1, \quad U_n = a\sum_1^{n-1}{}_k U_{n-k},$$

dont le terme général s'exprime très-simplement.

Enfin le huitième cas est celui où λ_n et $A_k^{(n)}$ ne dépendent d'aucun des trois arguments. Le terme général s'exprime alors d'une façon très-simple et sous deux formes distinctes. C'est dans ce cas que rentrent toutes les séries récurrentes proprement dites et toutes les séries récurrentes de Lagrange non comprises dans le sixième cas. C'est à ce cas encore que se rapportent toutes les séries de Cassini. Comme application, l'auteur donne une double expression du terme général de la série définie par les trois équations

$$U_1 = 1, \quad U_2 = aU_1, \quad U_k = a(U_{n-1} + U_{n-2}),$$

laquelle est une série récurrente proprement dite, fort analogue aux séries de Cassini.

NOTE SUR UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION DES SÉRIES, D'APRÈS M. LECLERT.

M. E. Catalan a bien voulu nous signaler une élégante méthode de transformation des séries, inventée par M. Leclert, conducteur des Ponts et Chaussées à Neufchâtel en Bray. L'exposé de cette méthode fait l'objet d'un Mémoire présenté en avril 1865, à l'Académie Royale de Belgique, longtemps avant la publication de celui de M. Lindman, analysé dans le numéro de février 1877. Appliquée en particulier à la série

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots,$$

elle conduit rapidement à un grand nombre de décimales exactes. Ainsi M. Catalan parvient, en quelques lignes de calculs, à la valeur

$$G = 0,9159655941,$$

qui aurait exigé environ *cinquante mille* termes de la série. Quelques pages plus loin, il donne

$$G = 0.91596559417721,$$

qui aurait exigé environ *cinq millions* de termes.

Depuis la publication du Mémoire de M. Catalan, cette constante G a été encore déterminée par M. Breton (de Champ).

Nous allons résumer, d'après le Mémoire de M. Catalan, les principes de la méthode de transformation des séries due à M. Leclert.

H. Brocard.

Considérons une série convergente ayant pour somme ou *limite* s, de manière que

$$s = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_0^{\infty} a_n.$$

Soit a_n une fonction de n, telle que le produit $n a_n$ tende vers zéro

lorsque n augmente indéfiniment, et telle, en outre, que la quantité

$$(2)\qquad a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

tende, en même temps, vers une limite A *différente de zéro*.

Posons

$$(3)\qquad u'_n = \left(1+\frac{a_n}{A}\right)u_n.$$

Ces conditions assurent la convergence de la *série dérivée*

$$(4)\qquad u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots,$$

dont la somme s' satisfait alors à la relation

$$(A)\qquad s = \frac{\alpha_1 u_1}{A} + s',$$

comme on peut l'établir aisément.

Lorsque $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda\,(\lambda < 1)$, on peut prendre pour α_n soit l'unité, soit une fraction qui tende vers l'unité. Dans les deux cas, $A = 1 - \lambda$, et conséquemment

$$(5)\qquad s = \frac{\alpha_1 u_1}{1-\lambda} + s'.$$

Si $\lambda < 1$, on peut poser

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda + \frac{1}{\varphi(n)},$$

$\varphi(n)$ étant une fonction *divergente*. De là résulte, si l'on prend $\alpha_n = 1$,

$$a_n = 1 - \lambda - \frac{1}{\varphi(n)},\qquad A = 1 - \lambda,$$

$$1 - \frac{a_n}{A} = \frac{1}{1-\lambda}\frac{1}{\varphi(n)},\qquad u'_n = \frac{1}{1-\lambda}\frac{u_n}{\varphi(n)}.$$

Les termes de la série dérivée (4), multipliés, s'il le faut, par le facteur constant $1-\lambda$, sont donc ordinairement beaucoup plus petits que les termes de la série primitive (1); par suite, le terme $\frac{\alpha_1 u_1}{A}$

est, ordinairement aussi, presque égal à la somme inconnue s, du moins lorsque la série (1) a tous ses termes positifs. Cette simple remarque permet déjà d'entrevoir combien peut être utile le procédé de M. Leclert.

Si l'on opère sur la série dérivée comme sur la série primitive, et ainsi de suite, on est conduit à ce système de formules :

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}\frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad \lim a_n = \mathrm{A},$$

$$a_n^{(k)} = \alpha_n^{(k)} - \alpha_{n+1}^{(k)}\frac{u_{n+1}^{(k)}}{u_n^{(k)}}, \qquad \lim a_n^{(k)} = \mathrm{A}^{(k)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u'_n = \left(1 - \frac{a_n}{\mathrm{A}}\right)u_n, \qquad s = \frac{\alpha_1 u_1}{\mathrm{A}} + s',$$

$$u_n^{(k+1)} = \left(1 - \frac{a_n^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}}\right)u_n^{(k)}, \qquad s_n^{(k)} = \frac{\alpha_1^{(k)}u_1^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}} + s^{(k+1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où résulte non-seulement

$$(\mathrm{B}) \qquad s = \frac{\alpha_1 u_1}{\mathrm{A}} + \frac{\alpha'_1 u'_1}{\mathrm{A}'} + \ldots + \frac{\alpha_1^{(k)} u_1^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n^{(k+1)},$$

mais encore

$$(\mathrm{C}) \qquad s = \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_1^{(k)} u_1^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}},$$

pourvu que la quantité $\frac{\alpha_1^{(k)} u_1^{(k)}}{\mathrm{A}^{(k)}}$ *ait pour limite zéro.*

L'équation ou le théorème (B), qui n'est qu'une extension du principe fondamental (A), permet d'augmenter autant qu'on le veut, pour ainsi dire, la convergence d'une série donnée ; la formule (C) modifie complétement la forme de cette série, et la rend presque toujours très-convergente.

M. Leclert a imaginé une seconde transformation, souvent moins commode que la première, mais cependant utile dans certains cas. Voici en quoi elle consiste.

Représentons par

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$$

la série proposée, et conservons nos autres notations. Si l'on pose

$$v'_n = \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) \alpha_{n+1} v_{n+1},$$

on aura

$$(A_1) \qquad s = \frac{\alpha_1 v_1}{a_1} + s',$$

comme on l'établirait facilement.

L'emploi réitéré du *second principe fondamental* (A) donne, avec la même restriction que ci-dessus (4),

$$(B_1) \qquad s = \frac{\alpha_1 v_1}{a_1} + \frac{\alpha'_1 v'_1}{a'_1} + \ldots + \frac{\alpha_1^{(k)} v_1^{(k)}}{a_1^{(k)}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} v_n^{(k+1)},$$

$$(C_1) \qquad s = \sum_1^\infty \frac{a_1^{(k)} v_1^{(k)}}{a_1^{(k)}}.$$

Première application. — Transformer la série de Leibnitz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(1-)^{n-1}}{2_{n-1}} + \ldots.$$

Deuxième application. — Transformer la série

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots.$$

Troisième application. — Transformer la série

$$G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} + \ldots.$$

En supposant

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{2n-3},$$

on trouve

$$a_n = 2\,\frac{(2n-1)^2}{(2n+1)(2n-3)}\quad A' = 2,$$

$$u'_n = (-1)^n \frac{4}{(2n-3)(2n+1)^2(2n+1)};$$

puis, après quelques réductions,

$$G = \frac{5}{6} + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)},$$

formule obtenue par M. Leclert.

Partant de cette première transformée, et prenant successivement

$$\alpha'_n = \frac{2n+3}{2n-1}, \quad \alpha''_n = \frac{2n+3}{2n-2},$$

on trouve ces deux développements :

$$G = \frac{19}{18} - 32\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2(2n+1)^2(2n+3)^2},$$

$$G = \frac{2909}{3150} - 768\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)^2(2n+5)^2(2n+7)},$$

qui conduisent rapidement aux résultats indiqués.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

REULEAUX (F.). — CINÉMATIQUE. PRINCIPES FONDAMENTAUX D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES MACHINES. Traduit de l'allemand par A. DEDIZE. 1 vol. in-8°, avec Atlas de 8 pl. 651 p. Paris, 1877.

Le Livre de M. Reuleaux a une portée philosophique exceptionnelle : on pourrait y louer la richesse des détails techniques, l'élégance des démonstrations et des constructions géométriques; mais, sous ce rapport, on ne pouvait pas moins attendre de l'auteur. Nous ne nous arrêterons pas, d'ailleurs, à analyser la partie technique de l'Ouvrage; nous laisserons de côté les nombreux mécanismes qui y sont décrits et qui viennent, en quelque sorte, *illustrer* les idées de l'auteur; nous passerons aussi sous silence la partie géométrique où se trouvent traitées rapidement la théorie du mouvement d'un corps solide et diverses questions appartenant à la *Cinématique pure,* comme on dit quelquefois en France, à la *Phoronomie,* pour conserver le langage de M. Reuleaux. Quant à la critique des idées de M. Reuleaux (si justes qu'elles nous paraissent) sur le rôle de la machine, au point de vue social, sur les questions, parfois brûlantes, qu'a fait naître le développement de l'industrie, elle sortirait du cadre du *Bulletin.* Mais nous voudrions appeler l'attention sur deux conceptions fondamentales, qui appartiennent en propre à M. Reuleaux, qui permettent de pénétrer plus avant qu'on ne l'avait fait dans la nature intime des machines et de les classer d'une façon plus scientifique. La tentative hardie faite par M. Reuleaux pour désigner les mécanismes au moyen de formules condensées, le système de notations abstraites qu'il propose, système dont l'avenir jugera la valeur pratique, mais qui, à coup sûr, met en évidence des relations étroites entre certains mécanismes dont la différence de forme cachait la parenté, ne doivent pas non plus être négligés.

Chaque élément d'une machine est assujetti à ne prendre qu'un mouvement déterminé : le mouvement d'un élément commande, en quelque sorte, le mouvement de tous les autres; pour parler le langage de la Mécanique rationnelle, une machine est un système à liaisons complètes : c'est généralement en vertu de la nature rigide

des éléments que ces liaisons peuvent être réalisées; écartons, pour le moment, les autres cas sur lesquels nous reviendrons plus tard brièvement.

Concevons donc un corps solide que, pour fixer les idées, nous regarderons comme plein : comment l'obligerons-nous à se mouvoir d'une façon déterminée?

Imaginons qu'on réalise ce mouvement et que l'on détermine la surface enveloppe des diverses positions de la surface du corps, ou plutôt (s'il y a lieu de distinguer) une portion de cette surface enveloppe, celle qu'on obtiendrait en faisant mouvoir le corps solide dans un milieu malléable, qui ne se déformerait plus après le passage du corps; regardons maintenant la surface enveloppe ainsi obtenue comme la surface intérieure d'un corps solide creux; solidifions, si l'on veut, le milieu malléable dont nous venons de parler, après le passage du corps; il est clair que, en général, le mouvement de notre corps solide dans le canal creux que nous venons de définir sera déterminé; ce sera le mouvement que l'on a supposé *a priori*. Inversement, si l'on fixe le corps plein, le mouvement du corps creux, glissant autour de lui, sera en général déterminé. C'est donc au moyen de *deux* corps solides, dont l'un est la forme enveloppe de l'autre qu'on parvient, en fixant l'un d'eux, à obliger l'autre à ne prendre qu'un mouvement déterminé. Plus généralement, on peut dire que le mouvement relatif de l'un des éléments par rapport à l'autre est déterminé, le mouvement relatif devenant le mouvement absolu, si le second élément est rendu fixe. « *Les machines se composent précisément de corps accouplés ainsi deux à deux;* ces corps constituent les véritables *éléments cinématiques* des machines. Comme exemples de *couples* d'éléments de ce genre, on peut citer le tourillon et le coussinet, la vis et l'écrou, etc. Les éléments cinématiques ne se rencontrent jamais isolés dans les machines, et sont toujours accouplés; la machine ne se compose pas d'éléments isolés, mais de *couples d'éléments*. Cette particularité de la composition de la machine est fondamentale et permet de la distinguer très-nettement de tous les autres objets qui peuvent être considérés comme formant un tout. »

L'étude des couples d'éléments tels, que l'un d'eux contraigne l'autre, lorsqu'il y a mouvement, à décrire, par ses différents points, des trajectoires déterminées, formera donc une partie impor-

tante du Livre de M. Reuleaux. Une première classe, la plus simple, est constituée par les *couples d'emboîtement*, dont l'un, au lieu d'envelopper simplement l'autre, l'emboîte complétement, se trouve en être la forme en creux. Les deux corps qui constituent un tel couple coïncident complétement sur toute l'étendue des surfaces en contact, de telle sorte qu'il est possible de tracer sur ces surfaces une infinité de courbes qui se recouvrent entièrement deux à deux; parmi ces courbes, il convient de distinguer celles qui se trouvent avoir précisément la direction suivant laquelle se produit le seul mouvement possible, et qui, par cela même, doivent glisser l'une sur l'autre, et sont par conséquent des hélices, ou, comme cas particulier, des cercles ou des droites. Les vis ordinaires, avec leurs écrous, deux corps de révolution, ou deux prismes s'emboîtant l'un dans l'autre constituent les trois seuls couples d'emboîtement qui existent. Une propriété fondamentale de ces couples, évidente d'ailleurs, consiste en ce que, par la permutation de l'élément fixe avec l'élément mobile, en d'autres termes par l'*inversion du couple*, il ne se produit aucune modification dans le mouvement absolu engendré.

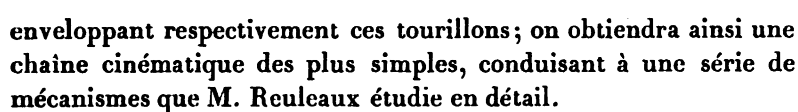
Dans un couple, toute la surface de l'un des corps n'est pas nécessaire pour guider l'autre : il suffit d'en réaliser une partie et de supprimer le reste; il y a donc lieu d'étudier avec soin la partie qu'il faut conserver pour déterminer le mouvement; c'est ce que fait M. Reuleaux dans plusieurs paragraphes consacrés aux *appuis contre la translation et contre la rotation*. Cette étude le conduit à s'occuper de divers couples intéressants au point de vue géométrique : le plus simple dérive d'une figure biconvexe, formée de deux arcs de cercle égaux, inscrite dans un triangle équilatéral; cette figure, en se déplaçant dans le triangle de manière à rester enveloppée par lui, prend un mouvement bien connu. Enfin la recherche générale des profils d'éléments pour une loi de mouvement donnée, et en particulier des profils d'engrenage, termine le Chapitre spécialement consacré aux *couples*.

Un couple n'est pas toujours *fermé* par lui-même, c'est-à-dire que les surfaces en contact qui permettent au mouvement que l'on veut obtenir de se produire permettraient aussi d'autres mouvements; mais la nature des forces qui entrent en jeu dans la machine peut interdire ces derniers mouvements : on dit alors que le

couple est *fermé par clôture de force*. On en trouvera un exemple simple dans les tourillons et les supports de la plupart des roues hydrauliques : le poids considérable de la roue est presque toujours suffisant pour empêcher que le tourillon ne se soulève verticalement et ne se sépare de son support dépourvu de chapeau. On devra évidemment faire rentrer dans cette catégorie les couples dont l'un des éléments est ductile, que cet élément soit, par exemple, une courroie ou un fluide, les forces qui agissent sur ces éléments devant agir d'une façon déterminée, par traction dans le premier cas, par compression dans le second. Enfin la *clôture* des couples peut s'obtenir par *chaîne cinématique* et résulter de la liaison de leurs éléments avec les éléments d'autres couples; mais, sans nous arrêter davantage à ce mode de clôture, dont les roues d'engrenage fournissent un exemple simple, il convient maintenant d'insister sur cette autre notion fondamentale, la *chaîne cinématique*, introduite par M. Reuleaux dans la science des machines.

Considérons deux couples ab, cd; imaginons qu'on relie l'élément a du premier couple à l'élément c du second; relions de même les deux seconds éléments b et d, on obtiendra ainsi un nouveau couple formé de deux éléments rigides $a-b$ d'une part, $c-d$ de l'autre; il est clair qu'en général le nouveau couple ainsi obtenu sera différent des deux premiers, c'est-à-dire que le mouvement relatif que l'élément $c-d$ peut prendre par rapport à l'élément $a-b$ sera, par exemple, différent du mouvement relatif que l'élément b peut prendre par rapport à l'élément a.

Allons maintenant plus loin, et procédons à la liaison de trois ou quatre couples d'éléments : soient donnés les quatre couples ab, cd, ef, gh; relions b à c, d à e, f à g, h à a, de façon à former une sorte de *chaîne* retournant sur elle-même, chaîne dont chaque membre sera l'ensemble solide de deux éléments de deux couples consécutifs; l'ordre dans lequel on les réunit peut d'ailleurs être différent de celui que nous avons supposé, pourvu que la chaîne se ferme; M. Reuleaux donne le nom de *chaîne cinématique* au corps ainsi formé. A peine est-il utile de dire qu'une chaîne cinématique peut être composée d'un nombre quelconque d'éléments. Toute obscurité disparaîtra dans cette conception abstraite en l'appliquant à un cas particulier, en regardant, par exemple, a, d, e, h comme des tourillons parallèles et b, c, f, g comme des douilles



enveloppant respectivement ces tourillons; on obtiendra ainsi une chaîne cinématique des plus simples, conduisant à une série de mécanismes que M. Reuleaux étudie en détail.

« Dans une chaîne, deux membres consécutifs ont un mouvement relatif déterminé, lequel est précisément celui du couple qui les relie; mais deux membres qui se trouvent séparés par un troisième ne possèdent pas nécessairement, l'un par rapport à l'autre, des mouvements relatifs déterminés. De tels mouvements se produisent seulement dans les chaînes constituées de telle manière que *tout changement de position d'un membre, par rapport à celui qui le suit immédiatement, entraîne un changement de position de tous les autres membres par rapport au premier.*

» Dans une chaîne cinématique jouissant de cette propriété, un membre quelconque ne possède qu'un seul mouvement relatif par rapport à chacun des autres; par conséquent, lorsqu'on produit dans la chaîne un mouvement relatif, tous les membres se trouvent *astreints* à accomplir des mouvements relatifs déterminés. Une semblable chaîne cinématique, à *mouvements forcés*, constitue ce que nous appellerons une *chaîne fermée desmodromique*, ou, plus simplement, une *chaîne fermée*. »

Si maintenant on rend fixe un des membres d'une chaîne cinématique fermée, on obtiendra un *mécanisme :* une chaîne fermée peut donc être transformée en mécanisme d'autant de manières différentes qu'elle renferme de membres.

Enfin « un mécanisme entre en mouvement lorsque l'un de ses membres mobiles vient à être sollicité par une force mécanique susceptible de le faire changer de position. *La force accomplit, dans ce cas, un travail mécanique qui se produit avec des mouvements déterminés ; l'ensemble constitue alors une machine.*

« D'après les considérations qui précèdent, la machine se compose d'un ou de plusieurs mécanismes, dont chacun peut se ramener à une chaîne cinématique formée elle-même de couples d'éléments. Cette *décomposition* constitue l'*analyse* de la machine, c'est-à-dire la détermination de son contenu cinématique en mécanismes, chaînes et couples d'éléments. L'opération inverse, la *synthèse*, consiste dans la recherche des éléments cinématiques, chaînes et mécanismes, dont on doit composer une machine pour obtenir un effet déterminé. »

Nous ne suivrons pas M. Reuleaux dans l'application de ses idées à l'analyse des mécanismes particuliers, ni dans l'histoire qu'il trace du développement des machines; nous voulons nous borner à exposer rapidement les critiques qu'il dirige avec raison contre les idées généralement reçues depuis Poncelet, dans la classification des organes d'une machine complète, et la façon dont lui-même entend cette classification.

On est habitué, dans une machine, à distinguer trois parties : le *récepteur*, la *transmission* et l'*opérateur* ou *outil*. Les parties à classer sous le récepteur sont généralement considérées comme constituant, par elles-mêmes, un groupe spécial qu'on peut comprendre sous le nom de *machines motrices* ou de *moteurs*. Par une limitation analogue on peut former un groupe de machines dans lesquelles toutes les parties se relient plus ou moins à l'opérateur, pour le mettre dans les meilleures conditions d'emploi; ce groupe est celui des *machines-outils* (tour, machine à raboter, etc.). Dans l'ancienne classification, les machines comprises dans l'un ou l'autre de ces groupes, machines qui peuvent travailler dans une même usine, où un seul moteur peut mettre en mouvement un nombre considérable de machines-outils, ne seraient point des machines complètes, puisque les premières, le plus souvent, ne comportent pas d'outils; les secondes, de moteur. Or cela semble en contradiction avec le langage ordinaire.

En outre si, par exemple, nous « considérons un métier à filer, dans lequel le fil effectue, pour s'étendre, se tordre, se dérouler, etc., une série de mouvements qu'il ne pourrait pas exécuter s'il ne fonctionnait pas lui-même comme organe de transmission de mouvement, dans ce cas, le fil doit-il être considéré seulement comme corps à travailler, ou comme *communicateur*, ou comme *outil?* Où commence et où finit chacun de ces trois rôles? Des incertitudes de même genre existent dans toutes les machines analogues. »

Occupons-nous en particulier de chacune des trois parties énumérées plus haut, en commençant par l'*outil*, sur lequel d'ailleurs nous nous étendrons davantage. On remarquera d'abord que cet *outil* est impossible à déterminer dans toutes les machines qui servent à effectuer des déplacements ou des transports. Où est l'outil d'une locomotive? Ce sont, dit-on, les crochets qui servent à l'accrocher au tender; mais, s'il n'y a pas de tender, la locomotive

portant avec elle son charbon, et, si l'on veut, des marchandises ou des voyageurs, placés dans un bâti approprié, faisant corps avec elle? Ainsi constituée, en travaillera-t-elle moins? Mieux encore, l'outil d'un bateau à vapeur? « *L'outil n'est donc pas un élément essentiel de la machine, mais seulement un élément éventuel, et sa notion ne peut pas servir de base pour la compréhension de la machine complète* ». L'outil n'existe que dans les machines qui servent à effectuer des changements de forme, dans les « *machines de transformation* ». Tels sont : le tour, la machine à raboter, la scie à rubans, les laminoirs, les moulins; là, évidemment, le ciseau, le burin, la scie, les cylindres qui font avancer la pièce métallique à travailler en même temps qu'ils en modifient la forme; les meules, qui réduisent les grains en poudre et conduisent à leur périphérie la farine produite, sont des *outils*, dans le sens ordinaire du mot. Encore voit-on que la distinction que nous venons d'établir entre les diverses sortes de machines n'est pas absolue : dans notre dernier exemple, dans le moulin, la transformation et le transport se trouvent avoir sensiblement une égale importance; en général, le défaut d'une limite précise entre les deux classes tient à ce que plusieurs transformations se trouvent nécessairement liées à un changement de position. Quelle est maintenant la signification cinématique de l'outil dans les machines où il existe? Commençons par examiner le mode d'action de l'outil dans une machine déterminée. « Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de tourner une barre de fer cylindrique sur un tour parallèle ordinaire. Le ciseau, serré dans les mâchoires du support, possède un mouvement de translation, parallèle à l'axe du tour, tandis que la pièce à tourner possède le même mouvement de rotation que l'arbre de ce tour, sur lequel elle est fixée, mouvement qui a pour résultat d'amener contre le tranchant de l'outil les parties du contour de la pièce qui se trouvent en regard de cet outil. Le mouvement relatif du ciseau, par rapport à la barre, est un mouvement hélicoïdal, comme si l'outil était une portion d'un écrou ordinaire, dont la barre à tourner serait le filet correspondant. Ce couple n'existe pas d'ailleurs au commencement du travail; mais, comme le ciseau est formé d'une matière plus dure que la pièce à tourner, il enlève, dans son mouvement progressif, les petites parties du contour de la barre qui se trouvent en dehors de la surface d'emboîtement qu'il décrit par rapport à cette barre. » Cette dernière prend ainsi peu à peu la

forme conjuguée de la forme écrou que le couteau possède dès le début de l'opération. Cela est visible dans l'opération du dégrossissement, pour laquelle on donne au tranchant de l'outil la forme d'une pointe. « Dans la seconde passe, destinée à terminer la pièce, le ciseau a comme profil une portion de ligne droite, parallèle à l'axe, de telle sorte que le corps tourné finit par présenter la forme d'un cylindre; mais, au point de vue de son accouplement avec le ciseau, il n'en doit pas moins être considéré comme un filet de vis. » L'analyse d'autres outils conduirait à des résultats analogues; on voit déjà, sur l'exemple précédent, apparaître la conclusion de M. Reuleaux, conclusion qu'il formule dans la loi suivante : *Dans les machines de transformation, la pièce d'œuvre se présente comme une partie d'un membre de chaîne ou comme un membre complet; elle forme, avec l'outil, un accouplement ou un enchaînement cinématique, dans lequel, en raison de la disposition donnée à la matière constituant cet outil, sa forme primitive se trouve remplacée par la forme enveloppe correspondant à ce mode de liaison.*

Remarquons enfin qu'entre les deux grandes classes dans lesquelles nous avons divisé les machines, il existe, relativement à la pièce d'œuvre, un point commun véritablement essentiel. S'il n'y a pas, à proprement parler, d'outil dans les machines de déplacement, dans un bateau à vapeur par exemple, c'est que la pièce d'œuvre (les corps à transporter) fait corps avec la machine; dans les machines de transformation, nous trouvons de même que le corps à transformer doit, lui aussi, être regardé comme faisant partie de la machine complète, machine pour laquelle il tend, dans l'exemple que nous avons analysé, à constituer l'élément d'un couple dont l'outil était l'élément conjugué.

Le *récepteur* est, de la part de M. Reuleaux, l'objet de critiques tout aussi fortes. Pas plus que l'outil, il ne peut, dans un grand nombre de cas, être séparé de la machine complète; mais toujours on aperçoit distinctement que la pièce par laquelle se fait l'introduction de l'effet moteur figure dans la chaîne cinématique qui constitue la machine. Dans la roue hydraulique, par exemple, « les palettes forment avec l'eau un accouplement cinématique, pendant que l'eau, d'un autre côté, se trouve accouplée avec le coursier et la conduite d'amenée ».

Enfin le *communicateur*, pas plus que les autres éléments, « n'est

susceptible d'être isolé partout, bien qu'il existe quelques exemples où la transmission pure et simple du mouvement se trouve nettement indiquée comme l'unique fonction d'un groupe d'organes assez complexe. Tous les membres de la chaîne cinématique servent à transmettre un plus ou moins grand nombre d'efforts, d'un point à un autre de la machine; *tous* peuvent être considérés comme des communicateurs entre la force motrice et les résistances.

» Ce qui ressort comme conclusion de toutes nos investigations, ce qui émerge comme principe fondamental de toutes les conceptions, assez obscures, que nous avons examinées, c'est que la *machine complète est une chaîne cinématique fermée.* Le corps moteur et le corps à travailler sont tous les deux des membres ou, au moins, des éléments cinématiques de cette chaîne. Les lois suivant lesquelles le *moteur* accomplit ses mouvements dans la machine sont, en substance, les mêmes que celles auxquelles obéissent la pièce d'œuvre et l'outil, lorsqu'il existe : elles sont, en définitive, les mêmes que celles qui régissent tous les mouvements relatifs entre les éléments cinématiques et les membres de la chaîne dont il vient d'être question ».

Nous avons essayé, dans ce qui précède, de faire comprendre la portée philosophique de cette conception fondamentale de la *chaîne cinématique,* formée de *couples* d'éléments; on devine sans doute la lumière qu'elle apporte dans l'étude détaillée des mécanismes : ici nous renvoyons le lecteur au livre de M. Reuleaux, livre que tous ceux qui enseignent la Mécanique théorique ou pratique devront méditer. Ils sauront gré, sans doute, à M. Debize de leur en avoir rendu la lecture facile; car la tournure philosophique et littéraire de cet Ouvrage ne manquerait pas d'embarrasser ceux qui ne sont pas familiers avec la langue allemande.

Nous terminerons en donnant une idée rapide du système de notation proposé par M. Reuleaux : si cette idée est imparfaite, on nous excusera par la nécessité d'abréger.

Les éléments des couples qui constituent une chaîne cinématique quelconque seront désignés par les lettres majuscules suivantes :

S spirale (vis),	G globe (sphère),
R corps de rotation (rotoïde),	A arc,
P prisme,	Z dent, saillie,

C cylindre,
K cône,
H hyperboloïde,
V vase, récipient,
T organe de traction,
Q organe de pression.

Remarquant maintenant que la surface d'un corps solide sépare l'espace en deux parties dont l'une peut être regardée comme *pleine*, l'autre comme *creuse*, on représentera l'une ou l'autre de ces deux parties par la même lettre affectée du signe + ou — placé en exposant. Ainsi C^+, C^- représenteront un cylindre plein, un tube cylindrique; l'attention étant portée dans le premier cas sur la partie pleine, dans le second sur la partie creuse; S^+ sera une vis, S^- un écrou; V^+ sera le contraire d'un vase, un corps plein, le vase lui-même sera V^-; ainsi V^+ peut servir à représenter un piston, V^- le cylindre correspondant. Le symbole o placé aussi en exposant indiquera une surface plane; le signe ($\check{}$) placé au-dessus de la lettre signifie que le profil correspondant est une courbe quelconque : ainsi $\check{C}^+$, $\check{C}^-$ désignent des cylindres à base quelconque plein ou creux. Les lettres des symboles de noms, employées comme minuscules, placées à droite et en bas des lettres majuscules, conduisent à d'autres symboles de formes. Ainsi C_z^+, C_z^- désignent des roues dentées à denture extérieure ou intérieure, P_z une crémaillère, T_p un organe de traction prismatique, une courroie : T_p^+ sera le brin qui s'enroule, T_p^- celui qui se déroule; etc.

La liaison entre deux éléments qui constituent un *couple* s'exprime au moyen d'une virgule : ainsi C, C désigne deux cylindres roulant l'un sur l'autre; C^+, C^+ désigne le couple de deux cylindres pleins; C^+, C^- le couple d'un cylindre plein dans un cylindre creux.

La liaison entre deux éléments d'un *membre* d'une chaîne cinématique, liaison en vertu de laquelle ces deux éléments ne forment plus qu'un seul corps, s'exprime par plusieurs points : ainsi $C^+ \ldots C^+$ désigne deux cylindres pleins réunis invariablement.

La fixité d'un membre de chaîne s'indique par *un trait plein* soulignant la notation de ce membre. Ainsi $\underline{P^+ \ldots C^+}$ représente un membre d'une chaîne cinématique maintenu fixe et composé d'un prisme plein et d'un cylindre plein.

Enfin M. Reuleaux emploie encore comme symboles de relations une série de signes identiques ou analogues à ceux dont on se sert

en Arithmétique; nous citerons les suivants :

$$=,\ >,\ <,\ |,\ \|,\ \perp,\ \doteq,\ \#,\ \ldots,$$

égal, plus grand, plus petit, coaxial, parallèle, normal, égal et coaxial, égal et parallèle, ... Ces relations peuvent exister entre les éléments d'un couple ou les éléments d'un nombre de chaîne; dans le premier cas, on supprimera la virgule, signe d'accouplement.

D'après cela les trois couples d'emboîtement que nous avons décrits seront représentés par les symboles

$$S^+, S^-;\quad R^+, R^-;\quad P^+, P^-;$$

il est inutile d'écrire, par exemple, $S^+ = S^-$, car l'égalité entre les deux surfaces est une condition de la fermeture du couple vis-écrou, condition que nous supposons essentiellement remplie.

Enfin la chaîne cinématique que nous avons choisie pour exemple, composée des quatre tourillons a, d, e, h, entourés par les douilles cylindriques b, c, f, g et reliés comme il a été expliqué, aura pour symbole :

$$\underbrace{C^-\ldots\|\ldots C^-}_{bc},\ \underbrace{C^+\ldots\|\ldots C^+}_{de},\ \underbrace{C^-\ldots\|\ldots C^-}_{fg},\ \underbrace{C^+\ldots\|\ldots C^+}_{ha} =$$

Nous n'insisterons pas davantage sur ce système de notations qui, consacré par l'usage, peut être appelé à rendre de grands services. J. Tannery.

LOMMEL (E.). — Ueber eine mit den Bessel'schen verwandte Function (¹).

L'intégrale complète de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0$$

est, comme on sait,

$$y = AJ^\nu(z) + BJ^{-\nu}(z),$$

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1876.

où $J^\nu(z)$ et $J^{-\nu}(z)$ sont les *fonctions de Bessel de première espèce*, et où A et B sont des constantes. La méthode de la variation des constantes donne l'intégrale de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = kz^{\mu-1},$$

sous la forme suivante :

$$y = AJ^\nu(z) + BJ^{-\nu}(z) + kS^{\mu,\nu}(z),$$

en faisant

$$S^{\mu,\nu}(z) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[J^\nu(z)\int z^\mu J^{-\nu}(z)\,dz - J^{-\nu}(z)\int z^\mu J^\nu(z)\,dz\right].$$

Cette forme ne convient plus quand ν est un entier n, positif ou négatif; on a alors

$$y = AJ^n(z) + BY^n(z) + KS^{\mu,n}(z),$$

en faisant

$$S^{\mu,n}(z) = Y^n(z)\int z^\mu J^n(z)\,dz - J^n(z)\int z^\mu Y^n(z)\,dz;$$

$Y^n(z)$ représente la *fonction de Bessel de seconde espèce*.

M. Lommel se propose d'étudier les fonctions $S^{\mu,\nu}(z)$ au moyen des propriétés des fonctions de Bessel et en particulier de celles qu'il a démontrées précédemment (*Math. Ann.*, t. IV, p. 105) et qui consistent dans les équations

$$J^\nu J^{-\nu+1} + J^{-\nu} J^{\nu-1} = \frac{2}{\pi z}\sin\nu\pi,$$

$$Y^n J^{n+1} - J^n Y^{n-1} = \frac{1}{z}.$$

Dans cette étude, les équations suivantes sont fondamentales :

$$S^{\mu,-\nu} = S^{\mu,\nu},$$

$$S^{\mu+2,\nu} = z^{\mu+1} - (\mu - \nu + 1)(\mu + \nu + 1)S^{\mu,\nu},$$

$$\frac{2\nu}{z}S^{\mu,\nu} = (\mu + \nu - 1)S^{\mu-1,\nu-1} - (\mu - \nu - 1)S^{\mu-1,\nu-1}.$$

$$2\frac{\partial S^{\mu,\nu}}{\partial z} = (\mu + \nu - 1)S^{\mu-1,\nu-1} + (\mu - \nu - 1)S^{\mu-1,\nu+1}.$$

Les deux dernières doivent être rapprochées des formules analogues

relatives aux fonctions de Bessel

$$\frac{2\nu}{z}J^\nu(z) = J^{\nu-1} + J^{\nu+1},$$
$$2\frac{\partial^\nu J}{\partial z} = J^{\nu-1} - J^{\nu+1};$$

des formules précédentes, relatives aux fonctions $S^{\mu,\nu}$, se déduisent plusieurs relations élégantes entre ces mêmes fonctions, relations sur lesquelles nous n'insistons pas.

Lorsque $\mu - \nu$ ou $\mu + \nu$ est un nombre entier impair positif $2m + 1$, $S^{\mu,\nu}$ est, au facteur près z^ν, une fonction rationnelle de z; on a, en effet

$$S^{2m+1+\nu,\nu} = z^{2m+\nu}\Big[1 - m(m+\nu)\left(\frac{2}{z}\right)^2 + m(m-1)(m+\nu)(m+\nu-1)\left(\frac{2}{z}\right)^4 - \ldots$$
$$+ (-1)^m m(m-1)\ldots 3.2.1(m+\nu)(m+\nu-1)\ldots$$
$$\times (\nu+2)(\nu+1)\left(\frac{2}{z}\right)^{2m}\Big].$$

Dans tous les autres cas, $S^{\mu,\nu}$ se développe en une série convergente très-analogue aux séries qui expriment les fonctions de Bessel. Pour le calcul numérique, on peut employer une série *semi-convergente.*

Les fonctions $S^{\mu,\nu}$ ne servent pas qu'à intégrer l'équation différentielle susdite, elles permettent d'évaluer toutes les intégrales de la forme $\int z^\mu J^\nu dz$; on a, en effet,

$$\int z^\mu J^\nu dz = (\mu + \nu - 1) z J^\nu S^{\mu-1,\nu-1} - z J^{\nu-1} S^{\mu,\nu}.$$

Les intégrales $\int z^\mu J^\nu dz$ contiennent, comme cas particulier, les intégrales $\int z^\mu \sin z\, dz$ et $\int z^\mu \cos z\, dz$, puisque l'on a

$$J^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \quad J^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

En faisant dans la formule ci-dessus $\mu = 0$, $\nu = \pm\frac{1}{2}$ et en remplaçant S par la série *semi-convergente* ou la série convergente, on obtient les développements de Cauchy et de Knochenhauer pour les intégrales de Fresnel $\int \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv$ et $\int \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv$. On obtient

de même des développements remarquables pour $\int \frac{\sin z}{z} dz$ et $\int \frac{\cos z}{z} dz$.

Enfin l'auteur montre, en terminant, que les fonctions introduites par M. C. Neumann dans la théorie des fonctions de Bessel sont des cas particuliers des fonctions $S^{\mu,\nu}$; on a, en effet,

$$O^{2n}(z) = \frac{1}{z} S^{1,2n}(z),$$

$$O^{2n+1}(z) = \frac{2n+1}{z} S^{0,2n+1}(z).$$

SCHELLBACH (Prof. Dr Karl). — Ueber mechanische Quadratur (¹).

« Le succès de l'enseignement des Mathématiques dans nos écoles supérieures n'est pas si grand qu'on croirait être en droit d'espérer en considérant combien de jeunes mathématiciens bien instruits sont professeurs à ces écoles. Ce qui forme une cause essentielle du moins de succès heureux de leurs efforts d'enseignement, c'est qu'on néglige en général d'élucider les cours de Mathématiques par des exemples numériques. Cependant Newton a déjà dit : *Exempla plus prosunt quam præcepta*.... Il y a peu d'entre nos jeunes mathématiciens qui, allant passer l'examen d'État des professeurs (*pro facultate docendi*), connaissent les moyens qu'il faut employer pour calculer approximativement la valeur nnmérique d'une intégrale définie.... C'est dans le Mémoire sur l'évaluation approximative des intégrales définies que Gauss a dit que ces méthodes sont employées par les mathématiciens *rarius quam par est*. Mais l'étude de ce Mémoire important, et de plusieurs autres dus au génie d'illustres géomètres, est rendue difficile surtout par la richesse abondante d'idées étalée par ces auteurs et qui leur fait

(¹) *Jahresbericht über die vereinigten Anstalten des Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums, der Königl. Realschule der Königl. Vorschule zu Berlin.* Berlin, 1877. — 26 p.

faire des excursions qui les empêchent de s'approcher directement du but principal. Il est évident que les étudiants pourraient s'avancer plus facilement sur un chemin plus droit.... Ces réflexions m'ont décidé à développer, d'une manière rapide et facile à comprendre, les formules de Gauss et de Cotes pour la quadrature mécanique, et à y joindre quelques applications et une nouvelle méthode de l'évaluation d'intégrales définies qui, comparée à d'autres méthodes, offre quelquefois certains avantages. J'entreprends ce travail en même temps, espérant et souhaitant qu'il passe dans les livres élémentaires sur le Calcul intégral. »

Voilà comment M. Schellbach, autorité incontestable pour les calculs numériques, s'explique sur l'objet de son nouveau Mémoire; en voici l'analyse succincte :

§ 1. Déduction des formules de Gauss.

§ 2. Démonstration des formules de Cotes.

§ 3. Nouvelles formules de M. Schellbach. Ce qui en fait une particularité, c'est qu'il faut connaître la fonction à intégrer : les formules contiennent non-seulement cette fonction, mais encore les valeurs de ses dérivées pour les limites de l'intégrale.

§ 4. Exemples numériques :

I. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;

II. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$;

III. $\int_p^q \frac{dx}{\log x}$ pour $p = 10^5$, $g = 2.10^5$;

IV. Sommation de la série $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}\int_0^1 \frac{dx}{\sin\frac{1}{2}\pi x}$;

V. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$.

§ 5. Moyen pour transformer des séries à convergence lente en

d'autres à convergence rapide. Exemples :

I. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots;$

II. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$

§ 6. Autre méthode pour calculer la somme de séries lentement convergentes (méthode qui a pour base des idées semblables à celles qui ont été mises en œuvre par Stirling et M. Kummer).

§ 7. Applications des formules du § 6 à des séries.

I. $\log(2)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\ldots;$

II. $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots.$

§ 8. Applications des formules du § 6 au calcul des valeurs numériques d'intégrales définies, telles que $\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^{\frac{1}{a}}\right)^a}$.

Exemples : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$, par exemple $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

§ 9. Transformation des formules du § 6 pour servir à calculer la somme de la série

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}-\ldots.$$

§ 10. Application de la formule de sommation de Maclaurin au même exemple.

§ 11. Ce paragraphe signale la circonstance remarquable des formules de Cotes et de Gauss qui fait leur mérite principal, de ne pas exiger la connaissance de la fonction à intégrer.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GÜNTHER (Dr Siegmund). — Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende. — Erlangen, Ed. Besold, 1877. — 1 vol. in-8°, xii-209 pages (1).

Cet Ouvrage, que nous avons analysé dans un précédent volume du *Bulletin* (1), est parvenu aujourd'hui à sa deuxième édition, et, comme on le voit, en très-peu de temps. Cette édition, comparée à la première, se recommande par de nouveaux développements apportés aux données historiques, et aux applications de la théorie des déterminants, afin de la tenir au courant des derniers travaux des géomètres contemporains.

Le Livre se termine par un recueil de 66 exercices ou problèmes, empruntés aux publications récentes, et par un résumé bibliographique indiquant les principaux travaux ou Traités relatifs à la théorie des déterminants.

On y a conservé généralement l'ordre et le sujet des Chapitres de la première édition, à l'exception du Chapitre IV (*Déterminants cubiques*), renvoyé à la fin du volume. L'indication des matières que renferment les divers paragraphes a été donnée dans une précédente analyse. Elle a été trop peu modifiée pour que nous ayons à y revenir. Toutefois nous croyons devoir dire que le premier Chapitre, consacré à l'historique des déterminants, a reçu quelques développements additionnels : un paragraphe spécial traite des recherches de Reiss et de Grassmann.

Près de quatre cents Notes ou citations d'auteurs, répandues dans le corps de cet Ouvrage, témoignent du soin extrême qui a présidé à sa préparation. Le premier Chapitre, dont nous venons de parler, est une sorte d'aperçu historique très-détaillé, qui sera consulté avec fruit. Il est juste de dire que les recherches de ce genre sont poursuivies avec succès par les mathématiciens d'Allemagne; l'auteur de cet Ouvrage, en particulier, a publié déjà de nombreuses monographies qui dénotent de patients efforts et une profonde érudition.

Le succès de ce Livre justifie le vœu que nous avons formulé et

(1) Voir *Bulletin*, t. X, p. 131.

que nous exprimons encore, à propos d'une traduction, sinon de la partie didactique bien connue par des ouvrages spéciaux tout récents, au moins de la partie historique, qui préciserait plus d'une donnée sur laquelle les appréciations ne semblent pas encore bien fixées. H. B.

KÖNIGSBERGER (L.). — Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen (¹).

On sait, depuis les travaux de Clebsch, que, si x et y sont liés par une équation d'ordre n,

$$(\alpha) \qquad F(x, y) = 0,$$

telle que x et y puissent être exprimés rationnellement au moyen d'une variable t, la courbe (α) possède le plus grand nombre de points doubles qu'elle puisse avoir, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

et que, réciproquement, si la courbe qui figure la relation algébrique entre x et y admet ce nombre de points doubles, x et y peuvent s'exprimer rationnellement au moyen d'une seule variable, en sorte que, dans ce cas, l'intégrale

$$\int f(x, y)\,dx,$$

où le signe $\int$ porte sur une fonction rationnelle de t, peut être ramenée à une fonction algébrico-logarithmique de cette variable, et par suite s'exprime aussi en fonction algébrico-logarithmique de x et de y; mais il y a lieu de se poser une autre question lorsque, au lieu de s'en prendre aux intégrales abéliennes les plus générales, on se restreint à des intégrales spéciales des différentes classes. En ce sens, on peut se demander quelles sont, dans l'espèce des intégrales hyperelliptiques des différents ordres, celles qui peuvent se ramener à des fonctions algébrico-logarithmiques.

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XI, p. 118-144.

M. Tchebychef s'est occupé, dans le tome XVIII du *Journal de Liouville*, 1re série (¹), de la réduction à des fonctions algébrico-logarithmiques des intégrales de la forme

$$\int \frac{F_0(x)}{f_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}},$$

et a montré comment, lorsque cette réduction est possible, on peut déterminer la partie algébrique de cette intégrale, ainsi que le nombre et la forme des diverses expressions logarithmiques. Dans un travail inséré dans le même Recueil, il a, toujours dans la même hypothèse, montré comment on pouvait réaliser le calcul des expressions logarithmiques, dans le cas simple des intégrales elliptiques. Dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin (1857), M. Weierstrass s'est occupé des recherches de M. Tchebychef. Il ne regardait pas la voie suivie par ce dernier comme étant la plus naturelle; mais, considérant la question relative aux intégrales elliptiques comme éclaircie par les principes qu'Abel a développés dans son dernier travail, laissé inachevé, sur les relations générales entre les intégrales elliptiques et les fonctions algébrico-logarithmiques, il indiquait un moyen de la résoudre, moyen qui pouvait s'appliquer à la même question relativement aux intégrales hyperelliptiques. L'essence des recherches de M. Weierstrass consiste à décomposer l'intégrale elliptique proposée, d'après le procédé connu, en une partie linéaire en u, et une somme de $E(u)$, d'une suite de fonctions de la forme $\Pi(u, a_\alpha)$, et d'une partie rationnelle en $\sin \operatorname{am} u$ et $\frac{d \sin \operatorname{am} u}{du}$, u représentant l'intégrale elliptique de première espèce; alors, en supposant que l'intégrale peut être ramenée à une fonction algébrico-logarithmique, la comparaison des périodes des fonctions elliptiques et des logarithmes donne les conditions nécessaires et suffisantes pour la réduction.

M. Königsberger entreprend la recherche de la réduction des intégrales elliptiques d'ordre quelconque, sans se servir de l'inversion des intégrales abéliennes de cette espèce, mais directement,

(¹) Afin d'éviter la multiplicité des dénominations d'un même recueil périodique, nous le désignerons, à l'avenir, constamment par le nom de son fondateur (*Journal de Liouville*, *Journal de Crelle*, *Archives de Grunert*, etc.). (*Note de la Rédaction.*)

en utilisant les formules établies par lui dans les *Mathematische Annalen*, pour la réduction des intégrales hyperelliptiques générales à des intégrales des trois espèces et à une partie algébrique; en s'appuyant sur le moyen, exposé par lui dans le *Journal de Crelle*, de ramener le problème général de la transformation à une relation rationnelle, établie dans le même Mémoire, entre les intégrales hyperelliptiques, il parvient aux conditions nécessaires et suffisantes pour la réduction d'une intégrale hyperelliptique d'ordre quelconque à des fonctions algébrico-logarithmiques.

M. Fuchs a, le premier, établi sans restriction que le déterminant des intégrales de première et de seconde espèce, prises entre les points d'embranchement, était toujours différent de zéro et avait une valeur indépendante de ces points. Au moyen de ce théorème, on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour la réduction à une fonction algébrique de l'intégrale hyperelliptique

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

où l'on a posé

$$R(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_{2p+1}),$$

et où

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n$$

sont les valeurs de z qui rendent $F(z)$ infinie; ces conditions, en employant des notations bien connues, peuvent être mises sous la forme

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} = 0, \quad \ldots, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{\alpha} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

où, en faisant

$$R(z) = A z^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \ldots + B_{2p-1} z + B_{2p},$$

on suppose

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \ldots$$
$$+ \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1},$$

et où l'on doit prendre successivement

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,\ \ p,\ \ldots,\ 2p-1;$$

la valeur algébrique de l'intégrale peut alors s'écrire

$$\left\{ \sum_{1}^{n} {}_{\alpha} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}} \right\} \sqrt{R(t)}.$$

Pour trouver de la même façon les conditions nécessaires et suffisantes pour la réduction d'une intégrale hyperelliptique à une fonction algébrico-logarithmique, on partage cette intégrale en une somme d'une partie algébrique, de p intégrales de première espèce, de p intégrales de deuxième, et de n intégrales de troisième; puis on montre que, si cette somme peut se ramener à une fonction algébrico-logarithmique, il faut que, après l'élimination des coefficients non indépendants les uns des autres des intégrales de troisième espèce, un certain complexe formé avec ces intégrales, multipliées par des coefficients entiers, soit égal au logarithme d'une certaine fonction rationnelle de z et de $R(z)$, et que (en vertu du théorème de l'inversion des points d'embranchement et des limites des intégrales de troisième espèce) les points d'embranchement relatifs à ce complexe soient les racines d'une équation de la forme

$$p^2 - q^2 R(z) = 0,$$

équation où p et q représentent des fonctions rationnelles de r. M. Königsberger donne le moyen de reconnaître s'il en est ainsi. Il faut chercher si, d'une part, les coefficients des intégrales de seconde espèce qui résultent de la réduction s'annulent, et si, de l'autre, les coefficients obtenus de la même façon, pour les intégrales de première espèce, sont égaux et de signe contraire aux coefficients des intégrales de première espèce, qu'on introduit en appliquant le théorème sur l'inversion des points de discontinuité et des limites des intégrales de troisième espèce; car cette inversion, sans changement de valeur, convient seulement pour les intégrales hyperelliptiques principales de troisième espèce, dont les modules de périodicité s'annulent pour un système complet de coupures; on trouve d'ailleurs plusieurs formes pour ces derniers coefficients. Ces conditions étant toutes satisfaites, on obtient immédiatement

les fonctions logarithmiques et la partie algébrique, en sorte qu'on obtient d'un seul coup et les conditions à remplir et le résultat de la transformation. Ces résultats peuvent être résumés comme il suit :

Formant l'équation

$$T_1\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}}+T_2\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}}+\ldots+T_n\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}}=0,$$

on cherche à y satisfaire par un système de nombres entiers T_1, T_2, ..., T_n. Supposons qu'on trouve $n-k$ systèmes indépendants

$$\begin{array}{cccc} T_{1,1}, & T_{1,2}, & \ldots, & T_{1,n}, \\ T_{2,1}, & T_{2,2}, & \ldots, & T_{2,n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ T_{n-k,1}, & T_{n-k,2}, & \ldots, & T_{n-k,n}, \end{array}$$

et que les $n-k$ équations qui en résultent conduisent aux relations suivantes :

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_{k+1})^{-1}}=\lambda_{1,1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}}+\ldots+\lambda_{1,k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}}=\lambda_{n-k,1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}}+\ldots+\lambda_{n-k,k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}},$$

on cherchera le plus grand commun diviseur δ_i entre les nombres

$$D,\ \lambda_{1,i},\ \lambda_{2,i},\ \ldots,\ \lambda_{n-k,i},$$

i étant un des nombres 1, 2, ..., k. Posant maintenant

$$\frac{D}{\delta_i}=t_0^{(i)},\quad \frac{\lambda_{1,i}}{\delta_i}=t_1^{(i)},\quad \ldots,\quad \frac{\lambda_{n-k,i}}{\delta_i}=t_{n-k}^{(i)},$$

on formera les équations

$$P^{(1)2}-Q^{(1)2}R(z)=0,\quad P^{(2)2}-Q^{(2)2}R(z)=0,\quad \ldots,\quad P^{(k)2}-Q^{(k)2}R(z)=0,$$

qui, parmi les valeurs

$$\begin{array}{cccc} z_1, & z_{k+1}, & \ldots, & z_n, \\ z_2, & z_{k+1}, & \ldots, & z_n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ z_k, & z_{k+1}, & \ldots, & z_n, \end{array}$$



auxquelles correspondent les degrés de multiplicité

$$\begin{array}{llll} t_0^{(1)}, & t_1^{(1)}, & \ldots, & t_{n-k}^{(1)}, \\ t_0^{(2)}, & t_1^{(2)}, & \ldots, & t_{n-k}^{(2)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ t_0^{(k)}, & t_1^{(k)}, & \ldots, & t_{n-k}^{(k)}, \end{array}$$

admettent comme solutions celles-là seules qui sont encore des valeurs critiques; puis on formera la somme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t_0^{(1)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-t_1)^{-1}} \log\left[\frac{P^{(1)} - Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)} + Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}\right] \\ &+ \frac{1}{t_0^{(2)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-t_2)^{-1}} \log\left[\frac{P^{(2)} - Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)} + Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{t_0^{(k)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-t_k)^{-1}} \log\left[\frac{P^{(k)} - Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)} + Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}\right] = L(z). \end{aligned}$$

$L(z)$ sera l'ensemble des termes logarithmiques provenant de la réduction de l'intégrale hyperelliptique. Soit maintenant

$$\begin{aligned} &\frac{dL(z)}{dz} \\ &= \sum_1^k {}_i \left\{ \frac{1}{t_0^{(i)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-t_i)^{-1}} \frac{2R(z)\left[Q^{(i)}\frac{dP^{(i)}}{dz} - P^{(i)}\frac{dQ^{(i)}}{dz}\right] - P^{(i)}Q^{(i)}\frac{dR(z)}{dz}}{\sqrt{R(z)}} \right\} \\ &= \frac{\varphi(z)}{\sqrt{R(z)}}; \end{aligned}$$

il faudra que les conditions suivantes soient remplies :

$$\sum_1^n {}_\alpha \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

r prenant les valeurs successives $0, 1, 2, \ldots, p-1$,

$$\sum_1^n {}_\alpha \left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

r prenant les valeurs successives $p, p+1, \ldots, 2p-1$. Ces con-

ditions étant toutes remplies,

$$\left\{\sum_{\alpha}^{n}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}-\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}\sqrt{R(z)}$$

sera la partie algébrique qui, jointe à $L(z)$, donne la valeur algébrico-logarithmique de l'intégrale hyperelliptique.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME PREMIER.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

R. I

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *J. Hoüel*, Secrétaire de la rédaction, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux, cours d'Aquitaine, 82.

3006 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.



BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE,
LESPIAULT, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME I. — ANNÉE 1877.
(TOME XII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1877

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, diretti da F. BRIOSCHI e L. CREMONA. Série II. In-4° (¹).

Tome VI; 1873-1875.

Schläfli (*L.*). — Sur l'usage des lignes le long desquelles la valeur absolue d'une fonction est constante. (1-20).

Ascoli (*G.*). — Sur la série de Fourier. (21-71 et 298-351).

Ovidio (*E. d'*). — Étude sur la Géométrie projective. (72-100).

Betti (*E.*). — Sur les équations d'équilibre des corps élastiques. (101-111).

Dini (*U.*). — Sur les séries des fonctions sphériques. (112-140 et 208-215).

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 311, 370; t. VI, p. 237.

Igel (*B.*). — Sur la réduction des formes quadratiques ternaires à des sommes de carrés. (141-143; all.).

Bischoff (*J.*). — Extrait de deux Lettres à M. Cremona. (144-147; fr.).

1. Nombre de points d'inflexion d'une courbe C^n. — 2. Points communs aux courbes C^4 d'un faisceau, qui passent par treize points.

Christoffel (*E.-B.*). — Observation arithmétique. (148-152; latin).

Brill, Gordan, F. Klein, Lüroth, etc. — Alfred Clebsch et ses travaux scientifiques. Essai historique et critique. Rédigé par quelques-uns de ses amis. (153-207).

Traduit des *Mathematische Annalen*, t. VII.

Dini (*U.*). — Sur l'identité des développements des fonctions d'une variable en série de fonctions X_n. Appendice au Mémoire précédent. (216-225).

Lipschitz (*R.*). — Détermination de la pression à l'intérieur d'un fluide incompressible sujet à des attractions intérieures et extérieures. (226-231).

Bischoff (*J.-N.*). — Démonstration d'un théorème de M. Hesse. (232; fr.).

Beltrami (*E.*). — Sur le potentiel mutuel de deux systèmes rigides, et en particulier sur le potentiel élémentaire électrodynamique. (233-245).

Fergola (*E.*). — Sur la position de l'axe de rotation de la Terre par rapport à son axe de figure. (246-251).

Malet (*J.-C.*). — Deux théorèmes d'intégration. (252-259; angl.).

Hirst (*T.-A.*). — Sur la corrélation de deux plans (260-297; angl.).

Définition et détermination d'une corrélation. — Systèmes de corrélations. — Origine et nature des corrélations exceptionnelles. — Relations entre les caractéristiques et les singularités d'un système quelconque de corrélations. — Énumération et classification des systèmes fondamentaux de corrélations. — Nombre et nature des corrélations exceptionnelles dans les systèmes fondamentaux. — Nombre des corrélations satisfaisant à huit conditions élémentaires. — Connexes déterminés par les systèmes fondamentaux de corrélations.



T. VII; 1875-1876.

Aoust (l'abbé). — Intégrales des équations différentielles des courbes qui ont une même surface polaire. (1-17; fr.).

I. Solution analytique. — II. Solution géométrique. — III. Passage d'une intégrale particulière à l'intégrale générale. — IV. Généralisation. — V. Application.

Piuma (*C.-M.*). — Sur une classe d'intégrales exprimables à l'aide des seuls logarithmes. (18-24).

D'Ovidio (*E.*) — Les complexes et les congruences linéaires en Géométrie projective. (25-51).

Brioschi (*F.*). — Sur un nouveau point de corrélation entre les formes binaires du quatrième degré et les ternaires cubiques. (52-60).

Bonnet (*O.*). — Recherche des surfaces que l'on peut représenter sur le plan. (61-62; fr.).

D'après une Communication orale, faite par M. Bertrand à M. Brioschi, de cette méthode exposée par l'auteur aux élèves de l'École Polytechnique.

Barnabé Tortolini. — Notice nécrologique. (63-64).

Geiser (*C.-F.*), traduit par *F. Casorati.* — A la mémoire de Jacob Steiner. (65-88).

Clebsch A., traduit, avec Notes et Additions, par *F. Brioschi.* — Sur la théorie des formes binaires du sixième ordre et la trisection des fonctions hyperelliptiques. (89-148 et 247-257).

Publié par l'auteur dans les *Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, t. XIV, 1869.

Caporali (*E.*). — Sur la surface du cinquième ordre douée d'une courbe double du cinquième ordre. (149-188).

1. Formation d'un système linéaire de surfaces du cinquième ordre. — 2. Jacobienne du système Y. Propriétés de la transformation. — 3. Représentation plane d'une surface Y. Droites de la surface. — 4. Image de la courbe double. Construction d'une représentation de la surface Y. — 5. Sections planes de Y. Plans tangents et bitangents. Quartiques planes de la surface. — 6. Coniques, cubiques planes. Développables des plans bitangents. — 7. Plans tritangents. — 8. Points conjugués de la surface. — 9. Caractères hyperelliptiques de la courbe Θ. Construction du système des images des sections planes. — 10. Singularités ordinaires de la surface. Courbe parabolique. — 11. Courbes gauches de la surface. Systèmes de courbes hyperelliptiques. — 12. Équation de la surface. Formules de la représentation

plane. Équation de la conique Δ. — 13. Équations des courbes Π et Θ. Courbes conjuguées à elles-mêmes. — 14. Formules de la correspondance entre les espaces S et Σ.

Brioschi (*F.*). — Sur les conditions pour la décomposition d'une forme cubique ternaire en trois facteurs linéaires. (189-192).

Schläfli (*L.*). — Correction au Mémoire intitulé : « Quand est-ce que de la surface générale du troisième ordre se détache une portion rentrante? » ([1]). (192-194).

Casorati (*F.*). — Quelques formules fondamentales pour l'étude des équations algébrico-différentielles du premier ordre et du second degré entre deux variables à intégrale générale algébrique. (197-201).

Brioschi (*F.*). — Études analytiques sur les courbes du quatrième ordre. (202-216).

Sturm (*R.*). — Sur les forces en équilibre. (217-246).

Ascoli (*G.*). — Sur la série $\sum_{0}^{n} A_n X_n$. (258-344).

ARCHIEF, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap, onder de zinspreuk : *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven;* te Amsterdam ([2]).

Tome III; 1870-1874.

Bierens de Haan (*D.*). — Esquisse sur la vie et les travaux de GIDEON JAN VERDAM. (1-28).

Né à Mijdrecht, le 2 décembre 1802, mort en 1866. On lui doit, entre autres publications, l'achèvement du second volume des « Éléments de Calcul différentiel et intégral » (*Beginselen der Differentiaal-, Integraal- en Variatie- Rekening*, 2 vol. in-8) de Jacob de Gelder, des Traités de Trigonométrie plane et sphérique, et un grand nombre de Mémoires, publiés dans les divers recueils hollandais et dans l'*Archiv* de Grunert.

Badon Ghijben (*J.*). — Étude des sections centrales d'un elli-

([1]) Voir *Annali*, t. V, p. 289, et *Bulletin*, t. VI, p. 245.
([2]) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 209 et 211.

psoïde de même aire, de même forme ou de même excentricité. (29-46).

Van Haarst (*W.*). — Trouver le lieu géométrique des points de l'espace jouissant de cette propriété, que, si l'on abaisse des perpendiculaires sur les côtés (prolongés s'il est nécessaire) d'un triangle donné arbitrairement, la perpendiculaire à l'un des côtés, pris pour base, soit toujours moyenne proportionnelle entre les perpendiculaires sur les deux autres côtés (¹). (47-61).

Rasch (*J.-W.*). — Solution graphique des équations du troisième et du quatrième degré. (61-64).

Versluijs (*J.*). — Indiquer le moyen de trouver des courbes algébriques jouissant de la propriété d'être tangentes à elles-mêmes en un point donné, avec application à quelques exemples (¹). (65-71).

Van Haarst (*W.*). — Calculer la hauteur d'une pyramide quadrangulaire, connaissant la longueur de chacune de ces huit arêtes (¹). (72-31).

Versluijs (*J.*). — Même question (¹). (82-85).

Versluijs (*J.*). — Géométrie analytique dans l'espace, au point de vue des nouvelles méthodes. (87-146).

Coordonnées quadriplanaires. — I. Coordonnées quadriplanaires. Équation d'un plan. — II. Surfaces du second degré. — III. Sur la surface représentée par l'équation complète du second degré.

Versluijs (*J.*). — Applications des déterminants à l'Algèbre et à la Géométrie. (147-164).

Korteweg (*D.-J.*). — Par le centre de gravité d'une pyramide triangulaire homogène, mener une ligne telle que, en faisant tourner la pyramide autour de cette ligne comme axe, les forces centrifuges produites par le mouvement se fassent équilibre (¹). (165-188 et 253-268).

Korteweg (*D.-J.*). — On donne à un disque plan circulaire un mouvement rapide de rotation et en même temps un mouve-

---

(¹) Sujet de prix proposé par la Société.

ment de translation. Le mouvement de rotation a lieu autour d'un axe perpendiculaire au plan du disque et passant par son centre; le mouvement de translation a lieu dans le plan du disque. Ce plan fait un angle avec le plan horizontal, et la direction initiale du mouvement de translation fait un angle oblique avec l'intersection du plan incliné et de l'horizon. On demande de trouver la courbe décrite par le centre du disque sous l'action de la pesanteur et de la résistance de l'air, et de déterminer au moins approximativement par les quadratures mécaniques, sur un exemple choisi, le point où le disque tombera. On supposera la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, ou plutôt égale à une fonction $AS + BS^2 + CS^3$, où A, B, C sont des coefficients constants, et S la vitesse (¹). (189-208).

Versluijs (*J.*). — Deux miroirs de verre plans étant parallèles, et leurs faces réfléchissantes tournées l'une vers l'autre, on sait que les rayons lumineux qui tombent sur l'un des miroirs sont réfléchis sur l'autre, et réfléchis de nouveau par celui-ci, de sorte que la dernière direction des rayons est parallèle à celle qu'ils avaient avant de toucher le premier miroir. On suppose maintenant que l'un des miroirs tourne d'un angle α autour d'un certain axe, situé ou non dans son plan, et l'on demande quelle sera la direction des rayons partant du second miroir après avoir subi une double réflexion. — Résoudre cette question dans l'hypothèse où aucun des deux miroirs n'a ses deux surfaces, antérieure et postérieure, parallèles, mais où ces surfaces forment de très-petits angles. Traiter ensuite le cas particulier où la ligne d'intersection des surfaces réfléchissantes prolongées est *à peu près* parallèle à l'axe autour duquel tourne un des miroirs, et où en même temps la direction des rayons coupe cette ligne à peu près à angles droits (¹). (209-227).

Versluijs (*J.*). — Si, dans l'angle dièdre formé par les deux miroirs de la question précédente, on place une troisième plaque de verre, mais non étamée, qui laisse passer une partie des rayons et réfléchisse l'autre partie, on demande quelle doit être la position de cette plaque par rapport aux deux miroirs pour que la partie

(¹) Sujet de prix proposé par la Société.

des rayons qui traverse la plaque, est réfléchie deux fois par les miroirs et traverse de nouveau la plaque, soit parallèle à l'autre partie qui, sans traverser la plaque, est immédiatement réfléchie par elle. On supposera que cette plaque est limitée aussi par des surfaces non parallèles. — Application au cas où les deux miroirs et la plaque sont les faces latérales du tronc d'une pyramide de *très-petit angle* au sommet, de manière à former un solide à peu près prismatique, connu sous le nom de *dipléidoscope*. On demande alors quelle doit être la direction des rayons incidents pour que les rayons réfléchis, savoir ceux qui l'ont été une fois par la plaque et ceux qui l'ont été deux fois par les miroirs, soient parallèles, exactement ou aussi approximativement que possible (¹). (228-252).

Versluijs. (*J.*). — Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(269-280).

Schouten (*G.*). — Une tige homogène est liée par une de ses extrémités à un cordon attaché à un point fixe et supposé inextensible et sans pesanteur. Si maintenant la tige est un peu écartée de sa position verticale d'équilibre, de sorte toutefois qu'elle reste avec le cordon dans le même plan vertical, on propose de déterminer les petites oscillations qu'accomplira cette tige (¹). (281-292).

Schouten (*G.*) — Lorsqu'à une surface hélicoïdale, placée dans l'air avec son axe vertical, on imprime un mouvement de rotation autour de cet axe, on peut soulever ainsi un corps spécifiquement plus lourd que l'air. Déterminer la relation entre les dimensions de l'hélicoïde, sa vitesse angulaire et le plus grand poids que cet appareil puisse soulever, la résistance de l'air étant supposée proportionnelle au carré de la vitesse estimée suivant une direction normale à la surface (¹). (293-301).

(¹) Sujet de prix proposé par la Société.

Schouten (*G.*). — L'aberration de la lumière. (302-313).

Badon Ghyben (*J.*). — Démonstration de la loi de Snellius. (314-316).

Constance du rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction.

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE, uitgegeven door het Genootschap, onder de zinspreuk : *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven* (¹).

Tome I; 1875.

Onnen (*H.*). — Note sur la théorie des équations essentielles des courbes planes. (1-40).

Versluijs (*J.*). — Théorie des quaternions. (41-58 et 97-123).

Introduction. — I. Théorie algébrique des quaternions. — II. Exposition géométrique de la théorie des quaternions.

Rink (*H.-J.*). — Sur le mouvement d'un demi-cône circulaire droit, reposant par une de ses génératrices sur un plan horizontal (59-66).

Benthem (*A.*). — Transformation de la formule de Cardan dans le cas irréductible. (67-69).

Bierens de Haan (*D.*). — Sur la quadrature du cercle de Simon van der Eycke et sur ses conséquences. (70-86 et 206-211).

Benthem (*A.*). — Théorie des fonctions de variables complexes. (124-156).

1re PARTIE : *Les fonctions algébriques de nombres complexes* CONSTANTS. — *Chap. I.* Les formes complexes ordinaires. *Chap. II.* Réduction des formes complexes. (Addition, soustraction, multiplication, etc.). — 2e PARTIE : *Les fonctions algébriques de nombres complexes* VARIABLES. *Chap. III.* Les quantités complexes variables. *Chap. IV.* Les fonctions d'une variable complexe.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur la probabilité des divers résultats possibles d'une élection où les votants des deux couleurs se partagent en sections par la voie du sort. (157-178).

(¹) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 159.

Van Geer (*P.*). — Sur l'emploi des déterminants dans la méthode des moindres carrés. (179-188).

Lorentz (*H.-A.*). — Sur un plan horizontal repose un cylindre massif de révolution. Si le centre de gravité de ce cylindre se trouve hors de l'axe, et que, à un instant donné, il soit écarté de la verticale passant par l'axe, le cylindre prendra, par l'action de la pesanteur, un mouvement de roulement oscillatoire. En supposant que ces oscillations soient infiniment petites et qu'il n'y ait pas de frottement de roulement, on propose de déterminer la durée d'une oscillation (¹). (189-193).

Tesch (*J.-W.*). — Sur la position des plans qui coupent une surface à centre du second degré suivant des hyperboles équilatères. (194-198).

Schouten (*G.*). — L'aberration de la lumière. (199-200).

Van Wageningen (*F.*). — Mouvement curviligne d'une bille de billard. (200-205).

Liste par ordre de matières des articles de quelques Journaux mathématiques. (87-96 et 206-220).

Tome II; 1876.

Benthem (*A.*). — Théorie des fonctions de variables complexes. (Suite). (1-39 et 113-134).

Chap. V. La multiformité des fonctions. — 3e PARTIE : *Les fonctions transcendantes de nombres complexes. Chap. VI.* Les fonctions exponentielles et logarithmiques. *Chap. VII.* Les directions complexes.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur la probabilité des divers résultats possibles d'une élection où les votants des deux couleurs se partagent en sections par la voie du sort. (Fin). (40-61).

Paraira (*M.-C.*). — Note sur une transformation du second degré. (62-72).

Kapteyn (*W.*). — Considérations sur les fonctions symétriques. (73-75).

Schouten (*G.*). — Lorsqu'un point décrit une orbite et que, d'un

(¹) Sujet de prix proposé par la Société.

point fixe pris arbitrairement, on mène des droites représentant à chaque instant la vitesse du point mobile en grandeur et en direction, les extrémités de ces droites forment une courbe nommée *hodographe*. Déterminer cette courbe pour divers cas de mouvement et étudier sa relation avec le mouvement du point ([1]). (76-96).

Stamkart (*F.-J.*). — Sur le calcul d'une prime pour une assurance sur la vie devant être payée *n* fois par an, en remplacement d'une prime annuelle connue. (97-101).

De Jong (*J.*). — Notice sur l'Ouvrage de Hankel : *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*. (102-104).

Versluijs (*J.*). — Théorie des quaternions. (Suite). (135-149).

III. Applications de la théorie des quaternions à la Géométrie.

Bierens de Haan (*D.*). — Sur la « Théorie des fonctions de variables imaginaires », par M. Maximilien Marie. (150-160).

Korteweg (*D.-J.*). — Sur les formules d'approximation pour la somme des séries composées d'un grand nombre de termes. (161-176).

Van Leeuwen (*J.-H.*). — Division de l'angle en trois parties égales. (177-179).

A l'aide du cercle et de l'hyperbole équilatère.

Van Wageningen (*F.*). — Les cercles qui coupent sous des angles égaux trois cercles donnés. (180-185).

Benthem (*A.*). — Convergence des séries à termes complexes. (186-192).

Van Geer (*P.*). — Jean Bernoulli et sa polémique au sujet des forces vives. (193-206).

Étude intéressante sur les débats auxquels donna lieu le concours de 1724, où l'Académie des Sciences de Paris refusa le prix au remarquable travail de Bernoulli.

([1]) Sujet de prix proposé par la Société.

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (105-112 et 207-216).

Bibliographie mathématique et physique néerlandaise. (217-218).

ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES. In-8° (¹).

Tome X; 1875.

Baumhauer (*E.-H. von*). — Sur la théorie de l'origine cosmique de l'aurore polaire. (91-100).

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur la théorie mécanique du son. (135-150).
Voir *Verslagen en Mededeelingen*, etc., t. VII.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur la propagation libre du son. (151-165).
Ibid., t. IX.

Groneman (*H.-J.-H.*). — Sur la théorie de l'origine cosmique de l'aurore polaire. — Réponse de M. von Baumhauer. (268-273).

Eecen (*A.*). — Note sur la torsion du cylindre elliptique. (324-327).

Onnen (*H.*). — Discussion d'un système de spirales, d'après leurs équations essentielles. (361-379).

Table générale alphabétique et raisonnée des matières contenues dans les dix premiers volumes des *Archives Néerlandaises*, suivie d'une table générale des auteurs.

ATTI DELL' ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI. In-4° (²).

Tome XXVIII; 1874-1875.

Secchi (le P. *A.*). — Études physiques faites à l'Observatoire du Collége Romain sur les comètes de Tempel II et de Coggia III,

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. III, p. 347; t. V, p. 279; t. VIII, p. 181.

(²) Voir *Bulletin*, t. II, p. 19, 82, 148; t. III, p. 104; t. V, p. 15; t. VII, p. 135; t. VIII, p. 145.

en 1874. 2ᵉ Communication : Extrait des observations physiques faites sur la comète de Tempel II, 1874. (1-7, 2 pl.).

Diorio (*V.*). — Notice sur la vie et les travaux de Mgr D. Barnabé Tortolini. — Catalogue des travaux de Mgr Barnabé Tortolini. (93-106).

Voir une traduction de cette Notice, *Bulletin*, t. VIII, p. 272.

Secchi (le P. *A.*). — Sur la pluie observée au Collége Romain, de 1824 à 1874. (115-125, 1 pl.).

Azzarelli (*M.*). — Quadrature de surfaces planes et cubature de volumes de révolution, quand les lignes dont ces figures dépendent sont données par les équations implicites entre les coordonnées cartésiennes. (134-152).

Développement de la méthode proposée en 1738 par J. Hermann, dans les *Comm. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, t. VI, p. 189. L'auteur y joint une méthode fondée sur une substitution de fonctions circulaires ou hyperboliques.

De Rossi (*M.-St.*). — Premiers résultats des observations faites à Rome et à Rocca di Papa sur les oscillations microscopiques des pendules. Expériences et déductions. (168-204).

Ferrari (le P. *G.-St.*). — Troisième série de mesures micrométriques des étoiles doubles faites à l'équatorial du Collége Romain depuis le 22 juin 1872 jusqu'à la fin de 1874. (207-228).

Armellini (*T.*). — Nouveau manomètre télégraphique (229-233, 1 pl.)

Azzarelli (*M.*). — Étude d'une ligne du quatrième ordre. (234-253).

Courbe dans laquelle la partie de la perpendiculaire à l'extrémité du rayon vecteur comprise entre les axes coordonnés est de longueur constante. Son équation est $y^4 = a^2x^2 - x^2y^2$.

Azzarelli (*M.*). — Rectification et quadrature des courbes du second ordre. (284-304).

L'auteur fait usage d'un développement en série en fonction de la tangente au cercle circonscrit à l'ellipse, correspondante à l'amplitude du point considéré de l'ellipse.

De Rossi (*M.-St.*). — Les tremblements de terre de la Romagne, de septembre 1874 à mai 1875. (308-375).

Secchi (le P. *A.*). — Sur le dernier passage de Vénus devant le Soleil. (401-408).

Ferrari (le P. *G.-St.*). — Sur la relation entre les maxima et minima des taches solaires et les perturbations magnétiques extraordinaires. 4e Communication. (409-420).

Azzarelli (*M.*). — Des coordonnées biangulaires, et de leur application à la ligne droite et aux lignes de second ordre. (443-476).

Secchi (le P. *A.*). — Résumé des protubérances solaires observées au Collége Romain du 23 avril 1871 au 28 juin 1875. (477-484).

De Rossi (*M.-St.*) — Sur les normes et sur les instruments économiques proposés pour les observations microsismiques par le P. T. Bertelli et le professeur M.-S. de Rossi. (485-497, 1 pl.).

Nardi (Mgr *Fr.*). — Instructions données à l'Expédition anglaise partie pour les régions arctiques. (499-505).

Lais (le P. *G.*). — Une mappemonde hydrographique du XVIe siècle. (506-513, 1 pl.).

De Rossi (*M.-St.*). — Tableau général statistique, topographique et journalier des tremblements de terre arrivés en Italie dans l'année météorique 1874, avec la comparaison de quelques autres phénomènes. (514-536).

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI. 2e Série. In-4° (1).

Tome I; 1873-1874.

Pareto (*R.*). — Raisonnement critique sur les mercuriales considérées comme élément d'Arithmétique sociale. (1-21).

Ponzi (*G.*). — Histoire des volcans du Latium. (26-42, 1 pl.).

Volpicelli (*P.*). — Notices nécrologiques sur AUGUSTE DE LA RIVE, G.-B. DONATI et L. AGASSIZ. (43-52).

Battaglini (*G.*). — Note sur les cercles dans la Géométrie non euclidienne. (53-61).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 28; t. VIII, p. 233.

Volpicelli (*P.*). — Démonstration d'un théorème de Mécanique, énoncé, mais non démontré, par Poisson. (62-67, 1 pl.).

Tome II; 1874-1875.

Conti (*P.*). — Sur la résistance due au frottement. (16-200, 25 pl.). — Précédé d'un rapport d'une Commission composée de MM. *Betocchi, Blaserna, Beltrami, Cremona* (rapporteur). (1-15).

Menabrea (*L.-F.*). — Sur la détermination des tensions et des pressions dans les systèmes élastiques. (201-220).

Govi (*G.*). — Galilée et les mathématiciens du Collége Romain en 1611. (230-240).

Battaglini (*G.*). — Note sur une surface du huitième ordre. (244-249).

Betti (*E.*). — Sur la fonction potentielle d'une ellipse homogène. (262-263).

Respighi (*L.*). — Sur les variations du diamètre du Soleil, correspondantes à l'état variable d'activité de sa surface. Note II. (264-302).

Volpicelli (*P.*). — Réponse à la demande de M. Govi au sujet de la tension électrique. (303-332).

Conti (*P.*). — Sur la résistance à la flexion de la pierre sereine. Rapport de MM. *Betocchi, Cremona* et *Beltrami* (rapporteur). (408-416).

Favaro (*G.-B.*). — Sur les figures réciproques de la Statique graphique. (455-495, 2 pl.).

Cerruti (*V.*). — Sur un théorème de M. Menabrea. (570-581).

Battaglini (*G.*). — Note sur la quintique binaire. (582-591).

Tonelli (*A.*). — Observations sur la théorie de la connexion. (594-601).

Casorati (*F.*). — Sur la règle suivie par Bessel et par le général Baeyer, pendant la mesure du degré dans la Prusse Orientale, pour observer les angles horizontaux sans corriger continuellement la ligne de collimation et l'axe de rotation de la lunette du théodolite. (602-608, 1 pl.).



Volpicelli (*P.*). — Analyse physico-mathématique des effets électrostatiques relatifs à un isolateur armé et fermé. (609-628, 1 pl.).

Respighi (*L.*). — Observations du diamètre solaire, faites à l'Observatoire Royal du Capitole. (633-652).

Volpicelli (*P.*). — Sur la distribution du calorique dans le disque solaire apparent. Note historique et critique. (653-658).

Dini (*U.*). — Sur la fonction potentielle de l'ellipse et de l'ellipsoïde. (689-707).

Respighi (*L.*). — Sur les observations spectroscopiques du bord et des protubérances du Soleil. (708-719, 2 pl.).

Volpicelli (*P.*). — Expériences et raisonnements pour démontrer la vérité de la théorie du physicien italien Melloni sur l'influence électrique ou induction électrostatique, malgré ce qui a été publié de contraire par le professeur G. Govi. (841-861, 1 pl.).

Ascoli (*G.*). — Sur le concept d'intégrale définie. (862-872).

Respighi (*L.*). — Observations météorologiques faites à l'Observatoire du Capitole. Résumé des années 1873 et 1874. (873-912, 3 pl.).

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. In-8° (¹).

Tome VIII; 1872-1873.

Genocchi (*A.*). — Sur une controverse relative à la série de Lagrange. (18-31).

A propos des travaux de F. Chiò sur ce sujet.

Curioni (*G.*). — Sur le travail de la résistance moléculaire dans un solide élastique quelconque sollicité par des forces agissant d'une manière quelconque. (33-58, 1 pl.).

Mazzola (*G.*). — Éphémérides pour l'année 1873. (59-80).

Soleil, Lune, planètes, éclipses.

(¹) Voir *Bulletin*, t. V, p. 267.

Govi (*G.*). — Méthode optique pour mesurer les épaisseurs très-petites. (83-89).

Bruno (*G.*). — Sur une relation entre le point où se rencontrent deux tangentes d'une ellipse, et celui où concourent les normales à cette courbe aux points de contact des tangentes en question. (90-93).

Govi (*G.*). — Rapport sur l'utilité des Tables de logarithmes à plus de sept décimales, à propos d'un projet publié par M. Sang. (157-170; fr.).

Regis (*D.*). — Sur la détermination du centre de poussée d'un terre-plein contre un mur de soutènement; Mémoire contenant une comparaison entre les diverses méthodes proposées jusqu'à ce jour. (171-192, 2 pl.).

I. Objet du Mémoire. — II. Méthodes proposées par Coulomb, Prony, Poncelet, etc., pour déterminer le centre de poussée. — III. Méthode proposée par le professeur Curioni. Les formules de Curioni donnent, en général, un centre de poussée différent de celui que l'on obtient par la méthode de Prony, Poncelet, etc. — IV. Méthode proposée par le major du Génie De Benedictis. — V. Le centre de poussée que l'on trouve par la méthode de De Benedictis coïncide avec celui que l'on obtient par les formules de Curioni, quand on tient compte seulement du frottement des terres entre elles et avec le mur de soutènement. — VI. Le moment de la poussée par rapport à l'un des angles inférieurs du mur de soutènement se trouve en général plus grand par la méthode de Prony et Poncelet que par la méthode de Curioni. — VII. Observations dans le cas où il y a une surcharge. — VIII. Considérations sur les diverses méthodes qui ont été proposées.

Govi (*G.*). — Lettre inédite du prince Léopold de Medicis, fondateur de l'Académie del Cimento, au P. G.-B. Riccioli. (194-197).

Menabrea (*L.-F.*). — Lettre au Président de l'Académie. (198-200).

Rectification à propos d'une Communication concernant Lagrange.

Govi (*G.*). — Sur quelques nouvelles chambres claires. (253-259).

Codazza (*G.*). — Pyromètre à air avec manomètre à air comprimé. (351-356, 1 pl.).

Bruno (*G.*). — Théorème sur les points communs à une parabole et à une circonférence. (357-359).



Govi (*G.*). — Sur la mesure des hauteurs par le baromètre. Études historiques. I. Geminiano Montanari. (361-379).

Mazzola (*G.*). — Détermination du diamètre solaire par l'étude des exagérations auxquelles sont sujettes les grandeurs apparentes des astres. (587-654, 1 pl.).

Préface. — Énumération des causes exagératrices. — Irradiation. — Persistance des impressions lumineuses. — Expansion des images solaires sur la rétine. — Mesure de l'expansion des images provenant de l'imperfection de l'œil. — Invisibilité des phases de Vénus à l'œil nu. — Mesure de l'expansion télescopique. — Mesure de la perturbation atmosphérique. — Mesure de l'irradiation. — Application des considérations précédentes au diamètre solaire. — Diamètre apparent du Soleil rapporté à la distance moyenne de la Terre. — Ses variations. — Question de la variabilité du diamètre réel du Soleil. — Premières tentatives de résolution de la part des astronomes du *Collége Romain*. — Observations propres à déterminer les divers degrés d'irradiation et d'expansion atmosphérique. — Effets de l'exagération des images sur la détermination du diamètre solaire par les observations du passage d'une planète inférieure. — Observations méridiennes entreprises par l'auteur. — Diamètres particuliers pour les diverses observations. — Conclusion. — Additions.

Cavallero (*A.*). — Sur un appareil pour la détermination expérimentale des constantes des anémomètres. (663-690, 1 pl.).

Bertini (*E.*). — Doutes logiques sur les définitions 6, 7 et 8 du cinquième Livre d'Euclide. (889-899).

Tome IX; 1873-1874.

Curioni (*G.*). — Sur la rupture et sur les travaux de réparation de la galerie des Giovi. (26-44, 6 pl.).

Sur le chemin de fer de Turin à Gênes.

Sacheri (*G.*). — Sur le tracé des systèmes de points projectifs semblables. (76-80, 1 pl.).

Dorna (*A.*). — Sur les altitudes de la voie ferrée des Alpes. (90-93).

Dorna (*A.*). — Rectification de formules. (104-106).

L'auteur rectifie une formule de sa Note publiée en 1870 « Sur la formule barométrique du comte P. de Saint-Robert ». (Voir *Bulletin*, t. V, p. 267-268.) La formule reproduite par le *Bulletin* doit se lire ainsi :

$$x = 105,173.(1 + 0,0026\cos 2\lambda)\left(1 + \frac{a}{2}\frac{x}{R_0} + a\frac{X}{R_0}\right)$$
$$\times \frac{h_0 - h\left(1 - a\frac{x}{R_0}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{274}{76}\left[\frac{h_0 - \frac{3}{8}\eta_0}{t_0} + \frac{h\left(1 - a\frac{x}{R_0}\right) - \frac{3}{8}\eta}{t}\right]}.$$

Castigliano (*A.*). — Sur la résistance des tuyaux aux pressions continues et aux coups de bélier. (222-252).

Curioni (*G.*). — Sur la détermination des épaisseurs des revêtements des galeries dans des terrains mobiles. (253-290, 1 pl.).

Mazzola (*G.*). — Éphémérides du Soleil, de la Lune, des planètes pour l'année 1874. (291-311).

Luvini (*G.*). — Sur un nouvel instrument météorologico-géodético-astronomique, le diéthéroscope. (389-417, 1 pl., et 730-742, 3 pl.).

Curioni (*G.*). — Recherches théoriques sur la stabilité du revêtement primitif et du revêtement nouveau du tronçon de galerie des Giovi. (556-614).

Curioni (*G.*). — Indications sur les méthodes de sauvetage des navires submergés. (626-630).

Genocchi (*A.*). — Sur quelques lettres de Lagrange. (746-763).

Cette Communication est suivie de la reproduction de quatre lettres italiennes de Lagrange : 1° à Fagnano, 24 décembre 1755 ; 2° à Zanotti, 17 novembre 1762 ; 3° au P. Gherli, 5 juillet 1776 ; 4° à Lorgna, 25 mai 1781.

Tome X ; 1874-1875.

Castigliano (*A.*). — Sur l'équilibre des systèmes élastiques. (380-423).

Luvini (*G.*). — Équation d'équilibre d'une masse gazeuse sous l'action de son élasticité et de la force centrifuge. (508-516).

Luvini (*G.*). — Proposition d'une expérience qui peut résoudre d'une manière décisive la question de savoir si l'éther, dans l'intérieur des corps, est adhérent à ceux-ci, et s'il les suit dans leurs mouvements en totalité, en partie ou point du tout. (517-525).

Cavallero (*A.*). — Frein hydraulique d'Agudio, Cail et C[ie], et son application au locomoteur funiculaire Agudio. (577-630, 1 pl.).

Curioni (*G.*). — L'élasticité dans la théorie de l'équilibre et de la stabilité des voûtes. (631).

Mazzola (*A.*). — Éphémérides du Soleil, de la Lune et des principales planètes pour l'année 1875. (637-657).

Richelmy (*P.*). — Impressions produites par l'examen du Mémoire du Colonel Conti sur le frottement. (773–805).

Sacheri (*G.*). — Détermination graphique des moments de flexion sur les appuis d'un pont à plusieurs travées. Modifications d'une méthode proposée par Fouret à l'Académie des Sciences de Paris. (940–955, 3 pl.).

Genocchi (*A.*). — Sur quelques séries. (985–1016).

L'auteur se propose, dans ce Mémoire, de vérifier les assertions contenues dans les Mémoires de Riemann et de Hankel (Voir *Bulletin*, t. V, p. 20 et 79, et t. I, p. 117), et de corriger quelques erreurs dans les démonstrations de ce dernier.

Curioni (*G.*). — Sur les clouages dans les poutres en fer sollicitées par des forces perpendiculaires à leurs axes et à paroi de hauteur constante. (1017–1037, 1 pl.).

Tome XI; 1875-1876.

Zucchetti (*F.*). — Mémoire relatif à l'échelle des vitesses pour le mouvement uniforme des eaux dans les canaux. (88-99).

Castigliano (*A.*). — Nouvelle théorie sur l'équilibre des corps élastiques. (127–286).

Introduction. — I. Systèmes articulés. — II. Systèmes quelconques. — III. Formules les plus importantes de la résistance des solides. — IV. Application aux solides isolés à axe rectiligne. — V. Application aux solides à axe curviligne. — VI. Application à quelques systèmes composés. — Conclusion.

Mazzola (*G.*). — Éphémérides du Soleil et de la Lune pour 1876. Éclipses. Planètes. (287-307).

Richelmy (*P.*). — Sur les turbines à distribution partielle. (339-432).

Chap. I. *Théorie*. 1. Turbines dans lesquelles l'eau se meut à distance constante de l'axe de rotation. 2. Turbines dans lesquelles on doit tenir compte de l'effet de la force centrifuge. — Chap. II. *Expériences*. 1. Expériences faites avec une turbine du système hélicoïdal. 2. Expériences faites avec une turbine du système horizontal ou à force centrifuge. — Chap. III. *Règles pratiques*. 1. Roues dites *hélicoïdales*. 2. Roues à force centrifuge.

Bruno (*G.*). — Sur le quadrangle des intersections orthogonales d'une conique à centre avec les normales menées à cette courbe d'un point quelconque de son plan. (597-606).



COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

Tome LXXXI; 1875, 2e semestre (*suite*).

N° 14; 4 octobre.

Mouchez (E.). — Observatoire du Bureau des Longitudes, à Montsouris. (545).

Secchi (le P. *A.*). — Résultats des observations des protubérances et des taches solaires, du 23 avril 1871 au 28 juin 1875 (55 rotations). (563).

Mouchot (A.). — Résultats obtenus dans les essais d'applications industrielles de la chaleur solaire. (571).

Antoine (Ch.). — Sur les propriétés mécaniques de différentes vapeurs à saturation dans le vide. (574).

Hureau de Villeneuve (A.). — De la formation des nuages. (579).

Angot (A.). — Sur l'éclipse de Soleil des 28 et 29 septembre 1875. (589).

Brioschi. — Sur la réduction d'une forme cubique ternaire à sa forme canonique. (590).

M. Brioschi fait connaître les formules qui permettent de passer, par une substitution linéaire, de la forme ternaire $l(x_1, x_2, x_3)$ à la forme canonique

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6g y_1 y_2 y_3.$$

Croullebois. — Sur la valeur du coefficient de détente de la vapeur d'eau surchauffée. (592).

Fonvielle (W. de). — Sur les nuages de forme rubanée. (500).

Amigues (É.). — Observation d'un bolide à Couiza (Aube), dans la soirée du 30 septembre 1875. (601).

D'Arbaud-Blonzac. — Les orages de 1875. (601).

(¹) Voir *Bulletin*, I, 29, 63, 154, 211, 316, 334, 377; II, 203, 241, 2763, 30; III, 54, 94, 107, 148, 213, 295; IV, 72, 127; V, 120; VI, 24, 76, 116, 285; VII, 153, 197; VIII, 37, 67, 161; IX, 149, 199.

N° 15; 11 octobre.

Secchi (le P. *A.*). — Résultats des observations des protubérances et des taches solaires, du 25 avril 1871 au 28 juin 1875 (55 rotations). (Fin). (605).

Soret (*J.-D.*) et *Sarazin* (*Éd.*). — Sur la polarisation rotatoire du quartz. (610).

Gaugain (*J.-M.*). — Nouvelle Note sur les procédés d'aimantation. (613).

Planté (*G.*). — Sur la formation de la grêle. (616).

Buchwalder (*Éd.*). — Remarques sur l'emploi fait, dans l'antiquité, de la chaleur solaire, à l'occasion de la Note récente de M. Mouchot. (627).

N° 16; 18 octobre.

Pâris (le vice-amiral) et *Mouchez*. — Présentation de la *Connaissance des Temps* pour l'année 1877. (641).

Chasles (*M.*). — Nouveaux théorèmes relatifs à des conditions d'égalité de grandeur de segments rectilignes sur les tangentes des courbes géométriques, d'ordre et de classe quelconques. (643).

Du Moncel (*Th.*). — Treizième Note sur la conductibilité électrique des corps médiocrement conducteurs. (649).

Daubrée. — Chute d'une météorite survenue le $\frac{\text{12 mai}}{\text{30 avril}}$ 1874 à Sevrouskof, district de Belgorod, gouvernement de Koursk. (661).

Croullebois. — Sur le pouvoir rotatoire du quartz dans le spectre ultra-violet. (666).

Marié-Davy. — Carte magnétique de la France, pour 1875. (681).

Gruey. — Observations des Perséides, faites le 10 août 1875, à Spoix (Côte-d'Or). (683).

Warren de la Rue et *Müller* (*H.-W.*). — Sur une pile au chlorure d'argent, composée de 3240 éléments. (686).

Perrey (*Al.*). — Sur la fréquence des tremblements de terre relativement à l'âge de la Lune. (690).



Rivet. — Secousses de tremblements de terre à la Martinique, et phénomènes électriques qui ont précédé chacune d'elles dans les fils télégraphiques.

N° 17; 25 octobre.

Annonce de la mort de *Charles Wheatstone.* (697).

Ledieu (*A.*). — Sur le rendement des injecteurs à vapeur. (711).

Magnac (*de*). — Progrès réalisé dans la question des atterrissages, par l'emploi de la méthode rationnelle, dans la détermination des marches diurnes des chronomètres. (715).

Cazin (*A.*). — Observations magnétiques faites à l'île Saint-Paul, en novembre et décembre 1874. (718).

Delachanal (*B.*) et *Mermet* (*A.*). — Nouveau tube spectro-électrique (fulgurator modifié). (726).

Le Verrier (*U.-J.*). — Communication d'observations des planètes (140) et (150). (745).

Warren de la Rue et *Müller* (*H.-W.*). — Expériences faites sur des tubes de Geissler, avec la pile au chlorure d'argent précédemment décrite. (746).

Planté (*G.*). — Sur les nébuleuses spirales. (749).

Broun (*J.-A.*). — Note sur les relations observées à Trevandrum entre les résultats des observations magnétiques et la période des taches solaires. (752).

N° 18; 2 novembre.

Chasles (*M.*). — Détermination de la classe de courbes enveloppes qui se présentent dans les questions d'égalité de grandeur de deux segments faits sur des tangentes de courbes géométriques. (757).

Tresca. — Note sur la voiture à vapeur de M. Bollée, du Mans. (762).

Du Moncel (*Th.*). — Quatorzième Note sur la conductibilité électrique des corps médiocrement conducteurs. (766).

Ledieu (*A.*). — Sur le rendement des injecteurs à vapeur. (Fin). (773).

Mansion (*P.*). — Sur la méthode de Cauchy, pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. (790).

En appliquant à cette méthode les idées de M. Lie, M. Mansion retrouve divers résultats obtenus par MM. Lie et Darboux.

N° 19; 8 novembre.

Le Verrier. — Découverte de deux nouvelles petites planètes, faite à l'Observatoire de Paris, par MM. *Paul* et *Prosper Henry*. (801).

N° 20; 15 novembre.

Le Verrier. — Observations méridiennes de petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. *G.-B. Airy*), et à l'Observatoire de Paris pendant le troisième trimestre de 1875. (837).

Du Moncel (*Th.*). — Quinzième Note sur la conductibilité électrique des corps médiocrement conducteurs. (864).

Spottiswoode (*W.*). — Sur la représentation des figures de Géométrie à *n* dimensions par les figures corrélatives de la Géométrie ordinaire. (875).

Soit $(x, y, \ldots) = 0$ l'équation d'une figure quelconque dans un espace à n dimensions. On partage les variables $x, y, \ldots$ en groupes de trois variables au plus, x, y, z; u, v, w; .... Dans chaque groupe, on introduit encore une variable et l'on remplace x, y, z; u, v, w; ... par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}; \frac{u}{s}, \frac{v}{s}, \frac{w}{s}$; .... Après avoir chassé les dénominateurs, l'équation proposée peut s'écrire $(x, y, z, t)(u, v, w, s)(\ldots) = 0$. Sous cette forme, l'équation représente, pour chaque système de valeurs de $u : v : w : s, \ldots$, une surface $(\ldots)(x, y, z, t) = 0$; pour chaque système de valeurs de $x : y : z : t, \ldots$, une surface $(\ldots)(u, v, w, s) = 0$, etc. On aura, par conséquent, d'un côté, une série multiplement infinie de surfaces $(\ldots)(x, y, z, t) = 0$, dont la multiplicité sera égale au nombre des variables indépendantes $u, v, \ldots$, et de l'autre, autant de surfaces ou de courbes qu'il y a de groupes de surfaces.

Saltel (*L.*). — Application du principe de correspondance analytique à la démonstration du théorème de Bézout. (884).

Flammarion (*C.*). — Observations de la planète Jupiter. (887).

Marié-Davy. — Note sur les tempêtes du 6 au 11 novembre 1875.

N° 21; 22 novembre.

Sainte-Claire Deville (*Ch.*). — Sur la périodicité des grands mouvements de l'atmosphère. (921).

Tisserand. — Suite des observations des éclipses des satellites de Jupiter, faites à l'Observatoire de Toulouse. (925).

Ledieu (*A.*). — Nouvelles observations sur la loi de la détente pratique dans les machines à vapeur. (928).

[illegible]int-Edme (*E.*). — Sur la construction des paratonnerres. (949).

[illegible]mmarion (*C.*). — Suite des observations de la planète Jupiter. [illegible]58).

[illegible]tiswoode (*W.*). — Nouveaux exemples de la représentation, [illegible]r les figures de Géométrie, des conceptions analytiques de la [illegible]ométrie à *n* dimensions. (961).

A[illegible] (l'abbé). — Des surfaces coordonnées telles qu'en chaque [illegible]t, considéré comme centre d'une sphère de rayon constant, l[illegible]ormales aux surfaces déterminent sur cette sphère les som[illegible] d'un triangle sphérique d'aire constante. (963).

[illegible]l système de surfaces jouit de cette propriété que, si l'on prend les trois co[illegible]s d'un arc coordonné et qu'on projette chacune sur les plans tangents aux deu[illegible]faces qui contiennent l'arc d'inclinaison, la somme de ces six projections ser[illegible]e.

Le P[illegible]e (*C.*). — Note sur les nombres de Bernoulli. (966).

Dé[illegible]tration de la relation

$$B_{2p} [illegible] \frac{(2p-3)(2p-1)}{1.2.3} B_{2p-2} + \frac{(2p-5)(2p-3)(2p-2)(2p-1)}{1.2.3.4.5} B_{2p-3}$$
$$\ldots + \frac{B_1}{1.2} = \frac{1}{2p(2p+1)}.$$

N° 22; 29 novembre.

Chasles (*M.*). — Théorèmes dans lesquels se trouve une condition d'éga[illegible]é de deux segments pris sur des normales et des tangentes des c[illegible]rbes d'ordre et de classe quelconques. (993).

[illegible]elgra[illegible]. — Perturbations atmosphériques de la saison chaude de [illegible]e 1875. Note sur le groupe de pluies du 21 au 24 juin 1875; crues de la Garonne; désastres de Toulouse. (1017).

Ledieu (*A.*). — Réponses à quelques objections soulevées par nos récentes Communications sur le rendement des injecteurs à vapeur. (1023).

Guerout (*A.*). — Sur le coefficient d'écoulement capillaire. (1025).

Nansouty (*Ch. de*). — Sur l'Observatoire météorologique du pic du Midi de Bigorre (Hautes-Pyrénées). (1033).

Saltel (*L.*). — Application d'un théorème complémentaire du principe de correspondance à la détermination sans calcul de l'ordre de multiplicité d'un point O, qui est un point multiple d'un lieu géométrique donné. (1047).

Rouché (*E.*). — Sur la discussion des équations du premier degré. (1050).

Halphen. — Sur les points d'une courbe ou d'une surface, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle ou aux dérivées partielles. (1053).

Soit généralement $U(x_1, \ldots, x_\lambda, y) = 0$ une équation de degré m, définissant la fonction y des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_\lambda$. On considère une équation aux dérivées partielles algébrique $f = 0$. Les systèmes des valeurs des variables pour lesquelles la fonction y satisfait à l'équation $f = 0$ sont définis par l'équation $U = 0$ et une seconde équation algébrique $\Phi(x_1, \ldots, x_\lambda, y) = 0$. Le degré de cette équation $\Phi = 0$ est de la forme $\alpha(m-1) + \beta$, les coefficients α, β étant des nombres entiers, le premier positif, le second positif ou négatif, qui ne dépendent que de l'équation aux dérivées partielles.

N° 23; 6 décembre.

Belgrand. — Perturbations atmosphériques de la saison chaude de l'année 1875. Étude du groupe de pluies du 21 au 24 juin; son action sur les cours d'eau. (1082).

Baills. — Sur les phénomènes astronomiques observés en 1597 par les Hollandais à la Nouvelle-Zemble. (1088).

Gaugain (*J.-M.*). — Note sur le procédé d'aimantation dit *de la double touche*. (1091).

Mendéléief (*D.*). — Sur la température des couches élevées de l'atmosphère. (1094).

Allard (*E.*). — Sur la transparence des flammes et de l'atmosphère, et sur la visibilité des feux scintillants. (1096).

Duter (*E.*). — Sur la distribution du magnétisme dans les plaques d'acier circulaires ou elliptiques. (1099).

Stephan (*E.*). — Découverte de la 157e petite planète, faite à Marseille par M. Borrelly, le 1er décembre. Éphémérides et observations de planètes récemment découvertes. (1119).

Henry (*Pr.*). — Observations des planètes (152) et (154), faites à l'Observatoire de Paris. (1121).

Caspari (*E.*). — Sur l'isochronisme des spiraux de chronomètres. (1122).

Trève et *Durassier*. — Note sur la distribution du magnétisme à l'intérieur des aimants. (1123). — Observations de M. *Jamin*. (1126).

N° 24; 13 décembre.

Jamin (*J.*). — Sur les lois de l'influence magnétique. (1150).

Belgrand. — Perturbations atmosphériques de la saison chaude de l'année 1875. Inondations du midi de la France. (1168).

Janssen (*J.*). — Notes accompagnant la présentation de plaques micrométriques destinées aux mesures d'images solaires. (1173).

Mendéléief (*D.*). — Sur la température des couches élevées de l'atmosphère. 2e Note. (1182).

Lalanne (*L.*). — Exposé d'une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés. Ire Partie. (1186).

Si, dans l'équation

$$z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} + \ldots + l = 0,$$

on regarde deux des coefficients $a, b, \ldots, l$ comme variables, et si on les désigne dès lors par x, y, on pourra considérer l'équation comme définissant un conoïde dont toutes les génératrices sont parallèles au plan des xy. Une portion de ce conoïde pourra être représentée par la série des projections sur le plan des xy de ses génératrices qui correspondent aux valeurs de z comprises, par exemple, entre les limites des racines de l'équation numérique, chacune des projections étant *cotée* suivant sa distance au plan des xy. Le point de ce plan, dont les coordonnées x, y sont égales aux coefficients donnés de l'équation, tombera, si l'équation admet une racine réelle, entre deux droites voisines, qui, par une interpolation à vue, fourniront une valeur approchée de cette racine. On devine le rôle que l'enveloppe de projections des génératrices joue dans cette méthode.

Méray (*Ch.*). — Sur la discussion d'un système d'équations linéaires simultanées. (1203).

Crova (*A.*). — Sur l'intensité calorifique de la radiation solaire et son absorption par l'atmosphère terrestre. (1205).

Douliot. — Sur l'action des flammes en présence des corps électrisés. (1208).

Tissandier (*G.*). — Observations météorologiques en ballon. (1216).

N° 25; 20 décembre.

Chasles (*M.*). — Théorèmes dans lesquels se trouvent des couples de segments ayant un rapport constant. (1221).

Jamin (*J.*). — Formule de la quantité de magnétisme enlevé à un aimant par un contact de fer et de la force portative. (1227).

Lalanne (*L.*). — Exposé d'une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés. 2e Partie. (1243).

Trève et *Durassier*. — Nouvelles recherches sur le magnétisme intérieur des aimants. (1246).

N° 26; 27 décembre.

Prix des Sciences mathématiques, proposés pour 1876, 1877, 1878, 1879, 1880 et 1883.

Grand prix des Sciences mathématiques (1876). — Déduire d'une discussion nouvelle, approfondie, des anciennes observations d'éclipses, la valeur de l'accélération séculaire apparente du moyen mouvement de la Lune. Fixer les limites de l'exactitude que comporte cette détermination.

Grand prix des Sciences mathématiques (1876). — Théorie des solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Prix Poncelet (1876). — Décerné à l'auteur de l'ouvrage le plus utile aux progrès des Sciences mathématiques pures et appliquées.

Prix Montyon. (1876). — Mécanique.

Prix Plumey (1876). — Décerné à l'auteur du perfectionnement



le plus important relatif à la construction ou à la théorie d'une ou de plusieurs machines hydrauliques, motrices ou autres.

Prix Dalmont (1876). — Décerné aux ingénieurs des Ponts et Chaussées qui auront présenté à l'Académie le meilleur travail ressortissant d'une de ses Sections.

Prix Bordin (1876). — Trouver le moyen de faire disparaître ou au moins d'atténuer sérieusement la gêne et les dangers que présentent les produits de la combustion sortant des cheminées sur les chemins de fer, sur les bâtiments à vapeur, ainsi que dans les villes à proximité des usines à feu.

Prix Lalande (1876). — Astronomie.

Prix Damoiseau (1876). — Revoir la théorie des satellites de Jupiter; discuter les observations et en déduire les constantes qu'elles renferment, et particulièrement celles qui fournissent une détermination directe de la vitesse de la lumière; enfin reconstruire des Tables particulières pour chaque satellite.

Prix Bordin (1876). — Rechercher, par de nouvelles expériences calorimétriques, et par la discussion des observations antérieures, quelle est la véritable température à la surface du Soleil.

Prix Montyon (1876). — Statistique.

Grand prix des Sciences mathématiques (1877). — Application de la théorie des transcendantes elliptiques ou abéliennes à l'étude des courbes algébriques.

Prix Vaillant (1877). — Décerné à l'auteur du meilleur Mémoire sur l'étude des petites planètes, soit par la théorie mathématique de leurs perturbations, soit par la comparaison de cette théorie avec l'observation.

Prix Valz (1877). — Décerné à l'auteur des meilleures cartes se rapportant à la région du plan invariable de notre système.

Grand prix des Sciences mathématiques (1878). — Étude de l'élasticité des corps cristallisés, au double point de vue expérimental et théorique.

Tome LXXXII; janvier-juin 1876.

N° 1; 3 janvier.

Jamin (*J.*). — Sur la constitution intérieure des aimants. (19).

Lœwy. — Éphéméride de la planète (156), déterminée par M. *Rayet* au moyen d'observations faites à Marseille. (33).

Saint-Venant (*de*). — Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps et sur le coefficient des dilatations. (33).

Du Moncel (*Th.*). — Seizième Note sur la conductibilité électrique des corps médiocrement conducteurs. (39).

Clausius (*R.*). — Sur une nouvelle loi fondamentale de l'Électrodynamique. (49).

Hirn. — Sur l'étude des moteurs thermiques et sur quelques points de la théorie de la chaleur en général. (52).

Jurien de la Gravière. — Rapport sur la méthode employée par M. *de Magnac* pour représenter les marches diurnes des chronomètres. (61).

Saltel (*L.*). — Détermination, par le principe de correspondance analytique, de l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques. (63).

Serret (*P.*). — Note sur un point de Géométrie infinitésimale. (67).

Si l'on considère, dans une courbe plane quelconque, la ligne diamétrale lieu géométrique du point milieu des cordes parallèles à une direction donnée, la tangente en un point quelconque du diamètre et les tangentes aux points correspondants de la courbe primitive concourent en un même point. Le tracé géométrique de deux de ces tangentes entraîne donc, en général, le tracé de la troisième, et il n'y a exception que pour le cas où les trois sommets du triangle se confondent. La détermination de la médiane de ce triangle évanouissant, ou de la tangente au diamètre en ce point particulier, constitue un problème assez délicat que M. P. Serret résout par la seule Géométrie.

Appell. — Note sur les cubiques gauches. (70).

Un corps solide étant en mouvement, si, à un point p du corps, on fait correspondre le plan P mené par ce point perpendiculairement à sa vitesse, et, inversement, à un plan P le point p de ce plan dont la vitesse lui est normale, on a le système des plans et de leurs foyers dont les propriétés ont été démontrées par

M. Chasles. D'autre part, étant donnée une cubique gauche, si à un point p' on fait correspondre le plan P' passant par les points de contact des trois plans osculateurs qu'on peut mener de p' à la courbe, et à un plan P' le point de concours p' des plans osculateurs à la courbe aux trois points où elle est rencontrée par le plan P', on obtient un système (p' P') dont les propriétés, analogues à celles du système (pP), ont été étudiées par M. Schröter. L'analogie entre les systèmes (pP), (p'P') conduit à supposer qu'à toute cubique gauche correspond un mouvement hélicoïdal, tel que les deux systèmes coïncident, et réciproquement qu'à tout mouvement hélicoïdal correspondent des cubiques pour lesquelles la coïncidence a lieu : c'est ce qu'établit effectivement M. Appell.

Stephan (*E.*). — Éléments elliptiques de la planète (157) Déjanire, et éphéméride calculée. (80).

Crova (*A.*). — Recherches sur la loi de transmission par l'atmosphère terrestre des radiations calorifiques du Soleil. (81).

Mouton. — Sur les phénomènes d'induction. (84).

N° 2; 10 janvier.

Mouchez (*E.*). — Mesures micrométriques prises pendant le passage de Vénus. (125).

Ledieu (*A.*). — Considérations nouvelles sur la régulation des tiroirs. (132).

Sainte-Claire Deville (*Ch.*). — Rapport sur le projet d'un Observatoire physique au sommet du pic du Midi de Bigorre, soumis à l'Académie par M. le général *Ch. de Nansouty* au nom de la Société Ramond. (136).

Bouquet (*C.*). — Rapport sur un Mémoire ayant pour titre : « Problème inverse des brachistochones », par M. *Haton de la Goupillière*. (143).

Gaugain (*J.-M.*). — Influence de la trempe sur l'aimantation. (144).

Gaumet. — Sur un télémètre de poche à double réflexion. (152).

Lipschitz (*R.*). — Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface. (160).

Serret (*P.*). — Note sur une classe particulière de décagones gauches inscriptibles à l'ellipsoïde. (162).

Tout décagone gauche dont les côtés opposés se coupent deux à deux sur un même plan est inscriptible à une surface du second degré.

Lucas (*É.*). — Note sur l'application des séries récurrentes à la recherche de la loi de distribution des nombres premiers. (165).

M. Lucas donne une série de propositions s'appliquant aux séries récurrentes qui contiennent un terme nul, telles que celles de Lamé définies par les relations

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 1.$$

Ces propositions sont relatives aux formes linéaires sous lesquelles se présentent les diviseurs premiers des termes de ces séries. Il arrive en particulier à cette conclusion, que le nombre $2^{127} - 1$, qui contient trente-neuf chiffres, est premier.

N° 3; 17 janvier.

Faye. — Sur la trombe de Hallsberg (avec des conclusions générales). (179).

Ledieu (*A.*). — Considérations nouvelles sur la régulation des tiroirs (*fin*). (192).

André (*Ch.*). — Sur le passage de Vénus du 9 décembre 1874. (205).

Serret (*P.*). — Sur une nouvelle analogie aux théorèmes de Pascal et de Brianchon. (208).

Lipschitz (*R.*). — Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface. (218).

M. Lipschitz compare une généralisation du théorème d'Euler, donnée par M. C. Jordan (séance de l'Académie du 19 octobre 1874), avec une généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface, qu'il a exposée dans le *Journal de Borchardt*, t. 81, p. 274, et analysée lui-même dans le *Bulletin*, t. IV, p. 91, 142, 212, 297.

Planté (*G.*). — Sur les trombes. (220).

N° 4. 24 janvier.

Tisserand (*F.*). — Sur l'étoile 70 *p* Ophiuchus. (254).

Pictet (*R.*). — Application de la théorie mécanique de la chaleur à l'étude des liquides volatils; relations simples entre les chaleurs latentes, les poids atomiques et les tensions des vapeurs. (260).

Thoulet. — Carte du globe terrestre en projection gnomonique sur l'horizon du pôle nord. (264).

Jordan (*C.*). — Sur les covariants des formes binaires. (269).

Serret (*P.*). — Sur une classe particulière de polygones gauches inscriptibles. (270).

Chautard (*J.*). — Actions magnétiques exercées sur les gaz raréfiés des tubes de Geissler (4e Note). (272).

Salet (*G.*). — Sur le spectre de l'azote et sur celui des métaux alcalins dans les tubes de Geissler. (275).

Favé (*L.*). — Sur l'action de la chaleur dans l'aimantation. (276).

Daubrée. — Observations sur la Note précédente. (279).

N° 5; 31 janvier.

Tresca. — Compte rendu des expériences faites pour la détermination du travail dépensé dans les machines magnéto-électriques de M. Gramme, employées pour produire de la lumière dans les ateliers de MM. Sautter et Lemonnier. (299).

Becquerel (*H.*). — Recherches sur la polarisation rotatoire magnétique (2e Partie). (308).

Lucas (*F.*). — Vibrations calorifiques d'un solide homogène à température uniforme. (311).

Planté (*G.*). — Sur la formation de la grêle (2e Note). (314).

Henry (*Paul*). — Découverte de la planète (169). (321).

Serret (*P.*). — Sur les courbes gauches du quatrième ordre. (322).

Hermite (*H.*). — Sur les cartes topographiques. (326).

N° 6; 7 février.

Phillips. — Rapport sur un Mémoire de M. *Peaucellier* relatif aux conditions de stabilité des voûtes en berceau. (362).

Darboux (*G.*). — Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de développements en série (Ire Partie). (365).

Mannheim (*A.*). — Nouvelles propriétés géométriques de la surface de l'onde qui s'interprètent en Optique. (368).

Serret (*P.*). — Sur les courbes gauches du quatrième ordre. (370).

Crova (*A.*). — Sur la répartition de la radiation solaire à Montpellier pendant l'année 1875. (375).

N° 7; 14 février.

Darboux (*G.*). — Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de développements en série (IIe Partie). (404).

Lucas (*F.*). — Vibrations d'un solide homogène en équilibre de température. (406).

Mendéléief (*D.*). — Des écarts dans les lois relatives aux gaz. (412).

Landolf. — Description du diplomètre. (424).

Cousté. — Sur l'origine et le mode de génération des tourbillons atmosphériques, et sur l'unité de direction de leur mouvement gyratoire. (425).

N° 8; 21 février.

Le Verrier. — Observations méridiennes des petites planètes faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. *G.-B. Airy*) et à l'Observatoire de Paris pendant le quatrième trimestre de l'année 1875. (429).

Chasles (*M.*). — Théorèmes relatifs au déplacement d'une figure plane dont deux points glissent sur deux courbes d'ordre et de classe quelconques. (431).

Faye. — Remarques au sujet de la loi des tempêtes. (437).

Tisserand (*F.*). — Note sur l'invariabilité des grands axes des orbites des planètes. (442).

Abbadie (*A. d'*). — Rapport sur un appareil de M. *Vinot* servant à reconnaître les étoiles. (445).

Mendéléief et *Kaïander* (*N.*). — Du coefficient de dilatation de l'air sous la pression atmosphérique. (450).

Blondlot (*R.*). — Sur certains points remarquables des aimants. (454).

N° 9; 28 février.

Sainte-Claire Deville (*Ch.*). — Sur les méthodes en Météorologie. (480).

Morin et *Berthelot*. — Rapport sur le Mémoire publié par M. le capitaine *Noble*, de l'artillerie anglaise, et par M. *Abel*, membre de la Société Royale de Londres, sous le titre : *Researches on explosive fired gun powder*. (487).

Liais (*E.*). — Note sur le cercle méridien de l'Observatoire Impérial de Rio-de-Janeiro. (495).

Léauté (*H.*). — Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle; perfectionnement de la méthode de Willis. (507).

Hinrichs (*G.*). — Sur l'oscillation de la mi-novembre dans l'Amérique. (520).

Fonvielle (*W. de*). — Les combustions météoriques. (527).

N° 10; 6 mars.

Morin (*A.*). — Note sur les opérations géodésiques entreprises au Brésil. (529).

Villarceau (*Y.*). — Transformation de l'Astronomie nautique, à la suite des progrès de la Chronométrie. (531).

Resal (*H.*). — Note sur les chemises de vapeur des cylindres des machines. (537).

Sainte-Claire Deville (*Ch.*). — Sur les variations ou inégalités périodiques de la température (11e Note). (540).

Clausius (*R.*). — Sur une simplification nouvelle de la loi fondamentale de l'Électrodynamique. (546).

Haton de la Goupillière (*J.-N.*). — Méthodes de transformation fondées sur la conservation d'une relation invariable entre les dérivées de même ordre. (552).

Mannheim (*A.*). — Démonstration géométrique d'une relation due à M. *Laguerre*. (554).

Trépied (*Ch.*). — Sur la photométrie des étoiles et la transparence de l'air. (557).

N° 11 ; 13 mars.

Le Verrier. — Observations de la Lune faites aux instruments méridiens de l'Observatoire de Paris pendant l'année 1875. (577).

Villarceau (*Y.*). — Deuxième Note sur la transformation de l'Astronomie nautique à la suite des progrès de la Chronométrie. (580).

Becquerel (père) et *Becquerel* (*Edm.*). — Observations de température faites au Muséum pendant l'année météorologique 1875, avec les thermomètres électriques placés à des profondeurs variant de 1 à 36 mètres sous le sol, et résumé de dix années d'observations. (587).

Belgrand. — Sur la crue de la Seine de février-mars 1876. (596).

Ledieu (*A.*). — Observations à propos de la dernière Communication de M. *H. Resal* « Sur les chemises de vapeur des cylindres des machines ». (599).

Boileau (*P.*). — Note concernant les tuyaux de conduite. (601).

Jordan (*C.*). — Sur les équations linéaires du second ordre dont les intégrales sont algébriques. (605).

André (*Ch.*) — Sur le passage de Vénus du 9 décembre 1874. (607).

Peters (*C.*). — Lettre relative à la découverte de la planète (160).

Henry (*Paul* et *Pr.*). — Observation de la planète (160) faite à l'équatorial du jardin. (623).

Borrelly. — Observation de la planète (160) faite à l'Observatoire de Marseille. (624).

Leveau (*G.*). — Sur le prochain retour au périhélie de la comète de d'Arrest. (624).

Planté (*G.*). — Sur les aurores polaires. (626).

Gruner (*L.*). — Sur les causes qui ont amené le retrait des glaciers dans les Alpes. (632).

N° 12; 20 mars.

Bertrand (*J.*). — Sur la première méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (641).

Resal (*H.*). — Sur la limite inférieure que l'on doit attribuer à l'admission dans une machine à vapeur. (647).

Faye. — Sur les ouragans nommés *fœhn* en Suisse. (650).

Morin (*A.*). — Note sur un appareil propre à déterminer la loi du développement des pressions dans l'âme des bouches à feu par rapport au temps. (654).

Lockyer (*N.*). — Sur de nouvelles raies du calcium. (660).

Violle (*J.*). — Mesures actinométriques au sommet du mont Blanc. (662).

Pepin (le P.). — Impossibilité de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$. (676).

Rouyaux. — Sur la conduite des chronomètres. (679).

Bertot (*H.*). — Solution géométrique du problème de la détermination du lieu le plus probable du navire au moyen d'un nombre quelconque de droites de hauteur plus grand que 2. (682).

Gaugain (*J.-M.*). — Influence de la température sur l'aimantation. (685).

Hildebrandsson (*H.-H.*). — Réponse à deux critiques de M. Faye. (689).

N° 13; 27 mars.

Villarceau (*Y.*). — Influence des variations de pression sur la marche des chronomètres. (697).

Resal (*H.*). — Sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique. (698).

Becquerel (père) et *Becquerel* (*Edm.*). — Observations de température faites au Muséum d'histoire naturelle pendant l'année météorologique 1875 avec les thermomètres électriques placés dans l'air ainsi que sous des sols gazonnés et dénudés. (700).

N° 14; 3 avril.

N° 15; 10 avril.

Sainte-Claire Deville (*Ch.*). — Discussion des courbes barométriques continues du 7 au 14 mars 1876; du meilleur procédé à suivre pour comparer les allures de la température et de la pression. (804).

Faye. — Sur la trombe de Heiltz-le-Maurupt (Marne), en date du 20 février 1876. (810).

Secchi (le P.). — Sur le déplacement des raies dans les spectres des étoiles, produit par leur mouvement dans l'espace (suite). (812).

Decharme (*C.*). — Vitesse du flux thermique dans une barre de fer (IIe Partie). (815).

Planté (*G.*). — Sur les taches solaires et sur la constitution physique du Soleil. (816).

Bouty. — Sur la théorie du contact d'épreuve. (836).

Jannettaz (*Ed.*). — Note sur les anneaux colorés produits par pression dans le gypse, et sur leurs connexions avec les coefficients d'élasticité. (839).

N° 16; 17 avril.

Faye. — Sur l'orientation des arbres renversés par les tornados ou les trombes. (875).

Tisserand (*F.*). — Observations faites à l'Observatoire de Toulouse avec le grand télescope Foucault. (891).

Caspari. — Recherches sur le balancier compensateur de M. Winnerl. (894).

Violle (*J.*). — Conclusions des mesures actinométriques faites au sommet du mont Blanc. (896).

Sarrau. — Nouvelles recherches sur les effets de la poudre dans les armes à feu. (898).

Peters. — Éléments de la nouvelle planète (160) Una. (904).

Bossert (*J.*). — Éléments et éphémérides de la planète (148) Gallia. (908).

Genocchi (*A.*). — Généralisation du théorème de Lamé sur l'impossibilité de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$. (910).

Gibert (*E.*) et *Niewenglowski* (*B.*). — Note sur les foyers d'une courbe plane. (913).

Amagat (*E.-H.*). — Recherches sur l'élasticité de l'air sous de faibles pressions. (914).

N° 17; 24 avril.

Le Verrier. — Découverte de la planète (161) par M. *Watson*, et de la planète (162) par M. *Prosper Henry*. (927).

Faye. — Réponse à une partie des critiques de M. *Hildebrandsson* (lettre du 20 mars dernier). (933).

Daubrée. — Expériences faites pour expliquer les alvéoles de forme arrondie que présente très-fréquemment la surface des météorites. (949).

Resal (*H.*). — Communication relative aux triturateurs et aux concasseurs du système Anduze. (956).

Jung. — Théorème général sur les fonctions symétriques d'un nombre quelconque de variables. (988).

Brault. — Nouvelles recherches météorologiques sur la circulation des couches inférieures de l'atmosphère dans l'Atlantique nord. (995).

N° 18; 1er mai.

Le Verrier. — Découverte de la planète (163) par M. *Perrotin*, à l'Observatoire de Toulouse. (1007).

Becquerel. — Sur les forces électromotrices produites au contact des liquides séparés par des diaphragmes capillaires de nature quelconque. (1007).

Sainte-Claire Deville (*Ch.*). — Sur les oscillations de la température de la mi-janvier, de la mi-février et de la mi-avril 1876. (1011).

Du Moncel (*Th.*). — Sur la polarisation électrique. (1022).

Caligny (*A. de*). — Note sur la théorie de plusieurs machines hydrauliques. (1027).

Salicis. — Expériences sur la chaleur solaire. (1039).

Gripon (*E.*). — Phénomènes d'interférence réalisés avec des lames minces de collodion. (1048).

Bouty. — Sur la distribution du magnétisme dans les barreaux cylindriques. (1050).

Bouchotte. — Sur la transmission des courants électriques par dérivation au travers d'une rivière. (1053).

Serrin (*V.*). — Sur un nouveau système d'électro-aimant à spires méplates. (1054).

Mallard (*Er.*). — Sur le système cristallin de plusieurs substances présentant des anomalies optiques. (1063).

N° 19; 8 mai.

Du Moncel (*Th.*). — Note sur les transmissions électriques sans fils conducteurs, à propos des Communications récentes de MM. *Bouchotte* et *Bourbouze.* (1079).

Weichold. — Nouvelle solution de l'équation générale du quatrième degré. (1093).

Hilleret. — Nouveau système de cartes marines, pour la navigation par arcs de grand cercle. (1095).

Bobynine (*V.*). — Sur l'oscillation de la mi-novembre, observée à Nijni-Novgorod. (1108).

N° 20; 15 mai.

Le Verrier. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. *G.-B. Airy*), et à l'Observatoire de Paris, pendant le premier trimestre de l'année 1876. (1124).

Villarceau (*Y.*). — Note sur les déterminations théorique et expérimentale du rapport des deux chaleurs spécifiques, dans les gaz parfaits dont les molécules seraient monoatomiques. (1127).

Caligny (*A. de*). — Sur un modèle fonctionnant d'un nouveau système d'écluses de navigation, applicable spécialement aux cas

particuliers où les niveaux de l'eau des biefs sont très-variables (1130).

Rayet (*G.*). — Éphéméride de la planète ⑯. (1150).

Aymonnet. — Sur les spectres calorifiques. (1153).

Mallard (*Er.*). — Sur le système cristallin de plusieurs substances présentant des anomalies optiques. Théorie des assemblages cristallins. Explication du dimorphisme. (1164).

N° 21; 22 mai.

Villarceau (*Y.*). — Seconde Note sur la détermination théorique et expérimentale du rapport des deux chaleurs spécifiques, dans les gaz parfaits dont les molécules seraient monoatomiques. (1175).

Angot (*A.*). — Sur les images photographiques obtenues au foyer des lunettes astronomiques. (1180).

André (*Ch.*). — Sur la diffraction instrumentale. (1191).

Onimus. — Modifications dans les piles électriques, rendant leur construction plus facile et plus économique. (1192).

Bianconi (*J.-J.*). — Nouvelles expériences sur la flexibilité de la glace. (1193).

N° 22; 29 mai.

Saint-Venant (*de*). — Sur la constitution atomique des corps. (1223).

Berthelot. — Nouvelles remarques sur l'existence réelle d'une matière formée d'atomes isolés, comparables à des points matériels. (1226).

Ledieu (*A.*). — Examen de l'action mécanique possible de la lumière. Étude du radioscope de M. Crookes. (1241).

Cazin (*A.*). — Intensité de la pesanteur à l'île Saint-Paul. (1248).

Fonvielle (*W. de*). — Sur le radiomètre de M. Crookes. (1250).

Fizeau. — Remarques sur la Communication précédente. (1252).

Marsilly (*C. de*). — Mémoire sur les lois de la nature. (1253).

Laguerre. — Sur la transformation des fonctions elliptiques. (1257).

Joubert (le P.). — Sur le développement en séries des fonctions Al(x). (1259).

« Dans le développement de Al(x) ordonné suivant les puissances de k^2, le coefficient de k^{2m} est une somme de termes de la forme $f(x)\cos 2px + \varphi(x)\sin 2px$, dans lesquels $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des polynômes entiers en x, et p un nombre entier dont le carré ne peut jamais être supérieur à m. »

Lamey (*Ch.*). — Sur la théorie de la périodicité undécennale des taches du Soleil. (1262).

Douliot (*E.*). — Sur la charge que prend le disque de l'électrophore. (1262).

Lecoq de Boisbaudran. — Théorie des spectres; observations sur la dernière Communication de M. Lockyer. (1264).

N° 23; 5 juin.

Le Verrier. — Recherches astronomiques (suite). (1280).

Huggins (*W.*). — Sur le déplacement des raies dans les spectres des étoiles, produit par leur mouvement dans l'espace. (1291).

Ledieu (*A.*). — Examen sur l'action mécanique possible de la lumière. Étude du radioscope de M. Crookes (suite). (1293).

Becquerel (*Ed.*). — Rapport sur plusieurs Mémoires de M. *Allard*, relatifs à la transparence des flammes et de l'atmosphère et à la visibilité des phares à feux scintillants. (1300).

Lucas (*É.*). — Sur les rapports qui existent entre la Théorie des nombres et le Calcul intégral. (1303).

Si a et b sont deux racines d'une équation du second degré à coefficients entiers et premiers entre eux, et si, de plus, on fait

$$a+b=\mathrm{P},\quad ab=\mathrm{Q},\quad a-b=\delta,\quad u_n=\frac{a^n-b^n}{a-b},\quad v_n=a^n+b^n,$$

les fonctions définies par les relations

$$\mathrm{S}(z)=\frac{\delta\sqrt{-1}}{2\mathrm{Q}^{\frac{n}{2}}}u_n,\quad \mathrm{C}(z)=\frac{1}{2\mathrm{Q}^{\frac{n}{2}}}v_n,\quad z=n\log\frac{a}{b}$$

sont entièrement analogues au sinus et au cosinus, et les formules qui les renfer-

ment, déduites de celles de la Trigonométrie, conduisent à des propriétés importantes des diviseurs de u_n et de v_n, lorsque n désigne un nombre entier.

Ainsi l'on a

$$u_{2n} = u_n v_n, \qquad v_n^2 - \delta^2 u_n^2 = 4Q^n,$$
$$2u_{m+n} = u_m v_n + u_n v_m, \qquad u_n^2 - u_{n-1} u_{n+1} = Q^{n-1}.$$

M. Lucas déduit de cette étude plusieurs propositions intéressantes concernant l'Algèbre et la théorie des nombres.

Angot (*A.*). — Sur les images photographiques obtenues au foyer des lunettes astronomiques. (1305).

Rayet (*G.*) — Éléments de la planète [illegible]. (1323).

Pepin (le P.). — Sur les équations linéaires du second ordre. (1323).

Joubert (le P.). — Sur le développement en séries des fonctions Al(x). (1326).

Fouret (*G.*). — Du nombre des points de contact des courbes algébriques ou transcendantes d'un système avec une courbe algébrique. (1328).

Démonstration du célèbre théorème de M. Chasles.

Mallet. — Perfectionnement apporté à l'indicateur de Watt. (1331).

Michel (*R.-Fr.*). — Sur les inconvénients que présente l'emploi d'un câble en fils de cuivre comme conducteur de paratonnerre. (1332).

N° 24; 12 juin.

Janssen (*J.*). — Présentation de photographies solaires de grandes dimensions. (1363).

Du Moncel (*Th.*). — Sur les transmissions électriques à travers le sol (deuxième Note). (1366).

Ledieu (*A.*). — De quelques expériences nouvelles faites sur le radiomètre de Crookes. (1372).

Leverrier. — Éphéméride de la planète [illegible] Héra pour l'opposition de 1877. (1384).

Tacchini (*P.*). — Nouvelles observations relatives à la présence du magnésium sur le bord du Soleil. (1385).

Mouton (*L.*). — Phénomènes d'oscillation électrique. (1387).

N° 25; 19 juin.

Chasles. — Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconques, dans lesquels on considère des couples de segments rectilignes ayant un produit constant. (1399).

Govi (*G.*). — Sur la cause des mouvements dans le radiomètre de M. Crookes. (1410).

Fizeau. — Observations sur la Communication précédente. (1413).

Ledieu (*A.*). — Examen des nouvelles méthodes proposées pour la recherche de la position du navire à la mer. (1414).

Gaugain (*J.-M.*). — Influence de la température sur l'aimantation. (1422).

Lippmann (*G.*). — Extension du principe de Carnot à la théorie des phénomènes électriques. Équations différentielles de l'équilibre et du mouvement d'un système électrique réversible quelconque. (1425).

Égorof (*N.*). — Électro-actinomètre différentiel. (1435).

N° 26; 26 juin.

Chasles. — Lieux géométriques et courbes enveloppes satisfaisant à des conditions de produit constant de deux segments variables. — Généralisation de quelques théorèmes exprimés en rayons vecteurs. (1463).

Villarceau (*Y.*). — Note sur le développement de $\cos mx$ et $\sin mx$ suivant les puissances de $\sin x$. (1469).

Hirn (*G.-A.*). — Sur le maximum de la puissance répulsive possible des rayons solaires. (1472).

Ledieu (*A.*) — Nouvelles considérations expérimentales sur le radiomètre de M. Crookes. (1476).

Boileau (*P.*). — Propriétés communes aux canaux, aux rivières et aux tuyaux de conduite à régime uniforme. (Ire Partie). (1479).

Resal (*H.*). — Rapport sur un Mémoire de M. *Félix Lucas*, intitulé : « Vibrations calorifiques des solides homogènes ». (1484).

Lalanne (*L.*). — Exposé d'une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés. (IIIe Partie). (1487).

Fonvielle (*W. de*). — Sur un radiomètre différentiel. (1490).

Bossert. — Éléments et éphéméride de la planète (152) Atala. (1493).

Fuchs. — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. (1494).

Fouret (*G.*). — Du contact des surfaces d'un implexe avec une surface algébrique. (1497).

Salet (*G.*). — Sur quelques expériences faites avec la balance de Crookes. (1500).

Smith (*J.-Lawrence*). — Sur l'arragonite observée à la surface d'une météorite. (1505). — Sur les combinaisons de carbone trouvées dans les météorites. (1507).

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI (¹).

Tome VIII; 1875.

Lodi (*L.*). — Notice sur la vie et les travaux du professeur *Geminiano Riccardi.* (1-15).

Catalogue des travaux du professeur Geminiano Riccardi. (16-35).

Riccardi (*G.*). — Deux écrits inédits. (36-50).

I. Essai de quelques notules relatives à l'écrit intitulé : « Mémoire sur les travaux et les écrits de M. Legendre, membre de l'Institut, etc. », signé F. M. (²). Genève, 24 février 1833. (36-44.)

II. Court examen critique sur une annonce relative aux travaux entrepris par l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles. (Lu le 30 mai 1849). (45-50).

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 98; t. II, p. 146; t. IV, p. 243; t. VI, p. 252; t. VII, p. 120; t. VIII, p. 259.

(²) Le baron Frédéric Maurice.

Boncompagni (*B.*). — Sur une propriété des nombres impairs. (51-62).

n étant un entier quelconque, n^3 est la somme des *n* nombres impairs consécutifs

$$n(n-1)+1,\quad n(n-1)+3,\quad \ldots,\quad n(n-1)+(2n-1).$$

Sédillot (*L.-Am.*). — Sur les emprunts que nous avons faits à la science arabe, et en particulier de la détermination de la troisième inégalité lunaire ou variation par Aboul-Wéfâ de Bagdad, astronome du xe siècle. Lettre à D.-B. Boncompagni. (63-78; fr.).

Mansion (*P.*). — Notice sur la vie et les travaux de *Rodolphe-Frédéric-Alfred Clebsch*. (121-131; fr.)

Catalogue des travaux de *R.-F.-A. Clebsch*. (132-184; fr.).

Mansion (*P.*). — *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, von Dr.* Hermann Hankel. (185-220; fr.).

Voir *Bulletin*, t. X, p. 209.

Jacoli (*F.*). — Evangelista Torricelli et la méthode des tangentes, dite *méthode de Roberval*. (265-304).

Marchetti (*F.*), S. J. — Sur la vie et les travaux du P. *Paolo Rosa*, S. J. (305-313).

Catalogue des travaux du P. *Paolo Rosa*, S. J. (314-320).

Boncompagni (*B.*). — Sur quelques lettres d'Evangelista Torricelli, du P. Marin Mersenne et de François du Verdus. (353-381).

Torricelli (*E.*). — Lettres au P. M. Mersenne. (382-409; lat.).

Mersenne (le P. *M.*). — Lettres à Evangelista Torricelli. (410-441; lat.).

Du Verdus (*Fr.*). — Lettres à Evangelista Torricelli. (442-456; ital.).

Sédillot (*L.-Am.*). — Grande exécution d'automne. Lettre à M. le Dr Ferdinand Hoefer au sujet des sciences mathématiques des Indiens et des origines du sanskrit. (457-468; fr.).

Béziat (*L.-C.*). — La vie et les travaux de *Jean Hévélius*. (497-558 et 589-669; fr.).

Annonces de publications récentes. (79-120, 221-264, 321-352, 469-596, 559-588, 670-700).

BERICHTE ÜBER DIE VERHANDLUNGEN DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT ZU LEIPZIG. Mathematisch-physische Classe ([1]).

Tome XXIV; 1872.

Hansen (*P.-A.*). — Remarques sur une Communication faite devant la Commission permanente de la mesure du degré européen à Vienne, le 21 septembre dernier. (1-14).

Hansen (*P.-A.*). — Exposition d'une transformation, insignifiante en apparence, des équations finales du « Supplément aux recherches géodésiques », mais par laquelle on obtiendra une bien plus grande exactitude dans les valeurs numériques. Suivie d'une Table de la mesure de la courbure sur le sphéroïde terrestre. (15-25).

Schlömilch (*O.*). — Sur une espèce particulière de fonctions algébriques. (26-29).

Si dans la factorielle $z(z+1)\ldots(z+m-1)$ on pose $z=x+iy$, où $i=\sqrt{-1}$, et que l'on représente la valeur que prend la factorielle par $\varphi_m(x,y)+i\psi_m(x,y)$ les fonctions φ_m et ψ_m jouissent de propriétés qui font l'objet de cette Note.

Bruhns (*C.*). — Quelques Notices sur Kepler. (30-48).

Neumann (*C.*). — Conjecture provisoire sur les causes des courants thermo-électriques. (49-64).

Hansen (*P.-A.*). — Sur l'application de la Photographie à l'observation du passage de Vénus devant le Soleil. (65-115). — Addition à ce Mémoire. (172-181).

Zöllner (*F.*). — Sur l'action à distance magnétique et électrique du Soleil. (116-128).

Zöllner (*F.*). — Sur la lunette spectroscopique réversible. (129-134, 1 pl.).

Vogel (*H.-C.*). — Sur l'absorption des rayons chimiquement actifs dans l'atmosphère du Soleil. (135-141).

Neumann (*C.*). — Sur la loi élémentaire des forces électromotrices produites dans un conducteur donné par des courants électriques,

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. V, p. 195.

soit que ces courants aient lieu dans le même conducteur, soit qu'ils aient lieu dans un autre conducteur quelconque mobile par rapport au premier. (144-164).

Zöllner (*F.*). — Sur l'histoire du pendule horizontal. (183-192).

Wiedemann (*E.*). — Sur la polarisation elliptique de la lumière et ses relations avec les couleurs superficielles des corps. (263-309).

Zöllner (*F.*). — Sur la dépendance entre les étoiles filantes et les comètes. (310-316).

Zöllner (*F.*). — Sur les courants électriques produits par l'eau courante. (317-326, 1 pl.).

Schlömilch (*O.*). — Sur les séries conditionnellement convergentes. (327-330).

Bruhns (*C.*). — Communication sur la détermination des coordonnées de la Pleissenburg et de diverses tours par rapport à l'Observatoire de Leipzig, et sur la construction d'un appareil de base. (352-369).

Bruhns (*C.*). — Sur les éléments de la comète I, 1830, calculés par M. le Dr L.-R. Schulze. (370).

Schulze (*L.-R.*). — Éléments de la première comète de l'année 1830, calculés d'après 319 observations. (Appendice). (1-56).

BULLETINS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. 2e Série. In-8° (1).

Tome XXXIII; 1872.

Catalan (*E.*). — Théorème de Géométrie. (107).

Gilbert (*Ph.*). — Sur l'emploi des imaginaires dans la recherche des différentielles d'ordre quelconque. (108-113).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 281; t. II, p. 289; t. IV, p. 55.

Orloff. — Sur les équations différentielles réciproques. (113-122). — Précédé d'un Rapport de M. *Gilbert*. (105-106).

Quetelet (*E.*). — Sur l'aurore boréale du 4 février 1872. (177-196).

Houzeau (*J.-C.*). — Du calcul rapide des phases lunaires, à l'usage des personnes qui s'occupent d'études historiques. (197-206).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Note préliminaire sur un fait remarquable qu'on observe au contact de certains liquides de tensions superficielles très-différentes. (223-226). — Rapport de M. *J. Plateau*. (172).

Mailly (*É.*). — Rapport de M. E. Quetelet sur un Mémoire de M. *É. Mailly* : « Tableau de l'Astronomie dans l'hémisphère austral et dans l'Inde ». (301-303).

Meerens (*Ch.*). — Le diapason et la notation musicale simplifiée. — Rapports de MM. *Liagre* et *De Tilly*. (303-310).

Quetelet (*Ad.*). — Note complémentaire sur l'aurore boréale du 4 février 1872. (312-316).

Gloesener. — Sur une nouvelle boussole magnétique ou plutôt électro-magnétique, son importance dans les observations magnétiques et surtout dans celles faites sur mer. (321-323).

Gilbert (*Ph.*). — Sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues. — Rapport de M. *Catalan*. (360-368).

Gilbert (*Ph.*). — Rapport sur la nouvelle rédaction du Mémoire de M. Saltel concernant les courbes géométriques. (374).

Quetelet (*Ad.*). — Sur l'aurore boréale du 10 au 11 avril 1872. (375-376).

Plateau (*J.*). — Sur la mesure des sensations physiques, et sur la loi qui lie l'intensité de ces sensations à l'intensité de la cause excitante. (376-388).

Folie (*F.*). — Sur le calcul de la densité moyenne de la Terre, d'après les observations d'Airy. (389-409). — Rapports de MM. *Liagre* et *Gilbert*. (369-372).

Houzeau (*J.-C.*). — Note additionnelle sur la mesure des dis-

tances de Vénus au Soleil, de centre en centre, pendant les passages de cette planète. (493-497).

Quetelet (*E.*). — Sur l'éclipse de Lune du 22 mai 1872. (497-498).

Gilbert (*Ph.*). — Sur une objection proposée par M. Catalan. (498-502). — Réponse de M. *Catalan*. (502).

Tome XXXIV; 1872.

Catalan (*E.*). — Note sur une formule de M. Botesù. (26-34, 424-429).

Cette formule peut s'écrire ainsi

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\log 2-\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1.2.3\ldots p}{2^{p+1}(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+p+1)}.$$

Valerius (*H.*). — Description d'un procédé pour mesurer l'avantage de la vision binoculaire sur la vision au moyen d'un seul œil, quant à l'éclat ou à la clarté des objets. (34-43).

De Tilly (*J.-M.*). — Sur quelques formules de Balistique appliquée. (43-50).

Saltel (*L.*). — Sur quelques questions de Géométrie. (51-52).

Mansion (*P.*). — Note sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. (149-169).— Rapport de M. *Gilbert*. (142-145).

Delbœuf. — Étude psychophysique. Recherches théoriques et expérimentales sur la mesure des sensations, et spécialement des sensations de lumière et de fatigue. — Rapports de MM. *J. Plateau* et *Th. Schwann*. (250-263).

Quetelet (*Ad.*). — Étoiles filantes du mois d'août 1872. — Aurores boréales des mois d'août et de septembre de la même année. — Température des puits artésiens. (270-273).

Terby (*F.*). — Aspect de la planète Jupiter pendant l'opposition de 1872. (322, 1 pl.). — Précédé d'un Rapport par M. *E. Quetelet*. (269).

un point voisin de la bouche à feu. — Rapport de M. *De Tilly*. (140-142).

Quetelet (*E.*). — Détermination de la déclinaison et de l'inclinaison magnétiques à Bruxelles en 1873. (142-144).

Quetelet (*Ad.*). — Bolide observé à Bruxelles le 21 juillet 1873. (145).

De Tilly (*J.-M.*). — Note sur la similitude mécanique dans le mouvement des corps solides en général, et en particulier dans le mouvement des projectiles lancés par les armes à feu rayées. (160-170).

Terby (*F.*). — Configuration des taches de la planète Mars à la fin du XVIIIe siècle, d'après les dessins inédits de J.-H. Schröter. (173-181, 1 pl.). — Rapport de M. *Liagre*. (116-117).

Genocchi (*A.*). — Lettre à M. Ad. Quetelet, Secrétaire perpétuel de l'Académie, sur diverses questions mathématiques. (181-196). — Rapport de M. *De Tilly*. (124-139).

I. Sur la série sommatoire des logarithmes. — II. Remarques sur la Géométrie abstraite (non euclidienne). — Notes.

Quetelet (*Ad.*). — Sur les étoiles filantes du mois d'août 1873. (305-306).

Quetelet (*E.*). — Sur le congrès international de Météorologie tenu à Vienne du 1er au 16 septembre 1873. (306-314).

Houzeau (*J.-C.*). — Note sur la tendance qu'affectent les grands axes des orbites cométaires à se diriger dans un sens donné. (315-331).

Van Rysselberghe (*F.*). — Note sur un système météorographique universel. (346-374, 3 pl.). — Rapports de MM. *Gloesener* et *Liagre*. (117-123).

Quetelet (*Ad.*). — Sur l'éclipse de Lune du 4 novembre 1873. (468-469).

Montigny (*Ch.*). — La direction absolue du vent est le plus souvent oblique à l'horizon. (475-489).

Gloesener. — Sur le météorographe enregistreur de M. Van Rysselberghe. (489-491).

rt (*Ph.*). — Observations sur deux Notes de M. Genocchi, atives au développement de la fonction $\log\Gamma(x)$. (541-545).

cchi (*A.*). — Sur quelques développements de la fonction $\Gamma(x)$. Seconde Lettre à M. Ad. Quetelet, Secrétaire perpé- l de l'Académie (546-569). — Rapport de M. *De Tilly*. 54-468).

ey (*Al.*). — Note sur les tremblements de terre pour 1870, c supplément pour 1869. — Rapports de MM. *Duprez, E. etelet* et *Mailly*. (603-605).

een (*P.*). — Des transformations que subissent les nébu- ses. (606-608).

elet (*Ad.*). — Étoiles filantes du mois de novembre 1873. 08-610).

(*F.*). — Note sur quelques théorèmes de Géométrie supé- ure. (620-624).

ion (*P.*). — Note sur les transformations arguesiennes de Saltel. (625-633). — Rapport de M. *Catalan*. (605-606).

La seconde transformation arguesienne de M. Saltel est équivalente à la trans- ation quadratique birationnelle la plus générale. — II. La première transfor- on arguesienne triangulaire de M. Saltel est aussi équivalente à la transforma- quadratique birationnelle la plus générale.

illy (*J.-M.*) et *Folie* (*F.*). — Rapports sur le concours de 73. 1re Question. (644-657).

Résumer et simplifier la théorie de l'intégration des équations aux dérivées elles des deux premiers ordres. » — Prix décerné à M. P. Mansion.

(*F.*). — Du commencement et de la fin du monde d'après Théorie mécanique de la chaleur. (797-827).

Tome XXXVII; 1874.

De Wilde (*P.*). — Note préliminaire sur l'action de l'effluve électrique sur quelques gaz et mélanges gazeux. (77-80). — Rapport de M. *Stas*. (14-15).

Quetelet (*E.*) et *Terby* (*F.*). — Notes sur l'aurore boréale du 4 février 1874. (160-164).

Terby (*P.*). — Aurore boréale observée à Louvain dans la nuit du 15 au 16 janvier 1874. (164-165.)

Montigny (*Ch.*). — La fréquence des variations de couleurs des étoiles dans la scintillation est généralement en rapport avec la constitution de leur lumière, d'après l'analyse spectrale (165-190).

Folie (*F.*). — Revendication de priorité en faveur de M. Louis Pérard. (198-201).

Au sujet de la force coercitive dans l'aimantation.

Funérailles de *Lambert-Adolphe-Jacques Quetelet*, né à Gand le 22 février 1796, mort à Bruxelles, le 17 février 1874. — Discours de MM. *N. De Keyser*, *Éd. Mailly*, *Putzeys*, baron *Kervyn de Lettenhove*, *Tallois* et *Liagre*. (245-266).

Genocchi (*A.*). — Réclamation de priorité. (351-352).

Quetelet (*E.*). — Les observations météorologiques simultanées sur l'hémisphère terrestre boréal. (352-356).

Catalan (*E.*). — Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces. — Rapports de MM. *Liagre* et *De Tilly*. (803-809).

Folie (*F.*). — Extension des théorèmes analogues à celui de Pascal à des courbes tracées sur une surface quelconque. (811-815).

De Tilly (*J.-M.*). — Note sur la similitude mécanique et, en général, sur le mouvement d'un corps solide de révolution. (815-829). — Rapport de M. *Liagre*. (810-811).

Tome XXXVIII; 1874.

Rodenbach. — L'étalon prototype universel des mesures de longueur. (5-7).

Terby (*F.*). — Aréographie ou étude comparative des observations faites sur l'aspect physique de la planète Mars. — Rapports de MM. *E. Quetelet* et *Éd. Mailly*. (7-13).

Saltel (*L.*). — Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique. — Rapport de M. *Folie*. (13-17).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — L'électricité statique exerce-t-elle une influence sur la tension superficielle des liquides? — Rapport de M. *J. Plateau*. (17-19).

Folie (*F.*). — Quelques nouveaux théorèmes sur les cubiques gauches. (65-67).

De Tilly (*J.-M.*). — Sur la généralisation du théorème de Binet. (67-70).

Simons. — Quelques réflexions sur le problème de Malfatti. (88-108).

Perrey (*Al.*). — Note sur les tremblements de terre en 1871, avec supplément pour les années antérieures, de 1843 à 1870. — Rapports de MM. *Duprez, E. Quetelet* et *Mailly*. (297-299).

Montigny (*Ch.*). — Nouvelles recherches sur la fréquence de la scintillation des étoiles dans ses rapports avec la constitution de leur lumière, d'après l'analyse spectrale. (300-320, 1 pl.).

Melsens. — Note sur les paratonnerres. (320-348 et 423-441, 1 pl.)

Quetelet (*E.*). — La comète de Coggia, observée à Bruxelles. (349-351).

Terby (*F.*). — La comète de Coggia, observée à Louvain. (351-352).

Bernaerts (*G.*). — La comète de Coggia, observée à Malines. (352-353).

Hooreman (*Ch.*). — Note sur les orages du 10 juillet 1874. (354-356).

Quetelet (*E.*). — Les Perséides en 1874, observations faites à l'Observatoire Royal de Bruxelles. (410-418, 1 pl.).

Terby (*F.*). — Observations des étoiles filantes de la période d'août 1874, faites à Louvain. (418-419).

Terby (*F.*). — Sur un phénomène auroral remarqué à Louvain le soir du 3 octobre 1874, et sur sa coïncidence avec des éclairs observés dans le Nord. (419-421).

Quetelet (*E.*). — Note sur les perturbations magnétiques qui ont accompagné l'aurore boréale du 3 octobre 1874. (421).

Hooreman (*Ch.*). — Perturbation magnétique du 9 octobre 1874. (422).

Folie (*F.*). — Quelques nouveaux théorèmes sur les courbes gauches du quatrième ordre. (465-469).

Plateau (*J.*). — Sur une récréation arithmétique. (469-476).

Couples de nombres dont le produit a tous ses chiffres égaux.

Catalan (*E.*). — Note sur le problème de Malfatti. (480-487, 1 pl.).

Folie (*F.*). — Cours de Calcul des probabilités fait à l'Université de Liége par A. Meyer. — Traduction du travail de R. Clausius : *Sur un nouveau principe de Mécanique relatif aux mouvements stationnaires*. (556-557).

Quetelet (*E.*). — Observation de l'éclipse de Soleil du 10 octobre 1874, faite à l'Observatoire Royal de Bruxelles. (566-567).

Quetelet (*E.*). — Observation de l'occultation de Vénus par la Lune, le 14 octobre 1874, faite à l'Observatoire royal de Bruxelles (567-568).

Mansion (*P.*). — Démonstration de la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires. (578-591). — Rapports de MM. *Catalan* et *Folie*. (562-566).

Terby (*F.*). — Remarques sur l'aspect de la planète Jupiter pendant son opposition en 1874, et sur le passage des satellites II et III et de leurs ombres pendant la soirée du 25 mars. (591-595, 1 pl.). — Rapport de M. *Quetelet*. (559-560).

Valerius (*H.*). — Sur la température de combustion des combustibles ordinaires brûlés à l'air libre. (654-653).

Catalan (*E.*) et *De Tilly* (*J.-M.*). — Rapports sur le concours de 1874. Première question. (714-718).

« Perfectionner, en quelque point important, soit dans ses principes, soit dans ses applications, la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. »

Mailly (*Éd.*). — Notice sur *Adolphe Quetelet*. (816-844).

Tome XXXIX; 1875.

Brialmont (*A.*). — Discours prononcé aux funérailles de *Jean-Baptiste-Julien d'Omalius d'Halloy*. (56-63).

Boussinesq (*J.*). — Essai théorique sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents et sur la poussée des terres sans cohésion. — Rapports de MM. *De Tilly* et *Folie*. (63-73).

Reinemund. — Note sur l'équation de l'épicycloïde. — Rapport de M. *Catalan*. (73-75).

Quetelet (*E.*). — Quelques nombres caractéristiques relatifs à la température de Bruxelles. (92-97).

Plateau (*J.*). — Sur les couleurs accidentelles ou subjectives. (100-120).

Estourgies (*L.*). — Calcul de l'éclipse de Soleil du 10 octobre 1874. (120).

Liagre (*J.*). — Paroles prononcées à Douai sur la tombe de *Anatole-Henri-Ernest Lamarle*, le 16 mars 1875. (360-363).

Quetelet (*E.*). — Note sur la température de l'hiver de 1874-1875. (368-369).

Hooreman (*Ch.*). — Note sur le halo avec parasélènes du 23 mars 1875. (369-370).

Valerius (*H.*). — Sur la théorie de l'emploi de l'air chaud dans les hauts-fourneaux. (370-375).

Houzeau (*J.-C.*). — Fragments sur le calcul numérique. (487-548).

Spring (*W.*). — Sur la dilatation, la chaleur spécifique des alliages fusibles et leurs rapports avec la loi de la capacité des atomes des corps simples pour la chaleur. (548-602, 1 pl.). — Rapports de MM. *Gloesener*, *Montigny* et *Folie*. (446-469).

Delbœuf (*J.*). — Théorie générale de la sensibilité. Rapports de MM. *Éd. van Beneden*, *Schwann* et *Folie*. (786-805).

Montigny (*Ch.*). — Notice sur la différence des pressions que l'air exerce sur le baromètre selon qu'il est en repos ou en mou-

vement, et sur l'estimation des hauteurs dans les ascensions aérostatiques, d'après les mesures barométriques. (814-825).

Melsens. — Quatrième Note sur les paratonnerres. (831-853, 1 pl.).

Tome XL; 1875.

Liais (*E.*). — Sur la parallaxe du Soleil. (5-6).

Dewalque (*G.*). — Relation de coups de foudre. (13-20).

Quetelet (*E.*). — Sur la direction de l'aiguille aimantée à Bruxelles en 1875. (20-21).

Gloesener (*M.*). — Observations relativement au météorographe de M. Van Rysselberghe. (21-22).

Saltel (*L.*). — Sur la détermination des singularités de la courbe d'intersection de deux surfaces qui ont en commun μ points multiples, μ étant égal ou inférieur à 4. (22-26).

Saltel (*L.*). — Détermination, dans la surface réciproque d'une surface S douée de points multiples, du degré de la courbe double et de celui de la courbe de rebroussement. (27-33).

Journeaux-Duhamel. — Note sur un nouvel instrument astronomique. — Rapports de MM. *E. Quetelet, Liagre* et *Folie.* (60-62).

Houzeau (*J.-C.*). — Fragments sur le Calcul numérique, II et III. (74-139 et 455-524). — Rapports de MM. *Folie* et *Catalan.* (62-70 et 452).

Liagre. — Observations relativement au météorographe de M. Van Rysselberghe. (317-319).

Quetelet (*E.*). — Les Perséides en 1875. Observations faites à l'Observatoire Royal de Bruxelles. (319-322).

Quetelet (*E.*). — L'éclipse de Soleil du 29 septembre 1875. (322).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur les propriétés de la surface de contact d'un solide et d'un liquide. Rectification d'un passage de ma Note précédente. (341-347). — Rapport de M. *J. Plateau.* (272).

Perrey (*Al.*). — Note sur les tremblements de terre de 1872, avec

suppléments pour les années antérieures de 1843 à 1872. — Rapports de MM. *C. Malaise, Montigny* et *Duprez*. (448-452).

Terby (*F.*). — Études sur la planète Mars (8e Notice). (549-571, 1 pl.). — Sur l'aspect de l'ombre du deuxième satellite de Jupiter le 25 mars 1874. (572-576). — Rapport de M. *E. Quetelet*. (453-454).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur le problème des liquides superposés dans un tube capillaire. — Rapport de M. *J. Plateau*. (669-671).

Quetelet (*E.*). — Sur la période de froid du mois de décembre 1875. (758-760).

Reinemund (*F.*). — Théorèmes sur les polygones réguliers et sommation de quelques séries trigonométriques. (801-811). — Rapport de M. *De Tilly*. (671-673).

MÉMOIRES COURONNÉS ET AUTRES MÉMOIRES PUBLIÉS PAR L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. — Collection in-8°.

Tome XXII; 1872.

Mansion (*P.*). — Note sur la première méthode de Brisson pour l'intégration des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites. (32 p.).

De Tilly (*J.-M.*). — Études sur le frottement. 1re *Partie :* Note relative au frottement de glissement sur les surfaces hélicoïdales réglées. (32 p.).

Perrey (*Al.*). — Note sur les tremblements de terre en 1868, avec suppléments pour les années antérieures de 1843 à 1876. (XXVIe relevé annuel). (116 p.).

Perrey (*Al.*). — Notes sur les tremblements de terre en 1869, avec suppléments pour les années antérieures de 1843 à 1868. (116 p.).

Saltel (*L.*). — Sur l'application de la transformation arguesienne à la génération des courbes et surfaces géométriques. (53 p.).

SECONDE PARTIE.

Tome XXIII; 1873.

— Notes chimiques et chimico-physiques. (102 p.).

(*Éd.*). — Tableau de l'Astronomie dans l'hémisphère
al et dans l'Inde. (232 p.).

étoiles et les constellations du ciel austral avant Halley. Le voyage
de Halley à l'île Saint-Hélène. — *Chap. II.* Le voyage et les travaux
e au Cap de Bonne-Espérance. — *Chap. III.* Fondation de l'Observatoire
tta. Les travaux de Brisbane, de Rümker et de Dunlop. — *Chap. IV.*
de l'Observatoire du Cap de Bonne-Espérance. Les travaux de Fallows.
. Les travaux de Johnson à l'île de Sainte-Hélène. — *Chap. VI.* Les tra-
enderson au Cap de Bonne-Espérance. — *Chap. VII.* Les travaux de Mac-
ap de Bonne-Espérance. — *Chap. VIII.* Les travaux de sir John Herschel
Bonne-Espérance. Le successeur de Maclear. — *Chap. IX.* L'Observatoire
s travaux de Goldingham, de Taylor et du capitaine Jacob. —
ervatoire de Lucknow. — *Chap. XI.* Les travaux de Pogson à l'Ob-
ue Madras. — *Chap. XII.* L'Observatoire privé de Eyre Burton Powell, à
Observatoire de Trevandrum. — *Chap. XIII.* L'expédition de Gilliss au Chili.
n de l'Observatoire de Santiago. — *Chap. XIV.* Les travaux du Dr Moesta,
de l'Observatoire de Santiago. L'ancien et le nouvel Observatoire. La
tion du Chili. — *Chap. XV.* Le projet d'établir une grande lunette dans
— *Chap. XVI.* Les colonies de l'Australie. Les Observatoires fondés
bane. — *Chap. XVII.* L'Observatoire de Sydney. L'Observatoire privé de
utt, à Windsor. — *Chap. XVIII.* L'Observatoire de la colonie de Vic-
es travaux d'Ellery, à Williamstown, et ensuite à Melbourne. Le grand té-
lescope de Melbourne. — *Chap. XIX.* L'Observatoire d'Adélaïde. L'Observatoire de Hobart Town. — *Chap. XX.* La description complète du ciel austral, faisant suite au travail analogue exécuté par Argelander pour le ciel boréal. — *Chap. XXI.* Les Observatoires de Batavia et de Rio-Janeiro. — *Chap. XXII.* L'Observatoire de Cordoba.

Gilbert (*Ph.*). — Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues. (VI-31 p.).

Saltel (*L.*). — Mémoire sur le principe arguesien unicursal et sur certains systèmes de courbes géométriques. (112 p.).

Note préliminaire sur la transformation arguesienne. — *Chap. I.* Considérations sur les coniques définies par cinq points. — *Chap. II.* Considérations sur la courbe du troisième ordre affectée d'un point double et déterminée par ce point double et six autres points. — *Chap. III.* Considérations sur la courbe du $m^{ième}$ ordre affectée d'un point multiple d'ordre $m-1$ et déterminée par ce point multiple et $2m$ autres points. — *Chap. IV.* Considérations sur les coniques définies par cinq tangentes. — *Chap. V.* Considérations sur les courbes de troisième classe affectées d'une tangente double et définies par cette tangente double et six autres tangentes. — Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. — Note sur la courbe du quatrième ordre affectée de trois points doubles.

Delbœuf (*J.*). — Étude psychophysique. Recherches théoriques et expérimentales sur la mesure des sensations, et spécialement des sensations de lumière et de fatigue. (116 p.).

Perrey (*Al.*). — Suppléments aux Notes sur les tremblements de terre ressentis de 1843 à 1868. (70 p.).

Tome XXIV; 1875.

Melsens. — Note historique sur *J.-B. van Helmont,* à propos de la définition et de la théorie de la flamme. Opinions des anciens chimistes et physiciens sur la chaleur, le feu, la lumière et la flamme dans leurs rapports avec les idées et les travaux de Van Helmont. (56 p.).

Catalan (*E.*). — Remarques sur la théorie des courbes et des surfaces. (48 p., 2 pl.).

I. Surfaces gauches conjuguées. — II. Développable accompagnatrice. — III. Osculatrice. — IV. Surfaces à pentes constantes. — V. Lignes de courbure planes. — VI. Surface d'enroulement. — VII. Trajectoires orthogonales des sections planes d'une surface. — VIII. Surface à lignes de striction rectilignes. — IX. Surfaces conchoïdales. — X. Cyclide à directrices rectilignes. — XI. Quelques théorèmes sur les courbes gauches. — XII. Enveloppe d'un cylindre de révolution. — XIII. Du lieu des centres de courbure d'un ellipsoïde. — XIV. Sur la polodie. — XV. Des surfaces parallèles à l'hyperboloïde.

Perrey (*Al.*). — Note sur les tremblements de terre en 1870, avec supplément pour 1869 (XXVIII[e] relevé annuel). (146 p.).

Perrey (*Al.*). — Note sur les tremblements de terre en 1871, avec suppléments pour les années antérieures de 1843 à 1870. (XXIX[e] relevé annuel). (143 p.).

Saltel (*L.*). — Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique. (33 p.).

Première Section. — I. Exposition générale. — II. Applications géométriques du principe de correspondance entre *k* séries de points. — III. Applications analytiques. — IV. Conclusions.

Tome XXV. 1875.

Mansion (*P.*). — Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (XVI-289 p.).

Avertissement. — Plan du Mémoire et Notice historique. — Introduction. — Génération des équations aux dérivées partielles du premier ordre. — LIVRE I[er]. *Mé-*

thode de Lagrange et de Pfaff. — 1. Équations linéaires aux dérivées partielles. — 2. Méthode de Lagrange pour l'intégration des équations aux dérivées partielles à trois variables et de quelques équations contenant un plus grand nombre de variables. — 3. Extension de la méthode de Lagrange aux équations aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de variables. — 4. Méthode de Pfaff. Livre II. *Méthode de Jacobi.* — 1. Principes. — 2. Intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. — 3. Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. — 4. Méthode de Clebsch et de Weiler pour l'intégration des équations linéaires auxquelles conduit la méthode de Jacobi. — 5. Méthode de Korkine et de Boole. — Méthode de Mayer pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles auxquelles conduit la méthode de Jacobi. — Livre III. *Méthode de Cauchy et de Lie.* — 1. Exposition générale. Travaux de calcul. — 2. Recherches de Serret. — 3. Méthode de Lie considérée comme une extension de celle de Cauchy. — Appendice. La méthode de Lie comme synthèse des méthodes antérieures.

Houzeau (*J.-C.*). — Résumé de quelques observations astronomiques et météorologiques faites dans la zone surtempérée et entre les tropiques. (89 p.).

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE. 2ᵉ Série. In-8° (¹).

Tome IV; 1874.

Meyer (*A.*). — Calcul des probabilités. Publié sur les manuscrits de l'auteur, par *F. Folie.* (1-4, I-X, 1-446).

Préface. — Introduction.

Chap. I. Règles fondamentales du Calcul des probabilités et applications à divers problèmes.

Chap. II. Probabilité des épreuves répétées.

Chap. III. Espérance mathématique.

Chap. IV. Espérance morale.

Chap. V. Probabilité des événements futurs. — Problèmes sur les naissances.

Chap. VI. Théorème inverse de Bernoulli, ou théorème de Bayes. — Théorème de Laplace sur la probabilité des résultats moyens des observations.

Chap. VII. Théorie des erreurs des observations.

Chap. VIII. Probabilités relatives à la vie humaine.

Chap. IX. Assurances sur la vie.

Chap. X. Probabilité des témoignages et des jugements.

Additions. I. Théorie des erreurs, d'après Laplace. — II. Théorie des erreurs, d'après Bienaymé. — III. Extension du théorème de Bernoulli au binôme des factorielles.

Notes. Tables modernes de mortalité.

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 36.

Tome V; 1873.

Graindorge (J.). — Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. (I-XII, 1-192).

Introduction historique. (I-XII).
Ire Partie. — Des équations primordiales. (1-89).
IIe Partie. — Des équations binordinales. (91-189).

Coquilhat (M.). — Trajectoires des fusées volantes dans le vide. (1-33).

De la fusée et de sa force motrice. — Première classe de fusées (le centre de gravité coïncide avec le centre de figure). — Deuxième classe de fusées. — Notes.

Imschenetsky (V.-G.). — Note sur le rapport anharmonique du plan de courbure C, en un point quelconque P d'une ligne L d'intersection des deux surfaces quelconques S_1 et S_2, des plans tangents A et B à ces surfaces, en ce même point P, et du plan D, mené par l'intersection des points A, B, C. (1-5).

KONGLIGA SVENSKA VETENSKAPS-AKADEMIENS HANDLINGAR. Ny följd. In-4° (¹).

Tome IX. 2e Partie; 1870.

Möller (A.). — Étude du mouvement de la planète Pandore. (122 p.).

L'auteur calcule les perturbations de cette planète par la méthode de Hansen.

Bäcklund (A.-V.). — Sur les surfaces géométriques. (65 p.)

Chap. I. Conséquences de deux théorèmes sur la génération des surfaces géométriques. — *Chap. II.* Propriétés générales des surfaces qui sont engendrées par trois faisceaux homographiques de surfaces. — *Chap. III.* Sur les polaires simples et composées des points, des lignes et des plans. Sur la surface de Hesse. — *Chap. IV.* Propriétés des surfaces d'un faisceau, d'un réseau ou d'un système. — *Chap. V.* Déterminations des singularités de la dernière polaire d'une surface par rapport à une autre surface donnée. Surface de Steiner.

Lundquist (G.). — Contribution à la connaissance de l'intensité du magnétisme terrestre et de l'inclinaison dans la Suède centrale et méridionale. (56 p.).

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 242; t. VI, p. 36.

Edlund (*E.*). — Recherches sur la force électromotrice dans le contact des métaux et sur la modification de cette force par la chaleur. (44 p., 1 pl.; fr.).

Holmgren (*K.-A.*). — Sur l'électricité considérée comme force cosmique. IIe Partie. (12 p.).

Voir *Handlingar*, t. VIII; *Bulletin*, t. VI, p. 37.

Tome X; 1871.

Wrede (*Fab.*). — Essai d'une détermination théorique de l'action de la poudre dans les canons. (42 p., 8 pl.).

1. Relation entre la densité du gaz de la poudre et la pression. — 2. Inflammation de la poudre. — 3. Expression générale de la densité du gaz de la poudre. — 4. Expression générale de l'accélération. — 5. Intégration approchée de l'expression de l'accélération. — 6. Corollaires généraux qu'on peut tirer des formules pour t, Δu_n et Δx_n. — 7. Détermination des vitesses avec lesquelles la poudre brûle et s'allume. — 8. Calcul des expériences prussiennes. — 9. Cause probable du désaccord remarqué au n° 7 entre le calcul et l'expérience. — 10. Application pratique des formules générales établies. — 11. Comment la pression et la vitesse dépendent de la grosseur des grains de poudre. — 12. Comment la pression et la vitesse dépendent du poids du projectile. — 13. Comment la pression et la vitesse dépendent de la grandeur de la charge. — 14. L'action explosive produite sur les canons. — 15. Influence de la forme des grains de poudre.

Björling (*C.-F.-E.*). — Théorie des racines des équations algébriques. (53 p., 3 pl.).

Différentielles des fonctions synectiques. — Courbes primaires complexes. — Positions des points-racines. — Application à des équations numériques. — Application aux courbes primaires complexes des équations numériques. — *Note*. Calcul approché des racines complexes des équations numériques lorsque leur nombre ne dépasse pas quatre.

Berg (*Fr.-Th.*). — Proportion entre les sexes des naissances et des vivants, relativement à la Suède et aux diversités que présentent ses provinces. (40 p., 3 pl.).

Theorell (*A.-G.*). — Description d'un météorographe enregistreur-imprimeur, construit aux frais du Gouvernement suédois. (10 p., 2 pl.; fr.).

Thalén (*R.*). — Déterminations magnétiques en Suède en 1869-1871. (80 p., 2 pl.).

Forsmänn (*L.-A.*). — Observations sur l'intensité et l'inclinaison

magnétiques horizontales dans la Botnie occidentale et la Laponie. (26 p.).

Tome XI; 1872.

Gyldén (H.).— Sur la sommation des fonctions périodiques. (15 p.).

Schultz (H.). — Détermination micrométrique de 104 étoiles dans le groupe télescopique 20 Vulpeculæ. (78 p., 1 carte).

Holmgren (K.-A.). — Sur l'électricité comme force cosmique. IIIe Partie. (43 p., 1 pl.).

(A). Remarque sur l'électromètre de Thomson. — (B). Sur l'électricité libre *in-door* (Thomson). — (C). Sur le développement d'électricité dans le partage d'un liquide en gouttes.

Gyldén (H.). — Intégration de certaines formules différentielles qui se présentent dans la théorie des perturbations. (96 p.).

Tome XII; 1873.

Edlund (E.). — Contribution à la connaissance du climat de la Suède. (17 p., 2 cartes).

Thalén (T.-R.). — Sur les spectres de l'yttrium, de l'erbium, du didyme et du lanthane. (24 p., 1 pl.).

Wijkander (A.). — Observations météorologiques de l'expédition arctique suédoise, 1872-1873. (120 p., 1 pl.; fr.).

Edlund (E.). — Théorie des phénomènes électriques. (73 p.; fr.).

ÖFVERSIGT AF KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR [1]. In-8°.

Tome XXVIII; 1871.

Bäcklund (A.-V.). — Contribution à la théorie des sections coniques. (323-338).

Edlund (E.). — Essai d'une explication des phénomènes électriques au moyen de l'éther lumineux. (533-556).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 245; t. VI, p. 34.

Dahlander (*G.-R.*). — Essai de détermination du coefficient de dilatation des fils métalliques à divers degrés de tension. (703-713).

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur quelques propriétés de la courbe plane du troisième ordre. (715-729).

§ I. Sur les sections coniques doublement tangentes à une courbe du troisième ordre. — § II. Sur une correspondance entre les points d'une courbe du troisième ordre et les sections coniques d'un faisceau.

Gyldén (*H.*). — Indices d'une loi régulière dans les mouvements des étoiles. (947-960).

Tome XXIX; 1872 [1].

Edlund (*E.*). — Essai d'une explication des phénomènes électriques au moyen de l'éther lumineux. (Suite.) (N° 1, 25-43).

Gyldén (*H.*). — Formules et Tables pour le calcul de la portée de la lumière des phares. (N° 1, 71-82).

Gyldén (*H.*). — Sur la hauteur de l'atmosphère à diverses époques de l'année. (N° 2, 83-89).

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur quelques propriétés de la courbe plane du troisième ordre. (Suite.) (N° 2, 109-121).

§ III. Sur une correspondance entre les points d'une courbe du troisième ordre et les courbes de la troisième classe.

Edlund (*E.*). — Comparaison entre le courant galvanique et le courant de la décharge électrique, et entre les forces électromotrices d'espèces différentes. (N° 6, 3-21).

Edlund (*E.*). — Recherches sur la nature de la résistance de conductibilité galvanique, et déduction théorique de la loi du développement de chaleur par le courant galvanique et de la loi de Ohm. (N° 7, 3-14).

Edlund (*E.*). — Sur les actions chimiques du courant galvanique et sur la distribution de l'électricité libre à la surface d'un conducteur. (N° 7, 15-25).

Gyldén (*H.*). — Relations entre l'éclat, le nombre des étoiles et

[1] A partir de ce volume, les divers fascicules sont paginés séparément.

leur distance moyenne relative à notre position dans l'espace. (N° 7, 27-36).

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur le lieu des centres de courbure des surfaces. (N° 8, 3-34).

Gyldén (*H.*). — Courte Communication sur l'intégration de certaines formules différentielles qui se rencontrent dans la théorie des perturbations. (N° 8, 35-39).

Möller (*Ax.*). — Éléments de la comète de Faye et éphéméride pour son retour en 1873. (N° 9, 15-35).

Tome XXX; 1873.

Möller (*Ax.*). — Sur la grande perturbation de la comète de Faye en 1841. (N° 1, 3-7).

Nyström (*C.-A.*). — Description d'un double commutateur pour la mesure directe de la résistance dans les fluides et les conducteurs humides. (N° 1, 27-32).

Gyldén (*H.*). — Sur le catalogue d'étoiles des *Astronomiæ Fundamenta* de La Caille. (N° 2, 3-17).

Edlund (*E.*). — Sur le développement de chaleur dans les décharges électriques. (N° 6, 3-9).

Rubenson (*R.*). — Sur la production d'un centre de dépression barométrique à l'intérieur de la Suède, le 11 mai 1873. (N° 6, 31-41).

Broch (*O.-J.*). — Résultats des comparaisons de poids entre les différents kilogrammes norvégiens et suédois, faites au laboratoire de Physique de l'Académie des Sciences de Suède, le 1er juin 1873, par les professeurs *E. Edlund* et *O.-J. Broch*. (N° 7, 17-27.)

Norblad (*J.-A.*) — Description de quelques appareils pour l'établissement de courants de gaz lents et constants, avec un siphon à vitesse d'écoulement constante. (N° 7, 49-55).

Wrede (*Fab.*). — Quelques remarques concernant la méthode des moindres carrés. (N° 8, 3-34).

Mittag-Leffler (*G.*). — Essai d'une nouvelle démonstration d'une proposition de la théorie des intégrales définies. (N° 8, 35-41).

Edlund (*E.*). — Déduction théorique de quelques phénomènes électriques. (N° 8, 71-89).

Dunèr (*N.-C.*). — Sur l'étoile double 210 d'Hercule. (N° 10, 13-19).

Wrede (*F.*). — Rectifications et additions au Mémoire intitulé : *Quelques remarques concernant la méthode des moindres carrés*. (N° 10, 21-26).

Tome XXXI; 1874.

Gyldén (*H.*). — Sur une méthode pour le calcul analytique des perturbations relatives des petites planètes. (N° 1, 13-24).

Thalén (*R.*). — Description d'une nouvelle méthode pour étudier les mines de fer au moyen de mesures magnétiques et compte rendu de quelques expériences faites à ce sujet. (N° 2, 5-19).

Edlund (*E.*). — Sur la durée de la décharge électrique. (N° 3, 5-9).

Thalén (*R.*). — Sur les surfaces isodynamiques autour d'un barreau aimanté vertical, avec leur application à une étude des mines de fer fondée sur des mesures magnétiques. (N° 5, 7-19).

Daug (*H.-Th.*). — Description de la forme des surfaces isodynamiques autour d'un barreau aimanté vertical. (N° 5, 21-24, 2 pl.).

Wrede (*F.*). — Sur l'étude des mines de fer au moyen d'observations magnétiques. (N° 5, 33-39).

Dahlander (*G.-R.*). — Théorèmes généraux concernant la signification géométrique des équations de la Théorie mécanique de la chaleur. (N° 6, 3-11).

Wijkander (*A.*). — Observations sur l'électricité atmosphérique pendant l'expédition polaire suédoise en 1872-73. (N° 6, 31-40).

Wijkander (*A.*). — Sur le spectre de l'aurore boréale. (N° 6, 41-45).

Qvanten (*Em. von*). — Remarques sur la théorie des voyelles de Helmholtz. (N° 6, 47-91).

Dahlander (*G.-R.*). — Quelques propriétés des courbes adiabatiques et isothermiques et relations entre diverses espèces de cha-

leur spécifique dans la Théorie mécanique de la chaleur. (N° 7, 3-15).

Mittag-Leffler (*G.*). — Deux corollaires du théorème de Cauchy sur les racines. (N° 7, 23-31).

Thalén (*R.*). — Sur les mesures magnétiques dans les mines de fer. (N° 8, 3-23).

Backlund (*J.-O.*). — Calcul des perturbations relatives de la planète (112) Iphigénie. (N° 8, 25-44).

Gyldén (*H.*). — Tableau des ascensions droites de 103 étoiles fondamentales. (N° 10, 3-18).

Lundquist (*G.*). — Sur la distribution de la chaleur dans le spectre normal. (N° 10, 19-27).

Tome XXXII. 1875.

Rubenson (*R.*). — Sur la température et l'état hygrométrique des couches inférieures de l'atmosphère dans la formation de la rosée. (N° 1, 5-26).

Lundquist (*G.*). — Sur le mouvement de la chaleur dans un cylindre. (N° 1, 39-52).

Gyldén (*H.*). — Sur l'introduction des fonctions elliptiques dans un problème d'Astronomie. (N° 2, 3-12).

Gumælius (*O.*) et *Rubenson* (*R.*). — Arcs-en-ciel croisés observés par *O. Gumælius*, avec une addition par *R. Rubenson*. (N° 3, 83-87).

Gyldén (*H.*). — Nouvelle solution du problème de Kepler. (N° 6, 3-11).

Ekman (*F.-L.*). — Sur les courants qui se forment dans le voisinage des embouchures des fleuves : contribution à la connaissance de la nature des courants marins. (N° 7, 43-135).

Edlund (*E.*). — Sur la liaison entre l'induction galvanique et les phénomènes électrodynamiques. (N° 8, 3-13).

Wijkander (*A.*). — Contribution à la connaissance des vents dans

les parties de la mer Glaciale Arctique qui environnent le Spitzberg. (N° 8, 15-29).

Lindeberg (*K.-M.*). — Développement des sinus et des cosinus des multiples impairs de am $\frac{2k}{\pi}$ x en séries trigonométriques suivant l'argument x. (N° 8, 31-40).

Edlund (*E.*). — Réponse à deux remarques dirigées contre la théorie des phénomènes électriques. (N° 9, 3-12).

Hamberg (*H.-E.*). — Sur le développement d'un minimum barométrique, suivi d'orages en Suède et en Norvége, du 14 au 20 juillet 1872. (N° 9, 33-48).

Åstrand (*J.-J.*). — Sur la méthode d'Archibald Smith pour le calcul des déviations locales du compas, avec quelques méthodes plus simples et plus exactes pour le même but. (N° 9, 49-57).

Schultz (*H.*). — Sur la démonstration des équations différentielles dans la théorie des perturbations de Hansen. (N° 10, 3-23).

NOVA ACTA REGIÆ SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS [1].

Tome VIII; 1871-1873.

Gyldén (*H.*). — Recherches sur la rotation de la Terre. (21 p.; fr.).

Hoppe (*R.*). — Systèmes de lignes et de surfaces égales terminées par des rayons communs. (18 p.; fr.).

I. Équation différentielle des courbes planes. II. Enveloppe du système de courbes. III. Deux solutions particulières. IV. Équation différentielle des surfaces. V. Enveloppe du système des surfaces. VI. Arêtes de rebroussement. VII. Deux solutions particulières. VIII. Forme des ressauts pointus que présentent certaines surfaces.

Falk (*M.*). — Sur l'intégration des équations aux différentielles partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre. (40 p.; angl.).

1. Génération de l'équation aux différentielles partielles au moyen de sa primitive. (A). *Équations aux différentielles partielles linéaires par rapport aux dérivées partielles de z de l'ordre le plus élevé.* — 2. Déduction de l'équation aux dif-

---

[1] Voir *Bulletin*, t. V, p. 168. — Les Mémoires sont tous paginés séparément.

férentielles partielles d'une intégrale première de forme donnée. — 3. Intégrer l'équation diffëntielle (12) $\Sigma U_i z_{n-i,i} = 0$, quand elle a une intégrale première de la forme (3). — 4. Relations entre deux et entre trois intégrales premières de la forme (12). — 5. Propriétés de n intégrales premières distinctes de l'équation différentielle (12). — 6. Les intégrations restantes dérivant de la primitive. — 7. Sur les équations aux différentielles partielles de la forme (12), où les coefficients U et le second membre V sont fonctions de x et de y seulement ou constants. (B). *Intégrer les équations aux différentielles partielles qui ne sont pas linéaires par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé.*

Forssman (*L.-A.*). — Des relations de l'aurore boréale et des perturbations magnétiques avec les phénomènes météorologiques. (58 p., 1 pl.; fr.).

Dillner (*G.*). — Traité de Calcul géométrique supérieur. Ire Partie. (136 p.; fr.).

Tome IX. 1874-1875.

Lundquist (*G.*). — Sur la réflexion de la lumière à la surface des corps isotropes. (54 p.; fr.)

I. Les théories de la réflexion sur des corps parfaitement transparents. II. Les théories de la réflexion métallique. III. Réflexion sur les corps imparfaitement transparents et non métalliques.

Lindman (*C.-F.*). — D'une fonction transcendante. (48 p.).

Ce Mémoire traite de la transcendante $H(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot ax\,dx$ et de celles qui s'y rattachent.

Schultz (*H.*). — Observations micrométriques de 500 nébuleuses. (120 p.; angl.)

Hildebrandsson (*H.-H.*). — Essai sur les courants supérieurs de l'atmosphère. (14 p., 5 pl.; fr.).

Ångström (*A.-J.*) et *Thalén* (*T.-R.*). — Recherches sur les spectres des métalloïdes. (34 p.; fr.).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DE STATISTIQUE, DES SCIENCES NATURELLES ET DES ARTS INDUSTRIELS DU DÉPARTEMENT DE L'ISÈRE. — 3e Série. Grand in-8 (1).

Tome IV; 1875.

Faure (*H.*). — Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de l'homologie. 3e Article. (129-165).

Voir *Bulletin*, t. V, p. 205-206.

Breton (*Ph.*). — Sur les formes des lits de déjection des torrents. (166-177, 1 pl.).

Breton (*Ph.*). — L'éther de Descartes et de Newton. (177-183).

Valson (*C.-A.*). — Sur le rôle de l'espace dans les phénomènes de dissolution. (204-209).

Breton (*Ph.*). — Sur deux colonnes lumineuses de l'aurore boréale du 4 février 1872. (229-234).

Breton (*Ph.*). — Nouveau point critique entre les deux théories de la lumière. (237-241).

Breton (*Ph.*). — Simplification de la mesure des aires sphériques. (243-244, 248-257).

Breton (*Ph.*). — Étude théorique et pratique sur le lavis d'une sphère. (259-260, 321-429, 3 pl.).

Chap. I. Lois générales de l'éclairage réel et de l'éclat apparent pour les lumières directes ou diffuses. — *Chap. II.* Distribution de la lumière en *projection azimutale*. — *Chap. III.* Choix des *teintes* à employer. — *Chap. IV.* Détails de l'*épure azimutale*. — *Chap. V.* Projections usuelles. Note sur un procédé rapide pour dessiner une ellipse au compas. — *Chap. VI.* Appréciation comparative des quatre *lavis de la sphère*. — *Chap. VII.* *Capsule hémisphérique* mince et translucide. — *Chap. VIII.* Instruction pratique pour l'exécution des lavis des six figures de la première feuille à laver.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. V, p. 204.

MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES DE TOULOUSE. VII[e] Série. Grand in-8° ([1]).

Tome IV; 1872.

Anonyme. — Étude de la question balistique. Trajectoires décrites par le centre de gravité des projectiles. (13-42).

Trajectoire dans le vide. — Mouvement dans un milieu résistant. — Diverses lois de résistance. — Nouvelle méthode. — Application à la pratique. — Discussion de la trajectoire dans un milieu résistant. — Asymptote à la branche ascendante. — Rayon de courbure et vitesse. — Asymptote de la branche descendante. — Équations de trajectoires simplifiées. — Theorèmes nouveaux. — Nouvelle équation de la trajectoire. — Application pratique. — Calcul de la trajectoire.

Despeyrous. — Aberration de la lumière. (232-244).

I. Aberration annuelle : 1° en ascension droite et en déclinaison ; 2° en longitude et en latitude. — II. Aberration diurne : 1° en ascension droite et en déclinaison ; 2° en longitude et en latitude. — III. Aberration planétaire.

Tome V; 1873.

Despeyrous. — Origine géométrique des fonctions elliptiques et formules fondamentales. (211-229).

Laroque. — Note sur l'adhérence entre la lame de verre et le plateau collecteur d'un condensateur électrique. (278-280).

Planet (de). — Observations relatives à l'échauffement des tourillons des arbres de fer dans les transmissions de mouvement. (291-297).

Tome VI; 1874.

Forestier. — Notice historique sur la formule dite de *Cardan*. (254-263).

Planet (Ed. de). — Note sur l'explosion d'une chaudière de locomotive et sur l'explosion d'un volant. (401-418).

Léauté (H.). — Des courbes dont les arcs sont égaux. (419-445).

([1]) Voir *Bulletin*, t. V, p. 100.

SECONDE PARTIE.

(*N.*). — Quelques observations au sujet des grêlons qui sont
és à Toulouse pendant l'orage du 28 juillet 1874. (446-452.

ssinne. — Sur quelques points de Calcul intégral. (599-606).

Solutions singulières des équations différentielles. — Sur la détermination de
et minima, dans la méthode des variations.

). — Rapport sur une Note de M. *Catalan* relative à
tion des fonctions elliptiques. (720-721).

Tome 75.

.). — Étude géométri r l'intégration des équations
entielles partielles du pr r ordre et à trois variables.

. — Météorologie pyréné ne. L'Observatoire du Pic du
la neige rouge. (195-213, pl.).

ier. — Perfectionnement apporté à la cheminée ordinaire.
-238, 1 pl.).

ous. — Géométrie analytique généralisée. (259-284).

I. De la quantité composée. — II. Équation du premier degré $Au + Bv + C = 0$. — III. Équation du second degré. (Voir *Bulletin*, t. V, p. 100 et 102.)

Salles (*Ed.*). — Les orages de grêle. (285-296, 1 pl.).

Tisserand (*F.*). — Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes. (325-331).

Tisserand (*F.*). — Mémoire sur un point important de la théorie des perturbations planétaires. (374-388).

Sur la question de l'invariabilité des grands axes.

Brassinne. — Études de Mécanique céleste. Première étude. Newton : Livre des principes. (499-575).

Résumé des deux premiers Livres.

MEMORIE DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA. Serie terza. In-4° (1).

Tome III; 1873.

Chelini (le P. *D.*). — Interprétation géométrique de formules essentielles aux sciences de l'étendue, du mouvement et des forces. (205-246).

Voir *Bulletin*, t. VII, p. 125.

Beltrami (*E.*). — Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique rationnelle. IIIe Partie. (349-407).

Tome IV; 1873.

Villari (*Em.*). — Recherches sur les courants interrompus ou renversés, étudiés dans leurs effets thermiques et électrodynamiques. (157-195, 2 pl.).

Villari (*Em.*). — Sur la tension variable des courants électriques induits dans des circuits entièrement en cuivre ou partiellement en fer. (449-462, 1 pl.).

Villari (*Em.*). — Description d'un commutateur automatique à mercure. (463-467, 1 pl.).

Tome V; 1874.

Chelini (le P. *D.*). — Sur quelques points remarquables de la théorie élémentaire des tétraèdres et des coniques. (223-253).

Solution du problème de la détermination du tétraèdre de volume maximum dont les faces aient des aires données. Étant données trois tangentes à une conique, déterminer en fonction de leurs paramètres les éléments du triangle qu'elles forment. Nouvelle démonstration du théorème de Poncelet sur les polygones circonscrits à une conique et inscrits à une autre.

Bianconi (*G.-A.*). — Variation du niveau des puits par la pression atmosphérique. (255-267, 4 pl.).

Chelini (le P. *D.*). — Sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques. (353-357).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 219; et t. IV, p. 247.

Beltrami (*E.*). — Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique rationnelle. IVe Partie. (443-484).

Beltrami (*E.*). — Sur quelques théorèmes de Feuerbach et de Steiner. Exercice d'Analyse. (543-566).

1. Point de départ de cette étude. — 2. L'hypocycloïde à trois rebroussements. — 3. Correspondance uniforme des trois lignes R, 𝔖, Γ. — 4. Propriétés de la quartique Γ. — 5. Des faisceaux de coniques générateurs du groupe R, 𝔖, Γ. — 6. Des triangles diagonaux relatifs aux quadrangles tangentiels. — 7. Le théorème général des contacts. — 8. Généralisation du théorème de Steiner sur le cercle circonscrit. — 9. Indication sommaire de recherches ultérieures.

Tome VI; 1875.

Righi (*A.*). — Sur la pénétration des charges électriques dans les cohibants fixes et en mouvement, avec application à la théorie des condensateurs, de l'électrophore et des machines à induction. (87-157; 1 pl.).

Ruffini (*F.-P.*). — Sur quelques théorèmes se rapportant à la polarité réciproque des coniques. (383-394).

Chelini (le P. *D.*). — Sur les principes fondamentaux de la Dynamique, avec applications au pendule et à la percussion des corps, d'après Poinsot (409-459).

Ire Partie. Principes fondamentaux de la Dynamique. — *Chap. I.* Des mouvements de translation successifs et simultanés. — *Chap. II.* Des mouvements simultanés de rotation.

IIe Partie. Applications. — *Chap. I.* Pendule composé, synchrone d'un pendule simple; axes réciproques de suspension; formules pour la durée des oscillations; isochronisme. Centre réciproque d'oscillation; etc. — *Chap. II.* Questions dynamiques sur la percussion des corps.

Villari (*Em.*). — Sur l'écoulement du mercure par des tubes de verre de très-petit diamètre. (487-420; 1 pl.).

Bianconi (*G.-G.*). — Expériences sur la compressibilité de la glace. (625-634; 2 pl.).

RENDICONTI DEL REALE ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE. — Milano. Série II. In-8° (¹).

Tome III; 1870.

Serpieri (*A.*). — Sur la forme de la radiation des Perséides ou météores d'août. (14-16).

Schiaparelli (*G.-V.*). — Observations générales sur la forme des radiations météoriques. (16-25).

Cremona (*L.*). — Sur les vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre. (208-219).

Belli (le P. *St.*). — Aurore boréale observée à Lodi dans la soirée du 5 avril. (277-278).

Schiaparelli (*G.-V.*). — Sur l'éclipse totale de Soleil qui sera visible dans quelques parties de la Sicile et de la Calabre, le 22 décembre 1870. (298-300, 1 carte).

Villari (*Em.*). — Sur le temps qu'emploie le flint à s'aimanter, à se désaimanter et à faire tourner le plan de polarisation. (457-468).

Lombardini (*E.*). — Guide pour l'étude de l'Hydrologie fluviale et de l'Hydraulique pratique. (499-515).

Villari (*Em.*). — Notes sur la résistance électrique des gaz comprimés et sur les modifications spectroscopiques qu'éprouve l'étincelle qui les traverse. (594-601).

Serpieri (*A.*). — Aurores boréales du 24 et du 25 octobre 1870, observées à Urbino. (756-760).

Hajech (*C.*). — Recherches expérimentales sur l'évaporation d'un lac. (785-790.)

Celoria (*G.*). — Aurores boréales observées le 24 et le 25 octobre 1870 près de Casale Monferrato. (791-792).

(¹) Voir *Bulletin*, I, 188.

Lockyer (*J.-N.*) et *Seabroke* (*G.-M.*). — Observations spectroscopiques du Soleil. (247).

Huggins (*W.*). — Sur le mouvement de certaines nébuleuses vers la Terre ou en s'éloignant de la Terre. (251-254).

Broun (*J.-A.*). — Sur la variation annuelle de la déclinaison magnétique. (254-258).

Barlow (*W.-H.*). — Sur la représentation par un instrument enregistreur de l'action pneumatique qui accompagne l'émission des sons par la voix humaine. (277-286).

Hennessey (*J.-H.-N.*). — Note sur la périodicité de la pluie. (286-289).

Reynolds (*O.*). — Sur la réfraction du son par l'atmosphère. (285-296, et 531-548).

Grubb (*Th.*). — Sur le perfectionnement du spectroscope. (308-310).

Stewart (*B.*) et *Schuster* (*A.*). — Expériences préliminaires sur un fil de cuivre aimanté (311-317).

Mallet (*R.*). — Addition au Mémoire : « L'énergie volcanique ; essai pour développer son origine et ses relations cosmiques ». (328-329).

Imray (*J.*). — L'onde uniforme d'oscillation. (350-353).

Spottiswoode (*W.*). — Sur les combinaisons de couleur au moyen de la lumière polarisée. (354-358).

Tyndall (*J.*). — Nouvelles expériences sur la transmission du son. (359).

Tyndall (*J.*). — Sur quelques expériences récentes faites avec un respirateur de pompier. (359-361).

Roscoe (*H.-E.*). — Note sur les spectres d'absorption du potassium et du sodium à de basses températures. (362-364, 1 pl.).

Lockyer (*J.-N.*) — Notes spectroscopiques. — I. Sur l'absorption par de grandes épaisseurs de vapeurs métalliques et métalloïdiques. — II. Sur la mise en évidence de la variation de la struc-

ture moléculaire. — III. Sur la relation entre la structure moléculaire des vapeurs et leur densité. — IV. Sur une nouvelle classe de phénomènes d'absorption. (371-380).

Shanks (*W.*). — Étant donné le nombre de chiffres (ne dépassant par 100) de l'inverse d'un nombre premier, déterminer ce nombre premier lui-même. (381-384).

une Table des résultats.

V.). — Sur le nombre de chiffres de l'inverse de chaque nbre premier compris entre 20000 et 30000. (384-388).

une Table des résultats.

er (*J.-N.*). — Recherches d'analyse spectrale relatives au du Soleil. IV. (391).

ls (*O.*). — Sur les forces produites par l'évaporation et la sation à la surface. (401-407).

et *Abel* (*F.-A.*). — Recherches sur les substances exploinflammation de la poudre à canon. (408-419).

on (*Wyville*). — Sur les dragages et les sondages à de grandes ondeurs dans l'Atlantique du sud. (423-428).

Tupper (*J.-L.*). — Sur le centre de mouvement dans l'œil humain. (429-430).

Logan (*H.-F.-C.*). — Sur le calcul des factorielles. (434-435).

Scott (*R.-H.*). — Sur l'emploi d'un planimètre pour obtenir les valeurs moyennes d'après les tracés des instruments météorologiques à enregistrement continu. (435-439).

Dechevrens. — Observations magnétiques à Zi-Ka-Wei. (404).

Rücker (*A.-W.*). — Sur les adiabatiques et les isothermes de l'eau. (451-461).

Sabine (sir *Edward*). — Contributions au magnétisme terrestre. N° XIV. (461).

Prestwich (*J.*). — Tables des températures de la mer à diverses profondeurs, prises entre les années 1749 et 1868, comparées et réduites, avec des Notes. (462-468).

Broun (*J.-A.*). — La période des taches solaires et la pluie. (469-473).

Mallet (*R.*). — Sur le mécanisme du Stromboli. (496-514).

Notice nécrologique sur ARCHIBALD SMITH (10 août 1813-26 décembre 1872), auteur de travaux sur le magnétisme. — *Appendice :* I. Démonstration de Smith des formules pratiques d'après la théorie mathématique de Poisson. II. Dygogramme de 2e classe. (I-XXIV).

Tome XXIII; 1874-1875.

Haughton (*S.*). — Sur les marées des mers arctiques. (2-3 et 299-300).

Ellis (*Al.-J.*). — Sur les duodènes musicaux, ou théorie de la construction des instruments à sons fixes d'une justesse absolue ou au moins pratiquement suffisante. (3-31).

Thomson (*Wyville*). — Notes préliminaires sur la nature du fond de la mer, d'après les sondages du navire *le Challenger* durant sa croisière dans les mers du sud, dans la première partie de l'année 1874. (32-49, 4 pl.).

Russell (*W.-H.-L.*). — Sur la multiplication des intégrales définies. (120-121).

Lassell (*W.*). — Sur le polissage des miroirs de télescope à réflexion. (121-123).

Buchanan (*J.-Y.*). — Note sur la distribution verticale de la température dans l'Océan. (123-127).

Lockyer (*J.-N.*). — Remarques sur une nouvelle carte du spectre solaire. (152-154).

Huggins (*W.*). — Sur le spectre de la comète de Coggia. (154-159, 1 pl.).

Tyndall (*J.*). — Sur la réversibilité acoustique. (159-165).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une classe de relations identiques dans la théorie des fonctions elliptiques. (166-168).

essey (*J.-B.-N.*). — Sur les raies atmosphériques du spectre re, avec une carte tracée sur l'échelle adoptée par Kirchhoff. (-202).

W.-B.). — Remarques sur les « Notes préliminaires » r *Wyville Thomson* sur la nature du fond de la mer, ondages du *Challenger*. (234-245).

ville). — Rapport à l'Hydrographe de l'Amirauté sur sière du navire *le Challenger*, de juillet à novembre 1874. 50).

y (*J.-B.-N.*). — Quelques particularités du passage de ur le Soleil, du 9 décembre 1874, observé sur les monts aya, Mussoorie, à la station de May Villa, lat. 30° 28′ N., 3′ hauteur au-dessus du niveau de la mer 6765 pieds. 1 ; Note II (379-384).

(*J.-B.-N.*). — Appendice à la Note de novembre 1873, blanches du spectre solaire. (259-260).

). - nombre de chiffres de l'inverse de chaque pr r entre 30000 et 40000. (260-261).

Russell (*W.-H.-L.*). — Sur l'intégration des fonctions algébriques, avec des exemples en Mécanique. (279).

Adams (*W.-G.*). — Sur les formes des courbes et des surfaces équipotentielles et des lignes de force électrique. (280-284).

Todhunter (*I.*). — Note sur la valeur d'une certaine intégrale définie. (300-301).

Buchanan (*J.-Y.*). — Sur la détermination en mer du poids spécifique de l'eau mer. (301-308).

Ommanney (*E.*). — Rapport sur les observations du passage de Vénus faites à Louxor, Haute-Égypte, le 9 décembre 1874. (314-316).

Heaviside (*W.-J.*). — Aperçu des résultats moyens approchés obtenus avec des pendules invariables. Suite de la Note publiée au tome XIX des *Proceedings*. (316-317).

Lockyer (*J.-N.*). — Sur les spectres d'absorption des métaux volatilisés par la flamme oxyhydrique. (344-349).

De la Rue (*W.*), *Müller* (*H.-W.*) et *Spottiswoode* (*W.*). — Expériences pour déterminer la cause de la stratification des décharges électriques dans le vide. (356-361).

Hartley (*W.-N.*). — Sur l'action de la chaleur des spectres d'absorption et la constitution chimique des solutions salines. (372-373).

Crookes (*W.*). — Sur l'attraction et la répulsion résultant de la radiation. 2ᵉ *Partie*. (373-378).

Cripps (*W.-H.*) — Sur un thermomètre à enregistrement continu. (384-386).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Théorie de la division de l'octave, et emploi pratique des systèmes musicaux ainsi obtenus. Rédaction revisée d'un Mémoire intitulé : « Sur l'intonation juste en musique ; avec une description d'un nouvel instrument pour le contrôle facile des systèmes de tonalité autres que le tempérament égal de 12 divisions dans l'octave ». (390-408).

Mallet (*R.*). — Note sur le Mémoire concernant « le Mécanisme du Stromboli ». (*Proceedings*, t. XXII). (444).

Thomson (sir *W.*). — Propriétés électrodynamiques des métaux. VIᵉ Partie. Effets de la tension (*stress*) sur l'aimantation. (445-446).

Cayley (*A.*). — Mémoire sur les prépotentiels. (447-451).

L'auteur nomme ainsi les intégrales de la forme

$$\int \frac{\rho\, d\varpi}{[(a_0-x_0)^2+(a_1-x_1)^2+\ldots+(a_s-x_s)^2]^{\frac{1}{2}s+q}},$$

ρ et $d\varpi$ dépendant seulement des variables $x_0, x_1, \ldots, x_s$.

Spottiswoode (*W.*). — Expériences sur la stratification dans les décharges électriques à travers des gaz raréfiés. (455-462).

Thomson (sir *W.*). — Conductibilité électrolytique dans les solides. Premier exemple : verre chauffé. (463-464).

Macfarlane (*D.*). — Note sur la loi du refroidissement de Dulong et Petit. (465-468).

Perry (*J.*). — Résultats préliminaires de recherches sur la conductibilité électrique du verre à différentes températures. (468-472).

Thomson (sir *W.*). — Effets de la tension (*stress*) sur le magnétisme d'induction dans le fer doux. (473-476).

Tisley (*S.-C.*). — Sur une nouvelle forme de machine dynamo-magnéto-électrique. (496-498).

Gordon (*J.-E.-H.*). — Sur la détermination de la constante de Verdet en unités absolues. (504-506).

Reynolds (*O.*). — Sur le frottement de roulement. (506-509).

Spottiswoode (*W.*). — Sur le contact multiple des surfaces. (509-510).

Nanson (*E.-J.*). — Sur la théorie de la résolution d'un système d'équations simultanées non linéaires aux différentielles partielles du premier ordre. (510).

Robinson (*T.-R.*). — Réduction des anémogrammes pris à l'Observatoire d'Armagh, dans les années de 1857 à 1863. (511-514).

Andrews. — Note préliminaire sur de nouvelles recherches sur les propriétés physiques de la matière dans les états liquides et gazeux, dans diverses circonstances de pression et de température. (514-521).

Broun (*J.-A.*) — Sur le pouvoir de l'œil et du microscope pour voir des lignes parallèles. (522-532).

Adams (*W.-G.*). — Sur le changement produit par l'aimantation dans la résistance électrique du fer et de l'acier. Note préliminaire. (533-535).

Stone (*E.-J.*). — Résultats d'observations magnétiques faites dans le Petit-Namaqualand durant une partie des mois d'avril et de mai 1874. (553-564).

Kempe (*A.-B.*). — Sur une méthode générale pour produire un mouvement exactement rectiligne au moyen d'un système articulé. (565-577).

Roscoe (*H.-E.*) et *Stewart* (*B.*). — Sur la chaleur des rayons solaires à Londres, pendant les vingt années de 1855 à 1874, enregistrées par la méthode de Campbell. (578-582).

Creak (*E.-W.*). — Sur les effets des màts de fer sur les boussoles placées dans leur voisinage (582-588).

Notice nécrologique sur L.-A.-J. Quetelet. (XI-XVII).

RIVISTA SCIENTIFICO-INDUSTRIALE, COMPILATA DA G. VIMERCATI. In-8° (¹).

Tome V; 1873.

Cantoni (*G.*) et *de Eccher* (*A.*). — Controverse au sujet des condensateurs électriques. (3-10).

Brossart (*E.*). — Modifications au météorographe Secchi. (14-18; 50-55).

Ferrini (*R.*). — Sur l'origine des étoiles filantes (d'après Schiaparelli). (21-22; 56-57).

Vimercati (*G.*). — Sur la première idée des chaudières tubulaires. (23-28).

Donnini (*P.*). — Sur le calcul des machines de Woolf et d'une machine à vapeur quelconque. (29-36).

Provenzali (*F.-S.*). — Sur certaines variations lentes de l'intensité magnétique. (37-38; 221-223).

Plateau (*J.*). — Sur la viscosité superficielle des liquides. (39-41).

Cantoni (*G.*). — Nouvelles expériences sur les condensateurs électriques. (42-43).

Ragona (*D.*). — Considérations sur le radiant de la pluie météorique du 27 novembre 1872. (63-68).

Serpieri (*A.*). — Les influences du Soleil sur les planètes. 4ᵉ *Lettre*. (69-76; 103-108).

(¹) Voir *Bulletin*, t. V, p. 17.

Bertelli (*T.*). — Phénomènes sismiques et météorologiques observés à Florence en février et mars 1873. (77-80).

Favaro (*A.*). — Sur un nouvel appareil pour la transmission de la force, eu égard spécialement à la force motrice de l'eau. (84-95).

Provenzali (*F.-S.*). — Observations photométriques sur la lumière solaire. (109-111).

Cecchi (*F.*). — Perfectionnement de l'hélioscope du P. Cavalleri. (133-134).

Lovisato (*D.*). — Les éclipses totales de Soleil de 1873 à 1900. — Connexion entre les nuées-cirrhus et les taches solaires. (165-166).

Zavaglia (*S.*). — Baromètre à poids. (166-172).

Roncalli (*A.*). — Mélographe électrochimique. (178-180, 1 pl.).

Ferrini (*R.*). — Sur les inversions du courant dans l'électromoteur de Holtz à disques horizontaux. (181-182).

Cantoni (*P.*). — Sur l'interprétation d'un phénomène électrique. (183-185).

Zavaglia (*S.*). — Manomètre régulateur à mercure pour la tension de la vapeur produite par un combustible gazeux. (189-192).

Palmieri (*L.*). — Thermomètre métallique à réveil. (207-208).

Tacchini (*P.*). — Sur la relation entre les aurores terrestres et les protubérances solaires. (208-210).

Vimercati (*G.*). — Notice nécrologique sur *G.-B. Donati*. (253-255).

Righi (*A.*). — Sur quelques points controversés d'Électrostatique. (277-280).

Pinto (*L.*). — Nouveau manomètre Regnault. (281-282).

Bernardi (*E.*). — Manière d'utiliser le calorique du milieu ambiant pour produire un petit travail. (297-300).

Bianchedi (*G.*). — Sur un coup de foudre et ses effets. (301-304).

Lovisato (*D.*). — Planètes récemment découvertes. (305-306).

Lovisato (*D.*). — Spectroscopie et Météorologie. (329-331).

Ragona (*D.*). — Sur quelques phénomènes météorologiques de septembre 1873. (341-344).

Tome VI; 1874.

Serpieri (le P. *A.*). — I. Lumière zodiacale extraordinaire le soir du 12 décembre 1873. — II. Un maximum d'étoiles filantes, partant des Gémeaux, le même soir. (1-4).

Roncalli (*A.*). — Machine à voter électrochimique. (17-21; 187-194).

Denza (le P. *F.*). — Sur la connexion possible entre les éclipses de Soleil et le magnétisme terrestre. (28-32).

Muller (*Diamilla*). — Observations sur la Communication précédente. (40-44).

Cantoni (*G.*). — Sur la polarisation des corps isolants. (46-49; 78-84).

Hann. — Sur la réduction des hauteurs barométriques au niveau de la mer, en vue de l'annonce des bourrasques. (50-64).

Bassani (*C.*). — Sur la lumière zodiacale. (65-66).

Roncalli (*A.*). — Nouvelle balance. (67-70).

Bianchedi (*G.*). — Sonneries chronométriques. (92-100).

Lovisato (*D.*). — Notices astronomiques et météorologiques. (101-102).

Ferrini (*R.*). — Sur les inversions du courant dans les électromoteurs de Holtz. (124-125).

Desideri (*C.*). — Du pendule appliqué à la démonstration expérimentale du mouvement diurne de la Terre autour de son axe. (126-148).

Vimercati (*G.*). — Annonce de la mort de Domenico Cipolletti. (155).

Serpieri (*A.*). — Sur l'étude de la perturbation électrique avant-coureur du tremblement de terre. (165-173).

Ragona (*D.*). — Sur une Chronique de Fiumalbo (renfermant des renseignements scientifiques et historiques). (174-180).

Malvasia (Cte *Ant.*). — Sur son indicateur sismique. (181-184).

Ragona (*D.*). — Sur la tempête des 13-16 avril 1874. (197-201).

Palumbo (*M.*). — Pluie terreuse tombée à Castelbuono, le 13 avril 1874. (201-204).

Desideri (*C.*). — Essai d'observations sur le changement de niveau de l'eau dans un puits. (226-232).

Lovisato (*D.*). — Découvertes de nouvelles planètes. — Nouvelles substances métalliques dans l'atmosphère solaire. (233-236).

Fergola (*E.*). — Sur la position de l'axe de rotation de la Terre par rapport à son axe de figure. (239-240).

Golfarelli (*I.*). — Description et expériences sur un échappement libre, modifié par M. Peterson, d'Altona. (241-248, 1 pl.).

Piccini (*A.*). — Nouvel aréomètre à échelle arbitraire. (249-260).

Cagnassi (*M.*). — Sur un manomètre-sonde. (274-280).

Monte (*P.*). — Vitesse horaire du vent. (281-284).

Secchi (*A.*). — L'éclipse solaire du 10 octobre 1874. (309-312).

Padelletti (*D.*). — Représentation graphique des moments. (328-336).

Cecchi (*F.*). — Sur la construction des paratonnerres. (350-357).

Tome VII; 1875.

Lovisato (*D.*). — Anciennes observations chinoises des taches solaires. (1-4).

De Rossi (*M.-St.*). — Sur l'existence des petits mouvements telluriques. (5-7).

Ferrini (*R.*). — Sur la correction de température d'un liquide où l'on ne peut pas enfoncer suffisamment le thermomètre. (21-26).

Rossetti (*F.*). — Nouvelles études sur les courants des machines électriques. (26-36).

Puglia (*A.*). — Sur la décomposition subjective de la lumière blanche. (50-51).

Eugenio (*V.*). — Considérations sur quelques questions de Mécanique et d'Astronomie. (52-72).

I. Examen du principe de la conservation du mouvement du centre de gravité. — II. Examen du principe de la conservation des aires. — III. Examen du principe de la conservation des forces vives. — Examen de l'expression de la vitesse dans le mouvement des corps célestes. — V. Examen de la parallaxe solaire.

Lovisato (*D.*). — Découvertes de petites planètes. (73-74).

Camacho. — Électro-aimant à tubes concentriques. (74-75).

De Rossi (*M.-St.*). — Invention et description d'un sismographe horaire et économique. (101-107).

Favaro (*A.*). — Notices historiques sur les fractions continues, depuis le XIIIe siècle jusqu'au XVIIe. (109-111).

Mensini (*J.*). — La vigie sismique. Nouvel appareil indicateur des tremblements de terre. (117-120).

Cassani (*P.*). — Sur les causes qui maintiennent la chaleur solaire. (121-124).

Secchi (le P. *A.*). — Sur le dernier passage de Vénus devant le Soleil, en décembre 1874. (125-134).

Mécanique appliquée et Machines a vapeur. — Le strophomètre Hearson. — Nouvel hydromètre Schmid. (135-142).

Sardi (*D.*). — Sur un phénomène dépendant de la diversité de densité de l'eau. (145-148).

Mensini (*J.*). — La vigie orthosismique. Nouvel appareil indicateur des tremblements de terre par soubresauts. (166-169, 1 pl.).

Lovisato (*D.*). — Nouvelles planètes. (177).

Secchi (le P. *A.*). — L'éclipse du 29 septembre 1875. (178-180).

Détermination d'un zéro d'altitude pour servir de point fixe de départ aux opérations géodésiques et de nivellement. (194-197).

Negri (*C.*). — Le locomoteur funiculaire Agudio sur le plan incliné de Lanslebourg. (198-213).

Cintolesi (*F.*). — Sur un curieux phénomène observé à propos de l'action à petite distance entre un liquide et un solide. (219-222).

Da Schio (*A.*). — Le vol naturel et le vol artificiel. Notice bibliographique. (223-228).

Volpicelli (*P.*). — Recherches expérimentales sur la machine de Belli à induction tournante. (229-231).

Favaro (*A.*). — Sur quelques phénomènes qui accompagnent les tremblements de terre, et sur les moyens propres à en atténuer les effets. (243-251).

Donnini (*P.*). — Sur les capacités thermiques des corps. (252-256).

Favaro (*A.*). — Sur quelques études concernant les tremblements de terre, par le Dr Schmidt. (271-280; 294-311).

Serpieri (*A.*). — Détermination des phases et des lois du grand tremblement de terre survenu en Italie dans la nuit du 17 au 18 mars 1875. (281-284).

Cintolesi (*F.*). — Sur l'accélération produite par l'électricité dans le phénomène de l'ébullition. (312-320).

SITZUNGSBERICHTE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU WIEN. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe [1].

Tome LXIX; janvier-mai 1874.

Exner (*F.*). — Les figures de dissolution dans les cristaux. (6-14).

Stern (*S.*). — Nouvelles considérations sur la production du son. (15-51).

Lippich (*F.*). — Remarque sur un théorème de la théorie des fonctions d'une variable complexe de Riemann. (91-99).

Concernant la théorie de la connexion et des sections transverses.

Exner (*F.*). — Dépendance entre l'élasticité du caoutchouc et la température. (102-114).

---

[1] Voir *Bulletin*, I, 208; VII, 138, 203; VII, 223.

Durège (*H.*). — Sur l'analyse de situations de surfaces de Riemann. (115-120; 1 pl.).

Mach (*E.*). — Expériences sur le sens de l'équilibre. 2e *Note.* (121-135).

Dvořák (*V.*). — Sur la propagation du son dans les gaz. (151-164).

Stefan (*J.*). — Sur la théorie des forces magnétiques. (165-210).

Pelz (*C.*). — La détermination des axes des surfaces coniques du second degré. (215-227; 1 pl.).

Röntgen (*W.-C.*) et *Exner* (*F.*). — Sur une application du calorimètre de glace à la détermination de l'intensité du rayonnement solaire. (228-238; 1 pl.).

Puluj (*J.*). — Sur la constante du frottement de l'air en fonction de la température. (287-317).

Puschl (*C.*). — Sur la chaleur des corps et la densité de l'éther. (324-333).

Streintz (*H.*). — Sur la diminution des oscillations de torsion des fils métalliques. (337-378).

Oppolzer (*Th.* *v.*) — La planchette de transmission (*Schaltbrett*) de la mesure du méridien autrichienne. (379-398; 1 pl.).

Weyr (*Ed.*). — Sur les courbes non planes du septième ordre. (399-415).

Stark (*J.-E.*). — Sur la détermination de l'orbite de la planète (100) Hécate. (419-450).

Lang (*V.* *v.*). — Sur la dépendance entre l'indice de réfraction de l'air et la température. (451-468; 1 pl.).

Escherich (*G.* *v.*). — Sur la géométrie des surfaces de courbure négative constante. (497-526).

Voir *Bulletin*, t. XI, p. 111.

Dvořák (*J.*). — Sur quelques nouvelles figures de poussière. (527-540).

Stefan (*J.*). — Expériences sur l'adhésion apparente. (713-735)

Weyr (*Em.*). — La génération des courbes du troisième ordre au moyen d'éléments symétriques du second ordre. (784-794).

Boltzmann (*L.*). — Détermination expérimentale de la constante de diélectricité de certains gaz. (795-813; 1 pl.).

Hauslab (*v.*). — Sur les lois naturelles des formes extérieures des inégalités de la surface terrestre (816-828).

Niemtschik (*R.*). — Sur la construction des courbes du second ordre tangentes à deux, à trois ou à quatre courbes du même ordre. (845-859; 1 pl.).

Odstrčil (*J.*). — Sur l'explication des variations périodiques des éléments du magnétisme terrestre. (860-888).

Tome LXX; 1874.

Gegenbauer (*L.*). — Sur les fonctions de Bessel. (6-16).

Winckler (*A.*). — Sur les intégrales indéfinies d'une classe de fonctions transcendantes. (17-60).

Frombeck (*H.*). — Sur une extension de la théorie des fonctions sphériques et sur les modes de développement d'une fonction en série infinie qui en résultent. (61-95).

Holetschek (*J.*). — Détermination de l'orbite de la première comète de l'année 1871. (2e *Partie*). (99-118).

Winckler (*A.*). — Intégration de diverses équations différentielles du second ordre. (149-197).

Lang (*V. v.*). — Déterminations cristallographiques et optiques. III. (198-210).

Puluj (*J.*). — Sur la constante de frottement de l'air, en fonction de la température. 2e *Article*. (243-267).

Boltzmann (*L.*). — Sur la théorie de la réaction élastique. (275-306).

I. Recherches de l'expression mathématique de la réaction élastique. II. Établissement et discussion des formules de la réaction élastique qui paraissent à l'auteur les plus vraisemblables. — *Addition* : Partie expérimentale.

Boltzmann (*L.*). — Sur quelques corrections à apporter à mes

essais sur l'action électrostatique à distance des corps diélectriques. (307-341).

Boltzmann (*L.*). — Sur les différentes valeurs de la constante de diélectricité du soufre cristallisé suivant les différentes directions. (342-366).

Romich et *Fajdiga*. — Étude expérimentale sur l'action à distance des corps diélectriques. (367-379).

Romich et *Nowak*. — Étude expérimentale des corps diélectriques au point de vue de la réaction diélectrique. (380-407).

Puschl (*C.*). — Sur une modification de la théorie des gaz adoptée. (413-432).

Gegenbauer (*L.*). — Sur quelques intégrales définies. (433-443).

Exner (*F.*). — Sur le passage des gaz à travers des lamelles de fluide. (465-501).

Handl (*Al.*). — Sur la dilatation des corps solides pour des températures croissantes. Contributions à la théorie moléculaire. IV. (505-518).

Dvořák (*V.*). — Sur la vitesse du son dans l'eau renfermée dans des tuyaux. (522-526).

Gruber (*L.*). — Sur un appareil pour les observations de coïncidences dans les déterminations de la pesanteur à l'aide du pendule à réversion. (565-570).

Puschl (*C.*) — Sur les propriétés des vapeurs saturées. (571-588).

Stefan (*J.*). — Sur les lois des forces magnétiques et électriques dans les milieux magnétiques et diélectriques, et leur relation avec la théorie de la lumière. (589-644).

Dvořák (*V.*) — Sur une nouvelle espèce de sons variables. (645-653).

Tome LXXI; 1875.

Winckler (*A.*). — Intégration de deux équations différentielles linéaires. (5-32).

L'auteur traite les deux formes auxquelles se ramène l'équation

$$(\mathrm{H}_0 t^2 + 2\mathrm{H}_1 t + \mathrm{H}_2)\frac{d^2y}{dt^2} + (\mathrm{K}_0 t + \mathrm{K}_1)\frac{dy}{dx} + \mathrm{L}_0 y = 0,$$

suivant que le coefficient de $\frac{d^2y}{dt^2}$ est ou n'est pas un carré parfait. Ces formes sont

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+[c+(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}+aby=0,$$

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}-aby=0,$$

a, b, c étant des constantes.

Zipernovszky (*K.*). — Nouvelle construction des contours perspectifs des surfaces du second ordre. (33-94; 4 pl.).

Puschl (*C.*). — Sur le changement de volume du caoutchouc par la chaleur. (95-98).

Littrow (*A. v.*). — Sur la capacité thermique relative de différents terrains, et l'influence correspondante de l'eau. (99-151; 3 pl.).

Pfaundler (*L.*). — Sur les chaleurs et les températures qui se développent dans le mélange de l'acide sulfurique avec l'eau, comparativement aux chaleurs moléculaires et aux points d'ébullition des hydrates résultants. (155-178; 1 pl.).

Oppolzer (*Th. v.*). — Observation du passage de Vénus du 8 décembre 1874 à Jassy, et détermination de la latitude géographique du lieu d'observation. (179-203).

Domalip (*K.*). — Sur une conséquence de l'analogie entre la température et la fonction potentielle. (236-242).

Obermayer (*A. v.*). — Sur la dépendance entre le coefficient de frottement de l'air atmosphérique et la température. (281-308; 1 pl.).

Dvořák (*V.*). — Sur les vibrations de l'eau dans les tuyaux. (315-333).

Pfaundler (*L.*) et *Schnegg* (*E.*). — Sur les températures de congélation des hydrates d'acide sulfurique, et la composition des masses cristallines détachées, avec l'explication des résultats obtenus. (351-390; 1 pl.).

Rosický (*W.*). — Sur les phénomènes de diffraction dans le spectre. (391-396).

Exner (*K.*) — Sur les bandes d'interférence de Quetelet. (417-426; 1 pl.).

Niemtschik (*R.*). — Sur la construction des lignes du second ordre inscrites l'une à l'autre. (435-452; 1 pl.).

Wassmuth (*A.*). — Sur une démonstration de la loi de Biot et Savart. (470-474).

Koutny (*E.*). — Sur les théorèmes de Pascal et de Brianchon et la construction des sections coniques. (491-504; 1 pl.).

Pfaundler (*L.*). — Sur les mélanges réfrigérants en général, et spécialement sur ceux de neige et d'acide sulfurique. (509-538; 1 pl.).

Holetschek (*J.*). — Sur l'orbite de la planète (111) Até. (539-570).

Hann (*J.*). — Recherches sur la variabilité de la température du jour. (571-657; 1 pl.).

Tschermak (*G.*). — La formation des météorites et le vulcanisme. (661-673).

Puluj (*J.*). — Sur un appareil d'enseignement pour la détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. (677-686; 1 pl.).

Fitz-Gerald Minarelli (*A. v.*). — Sur les propriétés thermo-électriques de quelques métaux dans la fusion et la solidification. (694-706; 1 pl.).

Lang (*V. v.*). — Sur la dépendance entre la polarisation circulaire du quartz et la température. (707-714).

Gruber (*L.*). — Détermination de l'orbite de la planète (138) Tolosa, avec des éphémérides pour l'opposition de 1875. (755-760).

Exner (*F.*). — Sur la dilatation galvanique des métaux. (761-790).

Holetschek (*J.*). — Détermination de l'orbite de la planète (118) Peitho. (791-808).

Popper (*J.*). — Sur la source et la quantité du travail produit par un aérostat. (809-845; 1 pl.).

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI. ATTI DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE (¹).

Tome I; 1863.

Padula (*F.*). — Recherches de Géométrie analytique. (N° 4, 14 p., 1 pl.).

Trudi (*N.*). — Études sur une élimination singulière, avec application à la recherche de la relation entre les éléments de deux coniques, l'une inscrite, l'autre circonscrite à un polygone, et aux théorèmes correspondants de Poncelet. (N° 6, 53 p.).

De Gasparis (*A.*). — Sur la détermination des orbites planétaires. (N° 8, 48 p.).

Scacchi (*A.*). — De la polysymétrie des cristaux. (N° 11, 120 p., 4 pl.).

Battaglini (*G.*). — Sur les involutions des divers ordres. (N° 12, 14 p.).

Tome II; 1865.

Scacchi (*A.*). — Recherches sur les relations entre la gémination des cristaux et leur accroissement. (N° 3, 27 p.).

Palmieri (*L.*). — Nouvel électromètre bifilaire. (N° 6, 6 p., 1 pl.).

Trudi (*N.*) — Sur la détermination des constantes arbitraires dans les intégrales des équations linéaires, tant différentielles qu'aux différences finies. (N° 8, 25 p.).

Scacchi (*A.*). — De la polysymétrie et du polymorphisme des cristaux. (N° 9, 63 p., 2 pl.).

De Gasparis (*A.*). — Sur le calcul des orbites des étoiles doubles. (N° 10, 15 p.).

Palmieri (*L.*). — De la période diurne de l'électricité atmosphérique, et de ses relations avec celle des courants telluriques. (N° 11, 4 p., 2 pl.).

(¹) Publié par volumes grand in-4, à époques indéterminées. Les divers Mémoires sont paginés à part.

Trudi (*N.*). — Sur la décomposition des fonctions fractionnaires rationnelles. (N° 12, 26 p.).

Tucci (*F.-P.*). — Recherches géométriques ou graphiques des distances maxima ou minima absolues entre des points, des lignes et des surfaces quelconques, combinés deux à deux de toutes les manières possibles. (N° 14, 13 p., 1 pl.).

Palmieri (*L.*). — Nouvel anémographe électromagnétique. (N° 15, 4 p., 1 pl.).

Trudi (*N.*). — Sur le développement des fonctions fractionnaires rationnelles. (N° 17, 68 p.).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes géométriques de seconde espèce. (N° 18, 28 p.).

Battaglini (*G.*). — Sur les involutions des divers ordres dans les systèmes de seconde espèce. (N° 19, 15 p.).

Trudi (*N.*). — Sur la partition des nombres. Note sur les développements des fonctions log $(1-e^{-at})$ et log $(1-\rho^b e^{-bt})$ et sur le calcul des nombres bernoulliens et ultra-bernoulliens. (N° 23, 50 p.).

Tome III; 1866-1868.

Brioschi (*Fr.*). — Sur quelques nouvelles relations modulaires. (N° 2, 16 p.).

Palmieri (*L.*). — Nouvelles modifications appliquées au conducteur mobile, avec quelques précautions nécessaires pour en faire usage. (N° 4, 24 p., 2 pl.).

Scacchi (*A.*). — Sur l'efficacité des solutions des tartrates pour rendre hémiédriques les cristaux des paratartrates qui s'y accroissent. (N° 5, 59 p.).

Trudi (*N.*). — Sur les équations binômes. (N° 6, 49 p.).

Battaglini (*G.*). — Sur les systèmes de droites du second degré. (N° 8, 45 p.).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires de degré quelconque. (N° 10, 34 p.).

Scacchi (*A.*). — Sur un cas remarquable de dimorphisme. (N° 13, 20 p.).

tartriques. (N° 25, 46 p., 3 pl.).

Scacchi (*A.*). — Sur les combinaisons de la lithine a
sulfurique. (N° 27, 84 p., 1 pl.).

Tome IV; 1869.

Battaglini (*G.*). — Sur les formes ternaires de degré q
1[er] *Mémoire*. (N° 3, 38 p.).

Scacchi (*A.*). — Sur l'acide paratartrique anhydre. (N
1 pl.).

De Luca (*F.*). — Sur l'état actuel de la question de la
au pôle boréal. (N° 5, 19 p.).

Battaglini (*G.*) — Sur les systèmes de droites de degré q
(N° 7, 27 p.).

Palmieri (*L.*). — Deux questions concernant l'électri
relle. (N° 8, 13 p.).

Palmieri (*L.*). — Dernières phases de l'éruption du
1868. (N° 9, 17 pl.).

Battaglini (*G.*). — Sur les dynames en involution. (N°

Scacchi (*A.*). — Sur les formes cristallines de quelque
sés du toluène. (N° 15, 25 p., 1 pl.).

Tome V; 1873.

Fergola (*E.*). et *Secchi* (*A.*). — Sur la différence de
entre Naples et Rome, déterminée au moyen de la

De Gasparis (*A.*). — Catalogue de 714 orbites d'étoiles filantes observées d'avril 1870 à décembre 1871. (N° 15, 19 p.).

Palmieri (*L.*). — L'éruption du Vésuve du 26 avril 1872. (N° 17, 64 p., 5 pl.).

Scacchi (*A.*). — Contributions minéralogiques pour servir à l'histoire de l'éruption du Vésuve du mois d'avril 1872. (N° 22, 35 p., 1 pl.).

Fergola (*E.*). — Nouvelle détermination de la latitude de l'observatoire de Capodimonte, moyennant la différence des distances zénithales de 52 couples d'étoiles, observées pendant l'année 1871. (N° 23, 92 p.).

Motifs de ce travail. — Constante du niveau. — Examen du micromètre. — Méthode d'observation et positions moyennes des étoiles. — Observations de latitudes, et réductions relatives. — Résultat final et son erreur probable. — *Note additionnelle* sur les valeurs de la latitude de quelques observatoires obtenues à différentes époques.

THE LONDON, EDINBURGH AND DUBLIN PHILOSOPHICAL MAGAZINE AND JOURNAL OF SCIENCE. Conducted by Sir David Brewster, Sir Robert Kane, William Francis, etc. — London, in-8 (1).

Tome XXXI (nos 206-212); janvier-juin 1866.

Edmonds (*Th.-R.*). — Sur la loi de la mortalité humaine, exprimée par une nouvelle formule. (1-21).

Brewster (*sir David*). — Sur les bandes formées par la superposition des spectres paragéniques produits par les surfaces sillonnées de verre et d'acier. 1re *Partie* (22-26, 1 pl.). 2e *Partie*. (98-104, 2 pl.).

Croll (*J.*). — Sur l'excentricité de l'orbite de la Terre. (26-28).

---

(1) Publié mensuellement, par livraison de 5 à 6 feuilles.

Ce Recueil contient, outre des travaux originaux, des traductions des Mémoires les plus importants publiés dans les recueils étrangers, des comptes rendus bibliographiques, et des analyses des séances de la Société Royale de Londres, de la Société géologique, etc.

Dans ce premier article, que nous consacrons aux années de ce journal antérieures à 1873, nous ne mentionnerons que les travaux originaux.

Clausius (*R.*). — Sur la détermination de la désagrégation d'un corps, et sur la vraie capacité pour la chaleur. (28-33).

Challis. — Recherches supplémentaires sur l'Hydrodynamique. 3e *Partie*. (33-45).

Edmonds (*Richard*). — Sur les tremblements de terre et les agitations extraordinaires de la mer. (45-52).

Sylvester (*J.-J.*). — Préludes astronomiques : contenant une démonstration instantanée des théorèmes de Lambert et d'Euler; une construction de l'orbite d'un astre d'après deux distances héliocentriques, la corde sous-tendue et le temps périodique; la théorie focale des ovales de Descartes, et une discussion du mouvement sur un cercle et de sa relation avec les mouvements planétaires. (52-76).

Wilson (*J.-M.*). — Quelques remarques sur une observation de M. Glaisher. (104-106).

Concernant la température des hautes régions de l'atmosphère.

Cooke (*J.-P.*). — Sur la construction d'un spectroscope avec un nombre de prismes par lequel l'angle de déviation minimum d'un rayon quelconque peut être mesuré et déterminé de position dans le spectre solaire. (110-119).

Wilson (*J.-M.*). — Sur quelques problèmes de probabilités. (170-172).

Clarke (*A.-R.*). — Sur le livre de l'Archidiacre Pratt : « Figure of the Earth ». (193-196).

Rankine (*W.-J.-M.*). — Sur l'expansion des vapeurs saturées. (197-198). — Sur les vapeurs saturées. (199-201).

Heath (*D.-D.*). — Sur les changements locaux séculaires du niveau de la mer. (201-210).

Guthrie (*Fr.*). — Spéculation concernant la relation entre la rotation de la Terre sur son axe, et la résistance, l'élasticité et le poids de l'éther solaire. (210-213).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur une forme perfectionnée de démonstration de la nouvelle règle pour la séparation des racines d'une



équation algébrique, avec un *post-scriptum* contenant un théorème nouveau. (214-218).

Challis. — Solution d'un problème de Calcul des variations par une nouvelle méthode. (218-227).

Solide maximum de révolution, de surface donnée, coupant l'axe en deux points donnés.

Stevelly (*J.*). — Sur la composition des forces. (245-252).

Wilson (*J.-M.*). — Sur la diminution de la chaleur solaire directe dans les hautes régions de l'atmosphère. (261-264).

Norton (*W.-A.*). — Sur la physique moléculaire. (265-282).

Sylvester (*J.-J.*). — Notes sur les changements d'orbites périodiques, dans certaines circonstances, d'une particule soumise à l'action d'une force centrale, et sur les coordonnées vectorielles, etc.; avec une nouvelle théorie des analogues dans l'espace des ovales de Descartes : suite aux « Préludes astronomiques ». (287-300).

Siemens (*W.*). — Sur la question de l'unité de résistance électrique. (325-336).

Cooke (*J.-P.*). — Sur les lignes aqueuses du spectre solaire. (337-343).

Challis. — Sur le mouvement d'une petite sphère sous l'action des ondulations d'un fluide élastique. (343-363).

Schwendler (*L.*). — Sur la résistance galvanométrique à employer en expérimentant avec le diagramme de Wheatstone. (364-368).

Young (*J.-R.*). — Sur le complément de la démonstration de la règle de Newton, et sur une propriété générale des polynômes dérivés. (369-372).

Haughton (*S.*). — Sur le changement d'excentricité de l'orbite terrestre, considéré comme cause de changements de climat. (374-376).

Matthiessen (*A.*). — Note sur le Mémoire du Dr *Siemens* : « Sur la question de l'unité de résistance électrique ». (376-380).

Sylvester (*J.-J.*). — Note supplémentaire sur les analogues dans l'espace des ovales de Descartes dans le plan. (380-385).

Tyndall (*J.*). — Sur la calorescence. (386-396; 435-450, 1 pl.).

Huggins (*W.*) et *Miller* (*W.-A.*). — Sur les spectres de quelques étoiles fixes. (405-425; 515-522, 2 pl.).

Todhunter (*I.*). — Sur un problème de Calcul des variations. (425-427).

Pratt (*J.*). — Sur la théorie de la terre fluide. (430-435).

Challis. — Sur les idées fondamentales de matière et de force dans la Physique théorique. (459-474).

Stewart (*B.*). — Sur les observations de M. Cookes concernant le spectre solaire. (503-505).

Neumayer (*M.-G.*). — Sur la vapeur d'eau et la radiation terrestre. (510-515).

Huggins (*W.*) et *Miller* (*W.-A.*). — Sur les spectres de quelques nébuleuses. Supplément au Mémoire : « Sur les spectres de quelques étoiles fixes ». (523-532).

Pratt (*J.*). — Sur le niveau de la mer durant l'époque glaciaire. (532-533).

Thomson (*W.*). — Sur les observations et les calculs nécessaires pour trouver le ralentissement de la rotation de la Terre par les marées. (533-537).

Tome XXXII; juillet-décembre 1866.

Pratt (*J.*). — Réplique aux Remarques du capitaine *A.-R. Clarke* sur sa « Détermination de la figure de la Terre d'après les données géodésiques ». (17-22).

Haughton (*S.*). — Sur la pendaison, considérée au point de vue mécanique et physiologique. (23-34).

Heath (*D.-D.*). — Sur le problème des niveaux de la mer. (34-40).

Clausius (*R.*). — Sur la réflexion de la lumière dans l'atmosphère. (41-44).

Challis. — Sur une extension des principes du calcul des variations. (45-54).



Starchey. — Action de la vapeur d'eau sur la radiation terrestre. (64-68).

Tyndall (*J.*). — Expériences sur la vibration des cordes. (68-76).

Croll (*J.*). — Influence de l'ondulation des marées sur le mouvement de la Lune. (107-111; 361-362).

Young (*J.-R.*). — Sur l'évaluation des fractions évanouissantes, avec quelques remarques supplémentaires sur la règle de Newton. (121-125).

Pratt (*J.-H.*). — Trouver quels changements peuvent se produire dans l'arrangement de la masse d'un corps, sa forme extérieure restant la même, sans que l'attraction de l'ensemble sur un point extérieur soit altérée. (132-135).

Cockle.—Sur le paradoxe hydrostatique d'Ostrogradsky. (157-158).

Fleeming (*Jenkin*). — Réplique au Mémoire du D[r] *Werner Siemens* : « Sur la question de l'unité de résistance électrique ». (161-177).

Todhunter (*I.*). — Sur un problème de Calcul des variations. (199-205).

Norton (*W.-A.*).—Sur la Physique moléculaire (*suite*). (205-212; 283-289).

Challis. — Sur un problème de Calcul des variations. Réplique à M. Todhunter. (278-283).

Pratt (*J.*). — Sur la figure de la Terre mesurée géodésiquement. (313-315).

Galton (*Fr.*). — Sur la conversion des cartes de vents en cartes de passage. (345-349).

Everett (*J.-D.*). — Description d'une nouvelle Table de proportions, équivalente à une règle à calcul de 13 pieds 4 pouces de longueur. (550-356).

Cayley (*A.*). — Sur le lieu des foyers des coniques passant par quatre points donnés. (362-365).

Cayley (*A.*). — Remarques sur les équations différentielles. (379-381).

Brooke (*C.*). — Sur la théorie dynamique de l'électricité. (433-436).

Sylvester (*J.-J.*). — Note sur un moyen mnémonique pour retenir les formules de Delambre, dites communément « formules de Gauss ». (436-438).

Sylvester (*J.-J.*). — Note sur les propriétés des opérateurs caractéristiques (*Test Operators*) qui se rencontrent dans le Calcul des invariants, leurs dérivés, leurs analogues et leurs lois de combinaison; avec une application incidente au développement, en une série de Maclaurin, d'une puissance quelconque du logarithme d'une variable augmentée. (461-472).

Templeton (*R.*). — Sur l'agrandissement du disque du Soleil près de l'horizon. (488-490).

Holt (*H.*). — Sur une méthode pour calculer les coefficients des inégalités lunaires. (490-503).

Tome XXXIII; janvier-juin 1867.

Pratt (*J.*). — Sur la figure de la Terre, obtenue d'après les données géodésiques. (10-16).

Schwendler (*L.*). — Sur la résistance galvanométrique que l'on doit employer dans les expériences avec le diagramme de Wheatstone. (29-36).

Sylvester. — Sur la multiplication des opérateurs de différentiation partielle. (48-55).

Forbes (*G.*). — Sur l'averse météorique du 14 novembre 1866. (81-88, 1 pl.; 282-283).

Rankine (*W.-J.-M.*). — Sur l'expression « énergie potentielle » et sur la définition des quantités physiques. (88-92).

Tyndall (*J.*). — Sur les flammes résonnantes et sensibles. (92-99).

Rodwell (*G.-F.*). — Sur quelques effets produits par un fluide en mouvement. N° III. (99-117, 1 pl.).

Croll (*J.*). — Sur l'excentricité de l'orbite de la Terre, et ses relations physiques avec l'époque glaciaire. (119-131).



Pratt (*J.*). — Comparaison des arcs anglo-français, russe et indien, en vue d'en déduire la figure moyenne de la Terre. (145-152).

Crove (*W.-R.*). — Sur les télescopes aplanétiques. (161-164).

Heath (*D.-D.*). — Sur la théorie dynamique des marées des mers profondes, et l'effet du frottement des marées. (165-186).

Brooke (*C.*). — Sur la pression négative d'un fluide sur une surface donnée. (207-210).

Pratt (*J.*). — Quels changements peuvent se produire dans l'arrangement des matériaux de la masse d'un corps, sa forme extérieure restant la même, sans que son attraction sur un point extérieur soit altérée. (261-264; 332-335; 445-446).

Murray (*B.-A.*). — Démonstration rigoureuse, par la Géométrie élémentaire, de la proposition ordinairement classée comme le douzième axiome d'Euclide. (264-270).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur la tension des lames liquides. (270-282).

Harrison (*J.-P.*). — Sur le rayonnement et la vapeur. (283-286).

Barrett (*W.-F.*). — Sur les flammes sensibles. (287-290).

Brewster (*sir D.*). — Observations additionnelles sur la polarisation de l'atmosphère, faites à Saint-Andrews en 1841-45. (290-304; 346-360; 455-465).

Webb (*F.-C.*). — Sur une des lois d'Ohm, relative à un circuit isolé. (321-325).

Tyndall (*J.*). — Action des vibrations sonores sur les jets gazeux ou liquides. (375-391).

Croll (*J.*). — Le changement de l'obliquité de l'écliptique, son influence sur le climat des régions polaires et sur le niveau de la mer. (426-445).

Roberts (*S.*). — Note sur l'ordre des conditions pour qu'une équation algébrique puisse avoir un système de racines multiples. (530-535).

Moore (*J.-C.*). — Note sur le Mémoire de M. *Croll*, touchant l'influence de l'obliquité de l'écliptique sur le climat. (536-537).

Cockle. — Sur la conversion des intégrales. (537-539).

Tome XXXIV ; juillet-décembre 1867.

Thomson (*sir W.*). — Sur les tourbillons atomiques. (15-24).

Pratt (*J.*). — Sur la démonstration du Théorème de Clairaut, par le prof. *Stokes*. (25-26).

Newton (*H.-A.*). — Sur certaines contributions récentes à l'Astro-Météorologie. (34-50).

1. Points radiants ou aires radiantes. 2. Influence des météores d'août et de novembre sur la température de l'atmosphère. 3. Les trajectoires et l'origine probable des étoiles filantes. 4. Age du groupe d'étoiles filantes de novembre.

Waterston (*J.-J.*). — Sur le changement qu'éprouverait une orbite elliptique, si l'intensité de la gravité était influencée par la vitesse centripète du corps auquel appartient cette orbite. (55-60).

Ellis (*W.*). — Recherches pour vérifier si la tendance à la dispersion des nuages sur la pleine Lune dépend en quelque manière de l'influence lunaire. (61-65).

Croll (*J.*). — Remarques sur le changement d'obliquité de l'écliptique et son influence sur le climat. (127-128).

Harrison (*J.-P.*). — De l'influence de la Lune sur les nuages. (143-144).

Schwendler (*L.*). — Sur l'essai des câbles télégraphiques pendant l'opération du revêtement. (169-177).

Stoney (*G.-J.*). — Sur la relation entre les comètes et les météores. (188-193).

Brewster (*sir D.*). — Sur le spectre radiant. (202-204).

Ellis (*W.*). — Nouvelles remarques touchant l'influence de la pleine Lune sur les nuages. (218-220).

Siemens (*C.-W.*). — Sur un appareil pour mesurer la résistance. (270-273).

Rankine (*W.-J.-M.*). — Sur le tracé approximatif d'arcs de cercle de longueurs données. (284-286).

Laughton (*J.-K.*). — Recherches sur les faits sur lesquels repose la théorie de la circulation de l'atmosphère. (359-365).

Rankine (*W.-J.-M.*). — Sur les polygones réguliers isopérimètres. (365-367).

Tarleton (*F.-A.*). — Sur la figure du boulet qui offre la moindre résistance de la part de l'air. (377-380).

Rankine (*W.-J.-M.*). — Sur la rectification approchée des arcs de cercle. 2ᵉ Supplément à une Note lue à l'Association Britannique. (381-282).

Watts (*W.-M.*). — Sur le spectre de la flamme de Bessemer. (437-440, 1 pl.).

Collingwood (*C.*). — Arc-en-ciel horizontal observé en mer. (440-441, 1 pl.).

Cockle. — Note sur la conversion des intégrales. (442-443).

Laughton (*J.-K.*). — Sur les forces naturelles qui produisent les vents permanents et périodiques. (443-449).

Croll (*J.*). — Sur certains éléments hypothétiques dans la théorie de la gravitation, et sur des conceptions généralement reçues concernant la constitution de la matière. (449-460).

Sylvester (*J.-J.*). — Pensées sur les matrices orthogonales inverses, les successions de signes simultanées, et les pavages à carreaux de deux ou plusieurs couleurs, avec des applications à la règle de Newton, au carrelage ornemental et à la théorie des nombres. (461-475).

Bennington (*C.-H.*). — Description d'un nouveau photomètre. (475-476).

Tome XXXV; janvier-juin 1868.

Waterston (*J.-J.*). — Sur certaines relations thermomoléculaires des liquides et de leurs vapeurs saturées. (81-103).

Moon (*H.*). — Sur l'intégration de l'équation linéaire générale aux différentielles partielles du second ordre. (118-122).

Maxwell (*J.-C.*). — Sur la théorie dynamique des gaz. (129-145; 185-217).

Sondhauss (*C.*). — Sur les sons produits par un jet d'eau. (234-238).

SECONDE PARTIE.

ard (*C.-J.*). — Synthèse de la lumière blanche au moyen des couleurs du spectre. (261).

Thomson (*sir W.*). — Sur l'électrophore réciproque de M. *C.-F. Varley*. (287-289).

Webb (*F.-C.*). — Sur les « circuits d'induction », ou application de la loi d'Ohm à des problèmes d'électrostatique. (325-333).

Maxwell (*J.-C.*). — Sur « l'expérience d'induction électro-magnétique » de M. *Grove*. (360-363).

Chase (*P.-E.*). — e spécifique du fer. (384-385).

Clausius (*R.*). — Sur le second orème fondamental de la théorie mécanique de la -419).

Merrifield (*C.-W.*). — Exe de l'application d'une méthode graphique au problème ment rectiligne dans un milieu résistant homogène. (420-

Zenger (*C.-V.*). — Sur le c nent périodique de climat causé par la Lune. (433-439).

Gill (*J.*). — Sur la théorie dynamique de la chaleur. (439-441).

Tome XXXVI; juillet-décembre 1868.

Gill (*J.*). — Sur la théorie dynamique de la chaleur. (1-12).

Ball (*R.*). — Sur les anneaux tourbillants dans l'air. (12-14).

Lyman (*C.-S.*). — Nouvelle forme d'appareil à ondes. (14-21).

Moon (*R.*). — Sur la théorie de la pression dans les fluides. (27-30).

Guthrie (*M.*). — Description d'un nouveau thermostat. (30-31; 116-125).

Pickering (*E.-C.*). — Sur l'efficacité comparative des diverses formes du spectroscope. (39-43).

Douglas (*J.-C.*). — Expérience d'optique. (43-46).

Wilde (*H.*). — Recherches expérimentales sur le magnétisme et l'électricité. 2e *Série*. (81-116).

Stoney (*G.-J.*). — Les mouvements intérieurs de gaz comparés aux mouvements ondulatoires de la lumière. (132-141).

Kirkman (*Th.-P.*). — Sur la résolution générale des équations algébriques. (169-174).

Stoney (*G.-J.*). — Sur l'expérience du cercueil de Mahomet. (188-192).

Rowley (*S.*). — Nouvelle théorie de la vision. (192-206).

Barrett (*W.-F.*). — Sur les sources d'erreur dans les déterminations de l'absorption de chaleur dans les liquides. (206-217).

Barrett (*W.-F.*). — Sur une méthode simple de représenter la combinaison de vibrations rectangulaires. (217-220).

Kirkman (*Th.-P.*). — Note sur la résolution des équations algébriques. (264-267).

Sylvester (*J.-J.*). — Note sur les développantes successives d'un cercle. (295-306; 459-466).

Walenn (*W.-H.*). — Sur l'unitation, nouvelle opération arithmétique. (346-348).

Cayley (*A.*). — Sur l'équation de Riccati. (348-351).

Cayley (*A.*). — Note sur la résolubilité des équations au moyen de radicaux. (386-387).

Gore (*G.*). — Sur la relation entre la tension mécanique du fer et l'induction électromagnétique. (446-447).

Stoney (*G.-J.*). — Sur les observations récentes de Physique solaire. (447-454).

Tome XXXVII; janvier-juin 1869.

Paget (*F.-A.*). — Sur une nouvelle forme d'aimant permanent. (18-20).

Newcomb (*S.*). — Sur la théorie de Hansen de la constitution physique de la Lune. (32-35).

Edmonds (*R.*). — Sur des agitations extraordinaires de la mer, qui ne sont pas produites par les vents ou les marées. (35-40).

Wilde (*H.*). — Sur une propriété du courant magnéto-électrique de contrôler et de rendre synchrones les rotations des armatures d'un nombre de machines d'induction électromagnétique. (54-62).

Stewart (*B.*) et *Tait* (*P.-G.*). — Sur l'échauffement d'un disque par un mouvement rapide dans le vide. (97-98).

Norton (*W.-A.*). — Principes fondamentaux de la Physique moléculaire. (98-111).

Le Conte (*J.*). — Sur quelques phénomènes de la vision binoculaire. (131-140).

Tomlinson (*Ch.*). — Notices historiques sur quelques phénomènes relatifs à l'ébullition des liquides. (161-174).

Bayma (*J.*). — Principes fondamentaux de la Physique moléculaire. (182-188; 275-287; 348-358; 431-442).

Moon (*R.*). — Sur la théorie du son. (189-200).

Vaughan (*D.*). — Les effets séculaires de l'action des marées. (216-225).

Sylvester (*J.-J.*). — Histoire d'une équation aux différences du second ordre. (225-227).

Tyndall (*J.*). — Sur la théorie cométaire. (241-245).

Haidinger (*W. v.*). — Remarques sur les phénomènes lumineux, thermiques et acoustiques qui accompagnent la chute des météorites. (246-264).

Meyer (*O.-E.*). — Nouvelles remarques sur l'explication des expériences de *Stewart* et *Tait* sur l'échauffement d'un disque tournant dans le vide. (287-289).

Ball (*R.*). — Expériences de cours pour exposer les lois du mouvement. (332-339).

Moseley (*H.*). — Impossibilité mécanique de la descente des glaciers par leur poids seulement. (363-370).

Moseley (*H.*). — Sur le mouvement uniforme d'un fluide imparfait. (370-373).

Sylvester (*J.-J.*). — Note sur une nouvelle fraction continue applicable à la quadrature du cercle. (373-375).

Sylvester (*J.-J.*). — Sur deux résultantes remarquables, provenant de la théorie des ondes logarithmiques composées rectifiables. (375-382).

Huggins (*W.*). — Sur quelques observations spectrales des comètes. (456-460).

Tome XXXVIII; juillet-décembre 1869.

Strutt (*J.-W.*). — Sur quelques phénomènes électromagnétiques, dans leur liaison avec la théorie dynamique. (1-15).

Edmonds (*Th.-R.*). — Sur la force vitale d'après l'âge et la « English Life Table ». (18-33).

Norton (*W.-A.*). — Principes fondamentaux de la Physique moléculaire. (34-41; 208-214).

Challis. — Note sur la théorie hydrodynamique du magnétisme. (42-51).

Haidinger. — Sur la polarisation de la lumière dans l'air mélangé de vapeur d'eau. (54-56).

Moseley (*H.*). — Sur la descente d'un corps solide sur un plan incliné, quand il est soumis à des alternances de température. (99-118).

Hutton (*F.-W.*). — Sur les principes mécaniques renfermés dans le vol de l'albatros. (130-136).

Leconte (*J.*). — Sur quelques phénomènes de vision binoculaire (*suite*). (179-204).

Tomlinson (*Ch.*). — Sur la formation des bulles de gaz et de vapeur dans les liquides. (204-206).

Tomlinson (*Ch.*). — De l'action supposée de la lumière sur la combustion. (217-220).

Croll (*J.*). — Sur l'opinion que l'hémisphère austral perd par la radiation plus de chaleur que l'hémisphère boréal, et sur l'influence supposée que cette différence exerce sur le climat. (220-229).

Watts (*W.-M.*). — Sur les spectres de carbone. (249-263).

Challis. — Comparaison d'une théorie de la dispersion de la lumière d'après la théorie des ondulations avec les déterminations faites par *Ditscheiner* des longueurs d'onde et des indices de réfraction correspondants. (268-280).

Pickering (*E.-C.*). — Observations de la couronne pendant l'éclipse totale du 7 août 1869. (281-284).

Herwig (*H.*). — Recherches sur la manière dont les vapeurs se conforment aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac. (284-308).

Aldis (*J.-S.*). — Sur l'hypothèse nébulaire. (308-309).

Herschel (lieut. *J.*). — Sur la partie du Rapport de l'Astronome au Gouvernement de Madras sur l'éclipse d'août 1868, qui rend compte de ses observations spectroscopiques. (338-340).

Bridgman (*W.-Kencely*). — Théorie de la pile voltaïque. (377-382).

Tomlinson (*Ch.*). — Sur les mouvements du camphre à la surface de l'eau. (409-424).

Preece (*W.-H.*). — Le parallélogramme des forces. (428-430).

Warren (*T.-T.-P.-B*). — Sur l'électrification. (441-444).

Tome XXXIX; janvier-juin 1870.

Moseley (*H.*). — Sur les propriétés mécaniques de la glace. (1-8; 1 pl.).

Templeton (*R.*). — Remarques suggérées par l'article de M. Douglas sur un nouvel optomètre. (9-12).

Winter (*G.-K.*). — Observations de la couronne pendant l'éclipse totale du 7 août 1869. (17).

Challis. — Théorie mécanique des marées. (18-32).

Tomlinson (*Ch.*). — Sur les mouvements de certains liquides à la surface de l'eau. (32-48).

Abbott (*T.-K.*). — Note sur quelques propositions de la théorie des marées. (49-52).

Croll (*J.*). — Sur les courants de l'Océan. (81-106, et 180-194).

1re *Partie* : Courants de l'Océan dans leur relation avec la distribution de la chaleur sur le globe. 2e *Partie* : Courants de l'Océan dans leur relation avec la théorie physique des changements séculaires de climat.

Ball (*R.-St.*). — Note sur une démonstration élémentaire d'un théorème de Lagrange. (107-108).

Winter (*G.-K.*). — Sur la détermination des dimensions d'un fil qui, enroulé autour d'un galvanomètre ou d'un électro-aimant, produira l'effet magnétique maximum dans un circuit de résistance intérieure donnée, en ayant égard à l'espace occupé par la soie ou toute autre substance servant à isoler les unes des autres les diverses circonvolutions. (109-114).

Warren (*Th.-T.-P.-B.*). — Note sur une formule du professeur Fleeming Jenkins. (169-173).

Garrett (*E.-L.*). — Difficultés populaires dans la théorie des marées. (174-180).

Cockle (*sir J.*). — Sur les criticoïdes. (201-211).

Rankine (*W.-J.-M.*). — Sur l'énergie thermale des tourbillons moléculaires. (211-221).

Soret (*L.*). — Sur l'illumination et la polarisation dans les substances transparentes. (221-229).

Moseley (*H.*). — Sur la « structure veinée » de la glace des glaciers. (241-248; 1 pl.).

Challis. — Nouvelle discussion de la théorie mathématique des marées de l'Océan. (260-275).

Tyndall (*J.*). — Sur la polarisation de la chaleur. (280-282).

Guthrie (*F.*). — Sur $\sqrt{-1}$. (282-286).

Heath (*J.-M.*). — Sur les circonstances qui déterminent la variation de température dans un gaz parfait pendant la dilatation et la condensation. (288-290).

Silliman (*B.*) et *Wurtz* (*H.*). — Étude des températures des flammes dans leurs relations avec la composition et l'intensité lumineuse. (290-298).

Watts (*W.-M.*). — Note sur la température et les pouvoirs échauffants des flammes. (337-338).

Heath (*J.-M.*). — Sur la théorie de la variation de température dans les gaz par suite des changements de densité et de pression. (347-348).

Clarke (*A.-R.*). — Sur la marche des lignes géodésiques à la surface de la Terre. (352-363).

Aldis (*T.-S.*). — La théorie d'Algol d'après Goodricke. (363-364).

Davis (*A.-S.*). — Théorie des nébuleuses et des comètes. (401-409).

Heath (*J.-M.*). — Sur la Thermodynamique. (421-423).

Tupper (*J.-L.*). — Sur une illusion d'optique. (423-428).

Strutt (*J.-W.*). — Sur une expérience électromagnétique. (428-435).

Challis. — Supplément à une théorie mathématique des marées de l'Océan. (435-437).

Tome XL; juillet-décembre 1870.

Pratt. — Réplique à l'objection de M. Delaunay contre la méthode de M. Hopkins pour déterminer l'épaisseur de la croûte terrestre d'après la précession et la nutation de l'axe terrestre. (10-14).

Davis (*A.-S.*). — Sur une cause possible de la raie brillante observée par M. Ångström dans le spectre de l'aurore boréale. (33-34).

Moon (*R.*). — Sur la résolution des équations linéaires aux différentielles partielles du second ordre, renfermant deux variables indépendantes. (35-41).

Heath (*J.-M.*). — Sur la possibilité d'échange mutuel entre la chaleur et l'action mécanique. (51-52).

Rankine (*W.-J.-M.*). — Sur la Thermodynamique. (103-104).

Gore (*G.*). — Sur les mouvements moléculaires et les changements magnétiques dans le fer, etc., à diverses températures. (170-177).

Gibbs (*W.*). — Sur la mesure des longueurs d'onde au moyen des indices de réfraction. (177-183).

Davis (*A.-S.*). — Sur le caractère probable des orbites cométaires. (183-190).

Strutt (*J.-W.*). — Remarques sur un Mémoire du Dr Sondhauss. (211-217).

Sur les sons des tubes échauffés et les vibrations aériennes dans des tuyaux de différentes formes. (*Annales de Poggendorff*, t. LXXXI).

Heath (*J.-M.*). — Sur les principes de la Thermodynamique. (218-220 et 429-434).

Croll (*J.*). — Sur les courants de l'Océan. (233-259).

3e *Partie* : Sur la cause physique des courants de l'Océan.

Rankine (*W.-J.-M.*). — Sur l'accélération et le retard thermodynamiques des courants. (288-291).

Rankine (*W.-J.-M.*). — Sur la Thermodynamique. (291-293).

Cayley (*A.*). — Sur les lignes géodésiques d'un sphéroïde aplati. (329-340).

Douglas (*J.-C.*). — Réplique à un article de M. Templeton. (340-344).

Phil. Mag., t. XXXIX. Voir ci-dessus, p. 136.

Guthrie (*F.*). — Sur le mouvement d'approche causé par la vibration. (345-354; 1 pl.).

Maxwell (*J.-Cl.*). — Sur les collines et les vallées. (421-427).

Moon (*R.*). — Sur l'équation des coefficients de Laplace. (434-440).

Warren (*Th.-T.-P.-B.*). — Sur une nouvelle méthode de détermination des résistances (électriques). (441-444).

Tome XLI, janvier-juin 1871.

Davis (*A.-S.*). — Sur le caractère probable des orbites cométaires (*suite*). (44-53).

Proctor (*R.-A.*). — Note sur la lumière zodiacale. (53-62).

Rankine (*W.-J.-M.*). — Sur l'hypothèse des mouvements moléculaires en Thermodynamique. (62-66).

Strutt (*J.-W.*). — Sur la lumière du ciel, sa polarisation et sa couleur. (107-120 et 274-279).

Abbott (*T.-K.*). — Addition à une Note sur la théorie des marées (120-122).

Heath (*J.-M.*). — Sur la condensation athermogénique. (127-129).

Merz (*S.*). — Sur un petit spectroscope stellaire universel. (129-132; 1 pl.).

Birt (*W.-R.*). — Sur quelques recherches récentes, relatives à l'activité lunaire. (183-189; 2 pl.).

Adams (*W.-G.*). — Déterminer le degré de polarisation dans le cas d'un rayon de lumière ordinaire tombant obliquement sur un faisceau de plaques parallèles et y étant réfléchi. (205-214).

Norton (*W.-A.*). — Sur la couronne vue dans les éclipses totales de Soleil. (225-236).

Le Conte (*J.*). — Sur une illusion d'optique. (266-269).

Challis. — Sur l'attraction causée par les vibrations de l'air. (279-286).

Cayley (*A.*). — Sur la représentation plane d'une figure solide. (286-290).

Stoney (*G.-J.*). — Sur la cause de l'interruption des spectres des gaz. (291-296).

Vincent (*Ch.-W.*). — Sur les relations entre le magnétisme et l'électricité statique. (297-302 et 390-392).

Laughton (*J.-K.*). — Sur les différences et les fluctuations barométriques. (325-350 et 429-442).

Hall (*M.*). — Sur la détermination de la hauteur de l'atmosphère. (353-358).

Cayley (*A.*). — Sur l'attraction d'une ligne droite terminée. (358-360).

Cockle (sir *J.*). — Sur les criticoïdes fractionnaires. (360-368).

Challis. — Sur une théorie de l'action mutuelle entre les corps électrisés et aimantés. (368-369).

Guthrie (*F.*). — Sur le rapprochement causé par la vibration. (405-429).

Strutt (*J.-W.*). — Sur la dissémination de la lumière par les petites particules. (447-454).

Vaughan (*D.*). — Sur les planètes secondaires dans de petites orbites. (508-519).

Strutt (*J.-W.*). — Sur la double réfraction. (519-528).

Cayley (*A.*). — Note sur les lignes géodésiques d'un ellipsoïde. (534-535).

Tome XLII; juillet-décembre 1871.

Colding (*L.-A.*). — Sur les puissances universelles de la nature et leur dépendance mutuelle. (1-20).

Schwendler (*L.*). — Arrangement pour la décharge de longues lignes télégraphiques sur terre. (20-27).

Challis. — Sur l'application d'une nouvelle intégration des équations différentielles du second ordre à quelques problèmes non résolus du Calcul des variations. (28-40).

Stoney (*G.-J.*). — Étude sur la cause de l'interruption des spectres des gaz. 2ᵉ *Partie.* (41-52).

Preston (*S.-T.*). — Sur la transformation directe d'une force dynamique en électricité. (53-55).

Norton (*W.-A.*). — Sur la constitution physique du Soleil. (55-67).

Strutt (*J.-W.*). — Sur la réflexion de la lumière par une substance transparente. (81-97).

Pratt (*J.-H.*). — Sur la méthode de M. Hopkins pour déterminer l'épaisseur de la croûte terrestre. (90-103).

Schwendler (*L.*). — Sur une méthode pratique pour découvrir les mauvais isolateurs dans les lignes télégraphiques. (103-107).

Airy (*G.-B.*). — Recherche de la loi de progression de l'exactitude dans les procédés usuels pour former une surface plane. (107-111).

Ball (*R.-S.*). — Description d'un modèle d'une surface cubique

conoïde, appelée le *cylindroïde*, qui se présente dans la théorie de la liberté géométrique d'un corps rigide. (181-183).

Moseley (*H.*). — Sur l'écoulement continu d'un liquide. (184-197 et 349-362).

Cayley (*A.*). — Sur une intégration supposée nouvelle d'équations différentielles du second ordre. (197-199).

Everett (*J.-D.*). — Sur la circulation et la distribution générales de l'atmosphère. (199-208).

Ball (*R.-S.*). — Note sur des expériences sur la résistance de l'air au mouvement des tourbillons annulaires. (208-210).

Croll (*J.*). — Sur les courants de l'Océan. (241-280).

3[e] *Partie.* Sur la cause physique des courants de l'Océan. (*Suite*).

Pratt (*J.-H.*). — La croûte solide de la Terre ne peut pas être mince. (280-290).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une classe d'intégrales définies. (294-302 et 421-436).

Challis. — Sur une nouvelle méthode pour résoudre quelques problèmes du Calcul des variations, en réponse au professeur Cayley. (302-304).

Cayley (*A.*). — Sur le *pentagramma mirificum* de Gauss. (311-312).

Gordon (*J.-E.-H.*) et *Newall* (*W.*). — Effet de petites variations de température sur les aimants d'acier. (335-340).

Hudson (*H.*). — Sur la théorie de l'équilibre d'échange. (341-344).

Thomson (sir *W.*). — Solutions et observations hydrostatiques. (362-377).

I et II. Sur le mouvement des solides libres dans un liquide. — III et IV. L'influence du vent sur les vagues dans l'eau, dans la supposition d'un frottement nul. — V. Les vagues sous l'action motrice de la gravité et de la cohésion, sans vent.

Young (*C.-A.*). — Catalogue préliminaire des raies brillantes dans le spectre de la chromosphère. (377-380).

Pendlebury (*R.*). — Note sur quelques intégrales définies. (437-440).

Todhunter (*I.*). — Sur un problème du Calcul des variations. (440-441).

Strutt (*J.-W.*). — Sur une correction souvent nécessaire dans les courbes qui doivent représenter la liaison entre deux grandeurs physiques. (441-444).

Thomson (sir *W.*). — Équilibre de la vapeur sur la surface courbe d'un liquide. (448-452).

Tome XLIII; janvier-juin 1872.

Abbott (*T.-K.*). — Nouvelles Notes sur la théorie des marées. (20-23).

Challis. — Sur la théorie mathématique des marées atmosphériques. (24-32).

Challis. — Sur les solutions de trois problèmes du Calcul des variations, en réponse à M. Todhunter. (52-54).

Moon (*R.*). — Sur un cas simple de résonnance. (99-103).

Clausius (*R.*). — Contribution à l'histoire de la théorie mécanique de la chaleur. (106-115).

Pell (*M.-B.*). — Sur la constitution de la matière. (161-185).

Winter (*G.-K.*). — Sur l'essai de la résistance métallique des fils télégraphiques ou des câbles influencés par les courants terrestres. (186-191; 1 pl.).

Winter (*G.-K.*). — Observations de la couronne vue pendant l'éclipse du 11-12 décembre 1871. (191-194; 1 pl.).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Remarques sur certaines parties de la démonstration de la méthode des moindres carrés donnée par Laplace. (194-201).

Moon (*R.*). — Sur la résonnance et sur les circonstances dans lesquelles un changement de phase accompagne la réflexion. (201-205).

Mayer (*A.-M.*). — Expériences d'acoustique, montrant que la translation d'un corps vibrant a pour effet de donner une lon-

gueur d'onde différente de celle que produirait le même corps vibrant en repos. (278-281).

Challis. — Sur la théorie de l'aberration de la lumière. (289-295).

Cockle (sir *J.*). — Sur les hyperdistributifs. (300-305).

Strutt (*J.-W.*). — Sur la réflexion et la réfraction de la lumière par une substance d'une grande opacité. (321-338).

Tait (*P.-G.*). — Réponse au professeur Clausius. (338).

Szily (*C.*). — Sur le principe de Hamilton et la seconde proposition de la théorie mécanique de la chaleur. (339-343).

Young (*C.-A.*). — Note sur la vision récurrente. (343-345).

Cayley (*A.*). — Sur un mandrin bicyclique. (365-367).

Challis. — Nouvelle discussion de la théorie hydrodynamique du magnétisme. (401-427).

Sharpe (*S.*). — Sur la Lune vue à l'œil nu. (427-428).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les relations entre les intégrales particulières dans la solution de l'équation de Riccati par Cayley. (433-438).

Moon (*R.*). — Sur la manière dont les instruments à cordes donnent lieu à des ondulations sonores dans l'atmosphère ambiante. (439-442).

Clausius (*R.*). — Sur les objections élevées par M. Tait contre mon exposition de la théorie mécanique de la chaleur. (443-446).

Tait (*P.-G.*). — Sur l'histoire de la seconde loi de la Thermodynamique, en réponse à M. Clausius. (516-518).

Tome XLIV; juillet-décembre 1872.

Croll (*J.*). — Qu'est-ce qui détermine le mouvement moléculaire? Problème fondamental de la Nature. (1-25).

Moseley (*H.*). — Sur l'écoulement continu d'un liquide (*suite*). (30-56).

Taylor (*S.*). — Sur les variations de ton dans les battements. (56-64).

Strutt (*J.-W.*). — Sur les idées de M. Moon relativement à la pression des gaz. (64-65).

Cayley (*A.*). — Sur un mandrin bicyclique. (65-67).

Moon (*R.*). — Réponse à quelques remarques de M. J.-W. Strutt sur la pression des gaz. (101-103).

Clausius (*R.*). — Correction nécessaire à l'une des remarques de M. Tait. (117).

Shaler (*N.-S.*). — La lumière terrestre sur la Lune. (123-125).

Birt (*W.-R.*). — Contribution à la connaissance des ondes atmosphériques. (125-138).

Schwendler (*L.*). — Sur les galvanomètres différentiels. (161-170).

Challis. — Sur la théorie hydrodynamique des forces attractives et répulsives. (189-210).

Hudson (*H.*). — Sur la théorie ondulatoire de la lumière, de la chaleur et de l'électricité. (210-219).

Strutt (*J.-W.*). — Sur la loi de la pression des gaz. (219-223).

Weber (*H.-F.*). — Sur la chaleur spécifique du carbone. (251-257).

Mayer (*A.-M.*). — Sur une méthode précise pour suivre la marche et déterminer les limites d'une onde de chaleur conduite. (257-261).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Notice relative à quelques faits nouveaux de l'histoire des premiers temps des Tables logarithmiques. (291-303).

Moon (*R.*). — Sur la définition de l'intensité dans les théories de la lumière et du son. (304-337).

Mayer (*A.-M.*). — Sur une méthode pour découvrir les phases de vibration dans l'air entourant un corps résonnant, et pour mesurer ainsi directement dans l'air vibrant les longueurs de ses ondes et étudier la forme de la surface de l'onde. (321-327).

Strutt (*J.-W.*). — Note sur les fonctions de Bessel. (328-344).

Clausius (*R.*). — Sur la liaison de la seconde proposition de la théorie mécanique de la chaleur avec le principe de Hamilton. (3[illegible]

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur une détermination de la relation entre l'énergie et l'intensité apparente des sons de différentes hauteurs. (381-387).

Winter (*G.-K.*). — Sur la relation que la résistance intérieure de la batterie et la conductibilité du fil ont avec la force électromagnétique maximum d'une hélice électromagnétique. (414-417).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Remarques supplémentaires sur quelques anciennes Tables de logarithmes. (500-506).

Davis (*A.-S.*). — Sur la vision récurrente. (526-530).

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam (2e série). In-8 (¹).

Tome VIII; 1874.

De Jong (*J.*). — Sur l'intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre. (28-56).

Voir *Bulletin*, t. V, p. 281, et t. VIII, p. 184.

Bierens de Haan (*D.*) — Matériaux pour l'histoire de Sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. — I. Introduction des logarithmes de Briggs dans leur patrie par des Néerlandais. (57-81). — II. Meindert Semeyns. (82-99). — III. Adriaan Vlack et ses Tables de logarithmes. (163-199). — IV. Essai d'une liste des Tables de logarithmes hollandaises. (200-203). — V. Prédécesseurs de l'édition stéréotype des Tables de logarithmes. (204-223).

Voir *Bulletin*. t. VII, p. 121, et t. VI, p. 253.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur la théorie mécanique du son. (133-149).

(¹) Voir *Bulletin*, I, 186; VIII, 126.

Baumhauer (*E.-H. von*). — Sur un météorographe universel pour les observatoires solitaires. (255-281).

Tideman (*B.-J.*). — Sur la résistance et la propulsion des navires. (319-366, 1 pl.).

Tome IX; 1875.

Bierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des Sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. — VI. Les logarithmes de *Adolph-Frederik Marci*. La Société des Arithméticiens à Hambourg. (1-36). — VII. Simon van der Eycke. (90-112). — Ludolph van Ceulen. (322-369).

Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 160 et 260.

Cohen Stuart (*L.*) et *Baehr* (*G.-F.-W.*). — Rapport sur un Mémoire de M. Ch.-M. Schols, relatif à la correction des erreurs d'observation. (37-41).

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur la propagation libre du son. (75-89).

Oudemans (*C.-A.-C.*). — Sur une meilleure méthode pour faire les mesures héliométriques, à l'occasion d'un passage de Vénus sur le Soleil. (127-137, 1 pl.; fr.).

Buijs-Ballot (*C.-H.-D.*). — Encore quelques mots sur les changements de température suivant une période de $27^j,682 \pm 0^j,004$. (168-181).

Buijs-Ballot (*C.-H.-D.*). — La température moyenne pour chaque date de l'année au Helder, d'après des observations de trente années, et sa variabilité dans les Pays-Bas. (182-206, 2 tableaux).

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur les ondes sonores cylindriques. (229-237).

Cohen Stuart (*L.*). — Sur un cas de discontinuité. (238-242, 1 pl.).

Mees (*R.-A.*). — De l'influence du mouvement de la source des vibrations sur l'intensité des vibrations qu'elle envoie. (243-258, 1 pl.).

Bosscha (*J.*). — Sur l'équilibre d'une goutte entre deux plaques horizontales. (259-265).

Schols (*Ch.-M.*). — La formule d'interpolation de Tchebychef suivant la méthode des moindres carrés. (301-311).

Bleekrode (*J.*). — Recherches sur les machines électriques à plateaux d'ébène. (312-321).

Tome X; 1876.

Van der Berg (*F.-J.*). — Sur les écarts mutuels de la ligne géodésique et des sections normales planes correspondantes entre deux points voisins d'une surface courbe. (1-45, 1 pl.).

Dans les calculs des triangles tracés sur la surface terrestre, on prend souvent pour côtés les sections planes menées par la verticale d'un sommet et par un second sommet, au lieu de la ligne géodésique qui joint ces deux sommets. Bien que l'erreur commise soit peu considérable, il n'en importe pas moins de savoir l'apprécier. Tel est le but que se propose l'auteur, eu égard aux divers travaux auxquels cette question a déjà donné lieu.

Mees (*R.-A.*). — Recherches sur la théorie des flammes. (46-75).

Bierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des Sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. IX. W. Snellius, Ph. Lansbergen, Christ. Huyghens sur Ludolph van Ceulen. (161-179). — X. Cornelis van Nienrode. (180-208).

Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 160 et 260.

Buijs Ballot (*C.-H.-D.*). — Encore un mot sur l'influence des astéroïdes sur la température en mai et en février. (220-231).

Compte rendu de la Commission pour les préparatifs de l'observation du passage de Vénus sur les Rapports reçus de l'Inde néerlandaise, transmis par l'intermédiaire du Ministre de la Marine et des Colonies : 1° Des officiers de la Marine néerlandaise ; 2° des ingénieurs Metzger et Woldringh et de l'assistant Teunissen, tous du service géographique de l'Inde néerlandaise, concernant les observations de ce passage. (232-251, 1 tableau, 1 pl.).

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — Détermination de l'erreur des temps calculés du contact dans le passage de Vénus sur le Soleil, le 8 décembre 1874, d'après les observations méridiennes de Vénus. (252-272).

Bosscha (*J.*). — La Commission internationale du mètre et la Conférence diplomatique du mètre. (273-307; fr.).

Van der Waalls (*J.-D*). — Sur les nombres relatifs de chocs qu'éprouve une molécule, lorsqu'elle se meut à travers des molécules en mouvement ou à travers des molécules supposées en repos; et aussi sur l'influence des dimensions des molécules, suivant la direction du mouvement relatif, sur le nombre de ces chocs. (321-336).

Van der Waalls (*J.-D.*) — Sur le nombre des chocs et la distance moyenne du choc dans les mélanges gazeux. (337-348).

Korteweg (*D.-J*). — Sur le calcul de la distance moyenne du choc des molécules gazeuses, en ayant égard à toutes leurs dimensions. (349-362).

Korteweg (*D.-J.*). — Calcul de l'accroissement de la tension d'un gaz par suite des chocs des molécules. (363-370).

Grinwis (*C.-H.-C.*) — Sur l'absorption de la lumière suivant la théorie de Maxwell. (371-303).

VIERTELJAHRSSCHRIFT der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von der Schriftführern der Gesellschaft, A. Auwers [E. Schoenfeld] und A. Winnecke. Leipzig. In-8 (¹).

Tome VIII; 1873.

**Schwarz* (*L.*). — *Das vom Sinus*... Le terme de la flexion du cercle méridien de Dorpat, qui dépend du sinus du double de la distance zénithale. — Dorpat, 1871, in-4°, 51 p., 1 pl. [*W. Valentiner*]. (8-14).

**Walker* (Colonel *J.-T.*). — *Account of the*.... Compte rendu des opérations du grand relevé trigonométrique de l'Inde. T. I. Les étalons de mesure et les bases. Avec une description préli-

(¹) Voir *Bulletin*, I, 289; II, 321; III, 16; IX, 227. Les articles marqués d'un astérisque sont des analyses bibliographiques.

minaire des anciennes opérations du relevé, pendant la période 1800-1830. — Dehra Doon, 1870, in-4°, xxxv-104-334-60 p., 1 carte, 33 pl. [*F.-R. Helmert*]. (14-45).

* *Secchi* (le P.). — Observations des diamètres solaires; observations des protubérances. — Paris, 1872, *Comptes rendus*, 2e sem., n° 11, in-4°; fr. [*A. Wagner*]. (46-55).

* *Heis*. — *Neuer Himmelsatlas*. Nouvel Atlas céleste. — Cologne, 1872, in-8°, XII-177 p., 12 pl. [*Schönfeld*]. (55-71).

Communications sur l'observation des étoiles du ciel boréal. — I. Programme pour la publication des observations de zones et d'un Catalogue général. — II. Indications sur la distribution des observations. (75-79).

* *Vogel* (*H.-C.*). — *Beobachtungen....* Observations faites à l'Observatoire du Chambellan *von Bülow*, à Bothkamp. Fasc. I. Publié par le Dr *H.-C. Vogel*, astronome de l'Observatoire. — Leipzig, 1872, in-4°, 13 p., 7 pl. lith. (80-100).

* *Dembowski*. — *Ueber die Doppelsternmessungen....* Sur les mesures d'étoiles doubles du baron Dembowski. [*Otto Struve*]. (100-118).

* *Fuss* (*V.*). — *Beobachtungen....* Observations et études sur la réfraction astronomique dans le voisinage de l'horizon. (Mém. de l'Ac. imp. des Sc. de St-Pétersbourg, 7e série, t. XVIII, n° 3). [*Bruhns*]. (119-127).

* *Secchi* (le P. *A.*). — Le Soleil. — Paris, 1870, in-8°, 422 p. (127-145).

* *Schellen* (*H.*). — *Die Sonne*. Le Soleil. — Brunswick, 1872, in-8°, 852 p., 8 pl. color., etc. — [*Vogel*]. (146).

Compte rendu de la 5e assemblée générale de la Société Astronomique à Hambourg, 1873, août 20-22. (149-163).

Appendices. — I. Notice sur *Caspar-Gottfried Schweizer* (10 février 1816 — 6 juillet 1873). (163-169).

II. Sur la découverte de nouveaux mouvements propres; par le professeur *Argelander*. (170-193).

III. Comptes rendus de l'observation des étoiles du ciel boréal

jusqu'à la 9ᵉ grandeur : Poulkova (Bruhns), Dorpat (L. Schwarz), Helsingfors (A. Krueger), Bonn, Leide (H.-G. van de Sande Bakhuyzen), Cambridge (Graham et Adams), Leipzig (C. Bruhns), Neuchâtel (A. Hirsch). (193-218).

IV. Note sur les mouvements propres des nébuleuses; par *W. Huggins*. Angl. (218-221).

V. Sur les corrections à apporter aux ascensions droites des zones boréales de Bonn; par *Argelander*. (221-228).

VI. Étude sur la possibilité d'appliquer la photographie au collodion à l'observation du prochain passage de Vénus, avec des projets de disposition de quelques appareils destinés à cet objet; par *H. Vogel* et *O. Lohse*. (223-258).

Époques du maximum d'éclat des étoiles variables télescopiques entre + 80° et — 2° de déclinaison, en 1874. (274-275).

Éphéméride synchronistique des maxima et minima de la plupart des étoiles variables télescopiques connues pour 1874.

Rectifications et remarques relatives à l'*Atlas novus cœlestis* de *Heis*. (278-295).

Weis (*E.*). — Sur l'état de l'Astronomie pratique en Amérique. (296-321).

Tome IX; 1874.

Notice nécrologique sur *Martinus Hoek*. (1-4).

Notice nécrologique sur *Giambattista Donati*. (4-9).

Peters (*C.-H.-F.*). — Communication concernant les cartes célestes entreprises par lui. (10-15).

* Astronomical Observations and Researches made at Dunsink, the Observatory of Trinity College, Dublin. Part. II. — Dublin, 1873, in-4°, 107 p. — *Brünnow* (*Fr.*) : Nouvelles recherches sur la parallaxe des étoiles. (21-42).

* Memoirs of the Astronomical Society. Vol. XXXIX, Part. I et II, 1870-1871. — I. *Cayley* (*A.*) : Sur la construction graphique d'une éclipse de Soleil. 17 p., 1 pl. — II. *Sawitch* (*A.*) : Les variations de la pesanteur dans les provinces occidentales de l'Empire Russe. 11 p. — III. *Cayley* (*A.*) : Sur les lignes géo-

désiques d'un ellipsoïde. 23 p. — IV. *Cayley* (*A.*) : Seconde Partie d'un Mémoire sur le développement de la fonction perturbatrice dans les théories de la Lune et des planètes. 20 p. — V. *Glaisher* (*J.-W.-L.*) : Sur la loi de facilité des erreurs des observations, et sur la méthode des moindres carrés. 50 p. — [*Helmert*]. (42-55).

* *Martin* (*Th.-H.*). — Sur des instruments d'optique faussement attribués aux anciens par quelques savants modernes. (*Bullettino di Bibliogr.*, etc., t. IV, 165-238). — [*R.-W.*]. (55-57).

* *Beobachtungen*.... Ob erva ites à l'Observatoire du Chambellan *v. Bül* sc. II. Publié par le Dr *H.-C. Vogel*, astronome de l' ire. — Leipzig, 1873, in-4°. — [*F. Zöllner*]. (57-76).

I. Observations d'analyse spectrale. Spectres des étoiles fixes. Recherches spectroscopiques sur le Soleil. — II. Observations des planètes Jupiter, Vénus et Mercure.

Notice nécrologique sur *Heinrich-Christian-Friedrich Paschen*. (77-80).

Nouvelle détermination de positions moyennes des étoiles additionnelles (2e Catalogue du t. IV du *Vierteljahrsschrift*), d'après les observations de l'Observatoire de Poulkova. (80-88).

* *Mikrometrisk bestämning*.... Détermination micrométrique de 104 étoiles du groupe télescopique 20 *Vulpeculæ*, par le Dr *Herman Schultz*. Avec une carte. (*Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, t. XI, n° 3). (89-94).

* *Verzeichniss*.... Catalogue de 9412 étoiles équatoriales, entre — 3° et — 3° de déclinaison. 1866. — Catalogue de 6323 étoiles télescopiques entre — 3° et — 9° de déclinaison. 1869. — Catalogue de 4793 étoiles télescopiques, entre — 3° et — 9° de déclinaison. 1869. — Catalogue de 3571 étoiles télescopiques, entre — 9° et — 15° de déclinaison. 1871. — Catalogue de 4093 étoiles télescopiques, entre — 9° et — 15° de déclinaison. 1872. — Catalogue de 5563 étoiles télescopiques au Nord de — 15° et au Sud de — 15°. 1874. — Faisant partie des observations de zones de Munich, réduits au commencement de l'année 1850, et comparés aux observations de Lalande, Bessel, Rümker et Schjelle-

rup. Publiés aux frais de l'État par le Dr *J. Lamont.* — Munich, in-8°. — [*Fr. Argelander*]. (94-125).

*Publications à l'occasion du 400e anniversaire de la naissance de Copernic. — Monumenta Copernicana. Festgabe zum 19. Februar 1873 von *Leopold Prowe.* Berlin, 1873, gr. in-8°, VIII-164 p. — Spicilegium Copernicanum. Festschrift des historischen Vereins für Ermland zum 400. Geburtstage des ermländischen Domherrn Nicolaus Kopernikus. Herausgegeben von Dr *Franz Hipler.* Braunsberg, 1873, gr. in-8°, 376 p. — *Nicolai Copernici* Thorunensis de revolutionibus Orbium cælestium libri VI. Ex auctoris autographo recudi curavit Societas Copernicana Thorunensis. Accedit *Georgii Joachimi Rhetici* de libris Revolutionum narratio prima. — Thoruni, 1873, in-fol., XXX-494 p. (125-137).

**Dien* (*Ch.*). — Atlas céleste contenant plus de 100 000 étoiles et nébuleuses, dont la position est réduite au 1er janvier 1860 d'après les catalogues français et étrangers. Avec une Introduction par M. *Babinet.* — Paris, 2e tirage, 1869, in-fol. — [*Schönfeld*]. (137-147).

Époques du maximum d'éclat pour les étoiles variables télescopiques entre + 80° et — 2° de déclinaison, dans l'année 1875. (150-152).

Éphéméride synchronistique des maxima et minima de la plupart des étoiles variables télescopiques connues, pour 1875. (152-154).

* *Tsinger* (*N.*). — *Опредѣленie*.... Détermination du temps d'après les hauteurs correspondantes de diverses étoiles. — Saint-Pétersbourg, 1874. — [*Otto Struve*]. (155-172).

* *Gyldén* (*H.*). — *Antydningar*.... Remarques sur la régularité des mouvements des étoiles. (*Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandlingar,* 1871, n° 8). — Stockholm, 1872, in-8°, 14 p. — [*Herman Schultz*]. (173-182).

* *Newcomb* (*S.*). — *Considerations*.... Considérations sur les inégalités du moyen mouvement de la Lune. (*American Journal of Science and Arts,* sept. 1870). In-8°, 12 p. — *On the possible*.... Sur la variabilité possible de la rotation de la Terre autour de

son axe, telle qu'elle a été signalée par M. Glasenapp. (*Ibid.*, sept. 1874). In-8°, 10 p. — [*Sch.*]. (183-195).

* *Hoefer* (*F.*). — Histoire de l'Astronomie depuis ses origines jusqu'à nos jours. — Paris, 1873, in-12, 631 p. — [*R.-W.*]. (195-198).

* *Jordan* (*W.*). — *Deutscher*.... Calendrier géométrique allemand, avec des éphémérides astronomiques pour l'année 1875. — Stuttgart, in-12, 192 p. — [*A. Winnecke*]. (198-199).

* *Gyldén* (*H.*). — Recherches sur la rotation de la Terre (présentées à la Société Royale des Sciences d'Upsal, le 5 avril 1871). In-4°, 21 p. — [*Herman Schultz*]. (199-213).

* *Šafařik* (*A.*). — *Ueber die Sichtbarkeit*.... Sur la visibilité de l'hémisphère obscur de Vénus. (*Sitzungsberichte d. k. b. Gesellschaft zu Prag*, 18 juillet 1873). In-8°, 31 p. — [*A. Winnecke*]. (213-217).

* *Auwers* (*A.*). — *Ueber die Parallaxe*.... Sur la parallaxe de l'étoile 1830 Groombridge, d'après les observations de Johnson à l'héliomètre d'Oxford. (*Monatsberichte d. k. pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin*, août 1874). In-8°, 26 p. — [*A. Winnecke*]. (218-226).

* *Schönfeld* (*E.*). — *Untersuchungen*.... Recherches sur les variations d'éclat de l'étoile variable S du Cancer. (38. *Jahresbericht des Mannheimer Vereins für Naturkunde*, 1872). In-8°. 31 p. — [*A. Winnecke*]. (226-231).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Sur les cartes lunaires de Lohrmann et Schmidt. (232-236).

Nouvelles rectifications et remarques concernant l'*Atlas novus cælestis* de Heis. (236-252).

Schjellerup (*H.-C.-F.-C.*). — Deuxième Catalogue des étoiles rouges isolées, complété et prolongé jusqu'à la fin de l'année 1874. (252-287).

Tome X; 1875.

Tableau des découvertes de planètes et de comètes dans les années 1872 et 1873. (7-24).



* *Gyldén* (*H.*) : *Om en method....* Sur une méthode pour la détermination analytique des perturbations relatives des petites planètes. (*Öfversigt af K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar,* 1874, Stockholm). In-8°, 11 p. — *Backlund* (*J.-O.*) : *Beräkning...* Calcul des perturbations relatives de la planète (112) Iphigénie. (*Ibid.*). In-8°, 20 p.—[*Herman Schultz*]. (25-38).

* *Abbadie* (*Ant. d'*). — Géodésie d'Éthiopie ou triangulation d'une partie de la Haute-Éthiopie exécutée selon des méthodes nouvelles. Vérifiée et rédigée par *R. Radau.* — Paris, 1873, gr. in-4°. — [*W. Jordan*]. (39-50).

* *Berg* (*Fr.-W.*). — I. *Ueber die Bestimmung....* Sur la détermination de l'orbite d'une planète par trois observations complètes. Dissertation. Dorpat, 1871, in-8°, 26 p. — II. De Olbersii ad cometarum orbitarum determinationem methodo. Wilna, 1872, in-8°, 4 p. — III. *Beiträge....* Contributions à la théorie de la détermination des orbites. (Acad. de Saint-Pétersbourg, 1874). In-8°, 7 p. — [*T.*]. (50-56).

* *Fergola* (*E.*). — *Determinazione....* Nouvelle détermination de la latitude de l'Observatoire Royal de Capodimonte. — Naples, 1873, in-4°, 92 p. — [*A. Winnecke*]. (57-61).

* *Napiersky* (*A.-W.*). — *Die Polhöhe....* La hauteur du pôle à Mitau. In-4°, 18 p. [*Bruhns*]. (61-64).

* *Schultz* (*Herman*). — *Micrometrical....* Observations micrométriques de 500 nébuleuses. — Upsala, in-4°, 200 p., 1874. — [*J. Dreyer*]. (64-73).

* *Schönfeld* (*E.*). — *Zweiter....* Deuxième Catalogue d'étoiles variables, avec des Notes. (40. *Jahresbericht des Mannheimer Vereins für Naturkunde,* 1875). In-8°, 72 p. — [*A. Winnecke*]. (73-76).

Époques du maximum d'éclat des étoiles variables télescopiques entre + 80° et — 2° de déclinaison dans l'année 1876. (79-81).

Éphéméride synchronistique des maxima et minima de la plupart des étoiles variables télescopiques connues, pour 1876. — [*Sch.*]. (81-88).

* *Behrmann* (*C.*). — *Atlas des südlichen*.... Atlas du ciel étoilé austral. Représentation des étoiles visibles à l'œil nu entre le pôle sud et le 20e degré de déclinaison australe, selon leurs vraies grandeurs, prise immédiatement dans le ciel. 7 planches gravées sur acier, in-f° obl. Avec un Catalogue d'étoiles, in-8°, x-84 p. — Leipzig, 1874. — [*Herman Schultz*]. (89-111).

* *Helmert* (*F.-R.*). — *Der Sternhaufen*.... L'amas d'étoiles de l'Écu de Sobieski. — Hambourg, 1874, in-4°, 79 p., 2 cartes. Publication de l'Observatoire de Hambourg, n° 1. — [*Engelmann*]. (111-132).

Notice nécrologique sur *Peter-Andreas Hansen*. — [*W.-S.*]. (133-147).

Notice nécrologique sur *Friedrich-Wilhelm-August Argelander*. — [*Sch.*]. (150-178).

Notice nécrologique sur *Karl-Gustav Reuschle*. (178-182).

Tableau des découvertes de planètes et de comètes en 1874. — [*C. Bruhns*]. (182-191).

* *Results*.... Résultats des observations astronomiques faites à l'Observatoire Royal du cap de Bonne-Espérance, dans les années 1856, 1857, 1858, sous la direction de sir *Thomas Maclear*. Réduites et imprimées sous la direction de *E.-J. Stone*. — Capetown, 1871-1872. — Résultats des observations météorologiques, etc. — Capetown, 1871. — [*A. Wagner*]. (192-203).

* *Lindemann* (*E.*). — *Ueber Heiligkeitsbestimmungen*.... Détermination d'éclat des étoiles fixes au moyen du photomètre de Zöllner et par des estimations de grandeurs. (*Bull. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg*, t. V, 12-24 novembre 1874). In-8°, 40 p. — [*Sch.*]. (203-211).

* *Schrader* (*C.*). — *Ueber die Wirkung*.... Influence de la réfraction astronomique sur les observations au micromètre circulaire. Dissertation inaugurale. — Göttingen, 1874, in-8°, 25 p. de texte, et 25 tableaux. — [*Sch.*]. (211-215).

* *Albrecht* (*Th.*). — *Formeln*.... Formules et Tables auxiliaires pour les déterminations de positions géographiques, avec une

courte Introduction pratique. — Leipzig, 1873. — [*Wilhelm Schur*]. (216-227).

Compte rendu de la 6e assemblée générale de la Société Astronomique, à Leide, 1875, août 13-16 (229-250).

Appendices. — I. Comptes rendus sur l'observation des étoiles du ciel boréal jusqu'à la 9e grandeur. — Nikolaïef (L. Kortazzi), Leipzig (Bruhns), Cambridge (Angl.) (J.-C. Adams), Leide (H.-G. Van de Sande Bakhuyzen), Chicago (T.-H. Safford), Bonn (Hugo Seeliger), Cambridge (U.-S.) (William-A. Rogers), Helsingfors (A. Krueger), Christiania (Fearnley), Dorpat (H. Bruns), Kazan (M. Kowalski). (250-268).

II. Sur quelques nouvelles institutions astronomiques, se reliant à l'Observatoire de Berlin. — [*Förster*]. (268-279).

III. Nouvelle méthode d'interpolation; par *J.-J. Åstrand,* directeur de l'Observatoire de Bergen. (279-285).

IV. Sur la solution du problème de Kepler. — [*Hugo Gyldén*]. (285-296).

V. Statut de la Commission des zones. (296-297).

VI. Sur les observations de nébuleuses commencées à l'Observatoire de l'Université de Strasbourg. (247-304).

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT (¹).

Tome VI; 1876.

Diekmann (*J.*). — Les déterminants comme moyen d'instruction dans les Gymnases et les Realschulen. (P. 1-21, 124-137, 193-211).

Introduction. Multiplication d'expressions polynômes. — Chap. I. Déterminants. § 1. Définition des déterminants. § 2. Déterminants du premier, du deuxième, du troisième et du quatrième degré. — Chap. II. Théorèmes généraux sur les déterminants et les déterminants mineurs. § 3. Développement des propositions les plus importantes sur les déterminants et leur transformation. § 4. Des déterminants mi-

---

(¹) Voir *Bulletin*, III, 48; IV, 205; V, 169; VII, 93; VIII, 226.

neurs. § 5. Equations homogènes; résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues. § 6. Loi de la multiplication des déterminants. § 7. Comment on effectue la multiplication. § 8. Substitutions linéaires et invariants. 9. Résultants et discriminants.

Müller (*J.*). — Appareil à force centrifuge simplifié de Schleiermacher. (P. 34-37).

Bardey (*E.*). — *Stummer*. — *Erler*. — Les recueils de problèmes mathématiques doivent-ils ou non contenir les solutions? (P. 38-45, 225-227, 290-292).

Reidt. — *Spiellmann*. — *Günther* (*S.*). — Sur le pendule de Foucault. (P. 46-48, 441-443, 444-446).

Emsmann (*G.*) — *Scherling* (*Chr.*). — Exercices. (P. 48-50, 154-155).

Emsmann (*G.*). — *Funke*. — Sur les incorrections de langage dans l'enseignement mathématique. (P. 50-51, 450-461).

Schröder (*Th.*). — Sophismes mathématiques. (P. 51-52).

Stammer. — Remarques sur le prismatoïde et sur des démonstrations stéréométriques de Baltzer et de Ziegler. (P. 53-54).

Pick (*Ad.-Jos.*). — Développement de la notion de grandeurs opposées. (P. 111-123).

Günther (*S.*). — Remarques didactiques sur la théorie des déterminants. (P. 138-150).

Küstermann (*H.*). — Nouvel appareil d'enseignement pour l'explication de la polarisation de la lumière. (P. 151-153).

Fehrs. — Réfraction de la lumière sur une surface sphérique. (P. 155).

Fischer (*O.*). — Anonyme. — *Oppel*. — *Bardey* (*E.*). — *Stammer*. — *Müller*. — Faut-il dire : « Sept fois plus, douze fois moins »? (P. 212-219, 279-290, 382-384, 458-461).

Kober (*J.*). — *Kuckuck* (*A.*). — Abréviations des nouveaux noms de mesures. (P. 220-221, 385-386).

Rogner. — Sur l'usage de la virgule pour séparer les entiers des décimales. (P. 222-224).

Müller. — Adresse aux mathématiciens (P. 261-278).



Hoffmann (*J.-C.-V.*). — Sur l'organisation des Écoles Normales, spécialement pour l'enseignement des Sciences mathématiques et physiques. (P. 351-366).

Bauer (*K.-L.*). — Sur les images des miroirs et des lentilles sphériques. (P. 367-376).

Dieckmann (*J.*). — Sur la définition de la notion arithmétique « zéro ». (P. 377-381).

Wicorek-Wicorekewic. — Sur l'orthographie mathématique, géométrique. — 1° Quelle est la meilleure notation pour les angles d'un quadrilatère? 2° Quelle est la position la plus convenable pour les quadrants en coordonnées parallèles? (429-435).

Frank (*A.*). — Nouvelle méthode d'approximation pour la résolution des équations numériques. (436-440).

Erler. — Sur la signification des racines négatives des équations quadratiques. (447-450).

Reidt. — Sur la notion de *rapport*. (462-465).

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK; gegründet von J.-A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe ([1]).

Tome LIX; 1876.

August (*F.*). — Sur la connexité de certaines propositions relatives à des séries fermées de figures géométriques. (1-17).

Peschka (*G.-Ad.-V.*). — Construction des points d'intersection des droites avec les sections coniques. (18-38).

Mendthal. — Contributions à la résolution de quelques problèmes géométriques connus. (39-50).

Dostor (*G.*). — Propriétés nouvelles des polyèdres réguliers convexes. (51-58; fr.).

([1]) Voir *Bulletin*, I, 248, 279; III, 82, 373; IV, 278; VII, 112; VIII, 170; XI, 214.

Hoppe (*R.*). — Théorème sur la représentation conforme des surfaces sur des plans. (59-64).

Si l'on peut représenter analytiquement sur une surface réelle un groupe continu de lignes imaginaires dont l'élément d'arc est constamment nul, le problème de la représentation conforme de ces surfaces sur le plan sera également résolu.

Houël (*J.*), trad. par *F. Müller*. — Sur le rôle de l'expérience dans les sciences exactes. (65-75).

Frank (*A. v.*). — Les volumes du cylindre droit et du cône dans la Géométrie absolue. (76-82).

Hain (*E.*). — Remarque sur les coniques de symétrie d'un triangle. (83-86).

Hain (*E.*). — Relations d'un triangle avec une droite. (87-92).

Hain (*E.*). — Problème à résoudre. (93-97).

1. Propositions sur les triangles dont un côté est une moyenne (arithmétique, géométrique ou harmonique) entre les deux autres. — 2. Propositions sur les transversales qui divisent les côtés d'un triangle en trois parties égales. — 3. Propositions diverses sur les triangles.

Dobiciecki (*G.*). — Produit d'une série infinie. (98-100).

Thieme (*F.-E.*). — Hauteur du centre de gravité d'un tronc de pyramide, dont la densité varie progressivement de la base inférieure à la base supérieure. (101-103).

Külp. — Contribution à la mesure des forces électromotrices des sources de courants. — Sur le rapport entre l'intensité du courant d'un circuit et celle d'un seul élément. — Sur le rapport d'un élément à petite surface avec un circuit d'éléments à grande surface. — Sur la détermination de la résistance de conductibilité des métaux. — Sur la théorie du maximum d'intensité d'un courant. (103-112).

Ruths (*Ch.*). — Sur la dépendance entre le magnétisme et la dureté de l'acier. (113-129).

Günther (*S.*). — Sur le problème général de la décomposition des déterminants. (130-146).

Naegelsbach (*H.*). — Études sur la nouvelle méthode de Fürstenau pour la représentation et le calcul des racines des équations algébriques par des déterminants des coefficients. (147-192).

Bertram (*Th.*). — Contribution à la détermination du mouvement d'un point pesant sur des surfaces de rotation à axe vertical. (193-216).

1. Mouvement sur la surface de révolution $x^2+y^2-[f(z)]^2=0$. — 2. Mouvement sur le paraboloïde de révolution. — 3. Mouvement sur le cône de révolution.

Liebrecht (*Ed.*). — 1. Sur les équations cubiques. — 2. Sur quelques intégrales définies. (217-224).

Hoppe (*R.*). — Principes de la théorie des surfaces. (225-322).

I. Développement, d'après un principe général, des relations géométriques théoriquement importantes. — II. Lignes et systèmes de lignes particuliers sur les surfaces. III. — Espèces particulières de surfaces. — Conclusion.

Hain (*E.*). — Sur le cercle de Feuerbach. (323-328).

Ligowski. — Contribution aux quadratures mécaniques. (329-333).

Spitzer (*S.*). — Note sur les équations différentielles linéaires. (334-335).

Zahradnik (*K.*). — Contribution à la théorie de la cissoïde. (335-336).

Zahradnik (*K.*). — Théorie de la cardioïde. (337-350).

Voir *Archiv mathematiky a fysiky*, t. I, p. 25, et *Bulletin*, t. I (2ᵉ série), p. 170.

Greiner (*M.*). — Pôle et polaire du triangle. (351-374).

Dostor (*G.*). — Les polygones rayonnés et les polygones étoilés. (375-386).

Hoza (*F.*). — Contribution à la théorie des déterminants mineurs. (387-400).

Hoza (*F.*). — Sur les déterminants mineurs d'un déterminant adjoint. (401-403).

Hoza (*F.*). — Sur la multiplication de deux déterminants du $n^{\text{ième}}$ degré. (403-406).

Hoppe (*R.*). — Exemple de détermination d'une surface au moyen de l'indicatrice de la normale. (407-414).

Hain (*E.*). — Sur une classe de points de symétrie irrationnels d'un triangle. (415-419).

Tome LX; 1876-1877.

Brodersen (*Er.*). — Démonstration élémentaire d'un théorème d'optique. (107-108).

Greiner (*M.*). — Sur la théorie des coniques. (108-112).

Bender (*C.*). — Sur le mouvement oscillatoire d'un cylindre dont le centre de gravité est hors de l'axe de figure. (113-117).

L'axe étant horizontal, on écarte un peu l'appareil de sa position d'équilibre, et l'on propose de déterminer le mouvement.

Bender (*C.*). — Sur quelques relations de la courbe élastique avec les fonctions elliptiques, spécialement avec l'arc elliptique. (117-124).

Appell (*P.*). — Théorème général sur les courbes unicursales. (125-127; fr.).

Versluys (*J.*). — Résolution d'un système d'équations, dont une est du second degré, tandis que les autres sont linéaires. (128-137; fr.).

Deux équations à deux inconnues. — Trois équations à trois inconnues. — La courbe d'intersection d'une surface du second degré et d'un plan. — Quatre équations à quatre inconnues.

Siebel (*A.*). — Recherches sur les équations algébriques (5[e] Article). (138-158, 1 pl., 3 tableaux).

Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 181, et t. XI, p. 214 et 218.

Hoppe (*R.*). — Sur le roulement des surfaces les unes sur les autres. (159-177).

Le roulement les unes sur les autres des courbes planes, des cylindres ou des surfaces développables quelconques, se touchant le long des génératrices, est un mouvement avec contact sans glissement. Dans le roulement des surfaces quelconques, se touchant en un point, il y a encore une autre condition : c'est un mouvement avec contact et sans rotation autour de la normale. Le présent Mémoire est consacré au développement de ces conditions.

Greiner (*M.*). — Sur le quadrilatère inscrit au cercle. (178-184).

Hamburger. — Sur le problème de Pfaff. (185-214).

Parmi les méthodes proposées pour la solution de ce problème, celle de M. Natani (*Journal de Crelle*, t. 58) est la plus simple et la plus courte. Le Mémoire de cet auteur est toutefois d'une lecture assez difficile. M. Hamburger s'est proposé d'arriver aux résultats de M. Natani par une voie plus directe.

Mehmke (*R.*). — Propriétés analogues de la parabole plane et de la parabole sphérique. (215-216).

Liebrecht (*Ed.*). — Sur les racines rationnelles des équation biques sous forme rationnelle. (216-218).

Hoppe (*R.*). — Variation des axes principaux d'inertie. (221).

Januschke (*H.*). — Construction des axes de l'ellipse, consid comme courbe d'oscillation de Lissajous. (222-223).

Lukas (*Fr.*). — Problème élémentaire. (224).

Wolf (*W.*). — Sur le passage du courant électrique à travers calotte sphérique. ( ).

Čubr (*E.*). — le s continues ascendantes. (265-

Appell (*P.*). — r les courbes dont les tangentes partie d'un ites du premier ordre. (274-275;

Hoppe (*R.*). — Second e asymptotique d'une surface ré (276-289).

§ 1 Équation de conditi ; 2. Représentation de la surface en para asymptotiques. — § 3. Cas équation différentielle linéaire aux lign courbure. — § 4. Courbe que d'inflexion. — § 5. Directrice rectilig

Hain (*E.*). — Contributions à la théorie du triangle. (290-3

Hain (*E.*). — Notion du plan harmonique d'un point par rap à un tétraèdre. (302-304).

Hain (*E.*). — Remarque sur les points de symétrie du tétra (304-306).

Dostor (*G.*). — Propositions sur les corps de révolution de la métrie élémentaire. (307-335; fr.).

Ligowski. — Remarque sur les quadratures mécaniques. (336

Hoppe (*R.*). — Résolution d'une équation exponentielle s trique. (336).

Équation $x^y = y^x$.

Meissel (*E.*). — Contributions à la théorie des séries. (337-3

Rebout (*E.*). — Nombres entiers dont le cube est égal à la so de trois ou de quatre cubes entiers. (353-355; fr.).

Köpl (*K.*). — Construction des images sur les miroirs plans. (356-365).

Dostor (*G.*). — Méthode simple et rapide pour déterminer les lois du mouvement du pendule à petites oscillations. (366-368; fr.).

Dostor (*G.*). — Propriété trigonométrique du triangle rectangle, avec application en Astronomie au calcul de l'anomalie vraie en valeur (*sic*) de l'anomalie excentrique. (369-370; fr.).

Hoza (*F.*). — Lignes de points sur les surfaces courbes. (371-375).

Hoppe (*R.*). — Addition à la Théorie des courbes et des surfaces. (376-403).

A. Mouvement des trois plans accompagnants et du plan de base de la spirale. 1. Mouvement du plan normal. 2. Mouvement du plan osculateur. 3. Mouvement du plan rectifiant. 4. Mouvement du plan de la spirale.

B. Courbes accompagnantes. 1. Courbes accompagnantes tangentielles. 2. Courbes accompagnantes binormales. 3. Courbes accompagnantes normales principales. 4. Courbes accompagnantes rectifiantes.

C. Asymptotes.

D. Lignes asymptotiques sur les surfaces du second ordre.

Hain (*E.*). — Sur les rapports anharmoniques. (404-409).

Wasserschleben (*v.*). — Sur le contact des sections coniques. (410-414).

Gruber (*J.*). — Contribution à la théorie du maximum et du minimum. (415-435).

Heilermann. — La théorie du maximum et du minimum comme branche de l'enseignement mathématique dans les écoles supérieures. (436-444)

Dostor (*G.*). — Identité remarquable fournie par la quatrième puissance d'une somme de quatre nombres. (445).

Matthes (*C.-J.*). — Rayon du cercle tangent à trois cercles donnés. (445-446).

Engelbrecht (*E.*). — Théorème de planimétrie. (447-448).

VIERTELJAHRSSCHRIFT DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN ZÜRICH (¹).

19ᵉ Année; 1874.

Wolf (*R.*). — Mélanges astronomiques. (143-182).

Observations des taches solaires en 1873 et calcul des nombres relatifs pendant cette année; comparaison des observations de déclinaisons magnétiques faites à Prague, Christiania et Munich avec la nouvelle formule de l'auteur; Notes sur les observations de taches solaires faites par Pastorff de 1819 à 1834.

Meyer (*W.*). — Sur la découverte de Neptune. (226-242).

Schwarz (*H.-A.*). — Sur les surfaces d'aire minimum. (243-271).

Fliegner (*A.*). — Sur l'écoulement des fluides élastiques par suite d'une variation de pression. (272-294).

Meyer (*W.*). — Notice sur l'histoire de l'observation des étoiles doubles et sur l'histoire du calcul de leurs orbites; observations d'étoiles doubles faites en 1873 à Zurich; calcul de l'orbite de Σ634 ou Camelopardalis 19 Hev. (331-389).

Wolf (*R.*). — Catalogue des instruments et gravures de l'Observatoire de Zurich. (Suite). (398-413).

20ᵉ Année; 1875.

Fritz (*H.*). — Sur une variation à longue période dans le phénomène des aurores polaires. (158-173).

Cette période serait d'environ cinquante-cinq ans, soit 5 fois la période de variation des taches solaires.

Fiedler. — Notice sur les courbes planes algébriques qui forment des systèmes réciproques. (173-179).

Wolf (*R.*). — Sur la visibilité des étoiles dans les puits profonds. (179).

M. Wolf cite une expérience faite autrefois par M. F. Carpentier, qui a constaté que du fond d'un puits de 90 pieds, situé dans un village des environs de Magdebourg, on pouvait, par le beau temps, voir les étoiles en plein jour.

(¹) Voir *Bulletin*, IV, 50; V, 203; VII, 34; VIII, 269.

Herzog (*A.*). — Sur la détermination d'une classe spéciale de surfaces minima. (217-255).

Ces recherches sont relatives à des questions analogues à celles qui sont posées dans le problème suivant : « Déterminer par le calcul analytique une surface minimum telle qu'une courbe plane donnée soit sur cette surface la ligne du plus court chemin. »

Wolf (*R.*). — Mélanges astronomiques.

Observations des taches solaires en 1874 ; calcul des nombres relatifs et des variations magnétiques de l'année ; formule de la variation annuelle et mensuelle de la déclinaison à Milan.

Orelli (*J.*). — Sur la signification géométrique de la multiplication des nombres complexes. (443-457). G. R.

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX (¹).

Tome IX ; 1873.

Darboux (*G.*). — Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des imaginaires. (Suite). (1-280).

Voir *Bulletin*, t. V, p. 65 et 52.

Collins (*M.*). — Mélanges de Géométrie (2ᵉ Partie). (281-296, 1 pl. ; angl.).

Loquin (*A.*). — Tableau de tous les effets harmoniques de une à cinq notes inclusivement au nombre de 562, précédé d'une Table servant à trouver de suite la formule de composition de chaque accord, et suivi de Notes sur différents points d'harmonie. (297-328).

Bourget (*J.*). — Théorie mathématique des expériences acoustiques de Kundt. (329-343).

Ratheau (*A.*). — Analyse d'un Mémoire de M. le capitaine du Génie FRITSCH sur les dynamites. (345-357).

(¹) Voir *Bulletin*, t. V, p. 60.

De Tilly (*J.-M.*). — Notice sur deux Traités récents de Balistique et sur l'état actuel de cette science. (359-387).

Les deux Ouvrages en question sont: 1° le *Traité de Balistique extérieure* de M. le général N. Mayevski; 2° un travail inséré dans le tome I des *Mémoires scientifiques* publiés par M. le comte P. de St.-Robert; Turin, 1872.

Abria. — Note sur la détermination de la section principale d'un cristal biréfringent taillé sous la forme d'un prisme. (499-509).

Tome X; 1875.

Dupuy (*L.*). — Exposition de la méthode de Hansen relative au calcul des perturbations des petites planètes. (1-231).

Ce Mémoire contient une exposition de la méthode donnée par Hansen dans son grand travail intitulé: *Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten*, imprimé dans les *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, t. V, VI et VII. M. Dupuy a simplifié en plusieurs points les calculs de Hansen, d'abord en introduisant, à l'exemple de Cauchy, les exponentielles imaginaires au lieu des sinus et cosinus, ensuite en démontrant par la Géométrie d'une manière très-directe les formules fondamentales que Hansen avait tirées de calculs assez pénibles. Il s'est d'ailleurs attaché à conserver autant que possible les notations de Hansen, pour faciliter la lecture des travaux publiés sur les méthodes de l'illustre astronome. Les personnes qui voudront se mettre au courant des nouvelles méthodes adoptées aujourd'hui dans la Mécanique céleste ne pourront que remercier M. Dupuy d'avoir ainsi abrégé leur travail.

Laisant (*C.-A.*). — Essai sur les fonctions hyperboliques. (233-328).

Dans ce Mémoire, l'auteur expose les propriétés de ces combinaisons d'exponentielles réelles, qui diffèrent des fonctions trigonométriques par le simple changement de $x\sqrt{-1}$ en x. Après avoir établi les formules relatives aux fonctions hyperboliques et correspondantes aux formules goniométriques connues, il indique une extension applicable à la fois aux deux systèmes de fonctions, et qui reviennent à remplacer les coordonnées d'un cercle ou d'une hyperbole équilatère par celles d'une ellipse ou d'une hyperbole quelconque; il indique quelques usages de cette extension. Il termine par diverses applications des fonctions hyperboliques à l'Algèbre, à la Géométrie, à la Mécanique et à l'Astronomie.

Weyr (*Em.*). — Principes d'une théorie des systèmes symétriques d'éléments. (329-354).

Ce Mémoire se compose de trois Parties. Dans la première, l'auteur expose les principes de la loi de correspondance entre deux objets géométriques unicursaux, c'est-à-dire entre deux systèmes simplement infinis dont les éléments peuvent se déterminer complétement par les valeurs d'un seul paramètre. La seconde Partie traite des systèmes symétriques de degré n, qui sont un cas spécial de deux systèmes multiformes (suivant n). La troisième Partie est consacrée aux théorèmes de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques, lesquels sont des conséquences immédiates des principes établis précédemment.

Abria. — Sur un moyen de reconnaître l'image ordinaire d'un biréfringent uniaxe taillé sous la forme d'un prisme, dans le cas de la réflexion totale. (443-446).

Tome I (2e série); 1876.

Hoüel (*J.*). — Théorie élémentaire des Quantités complexes. *Quatrième Partie :* Applications géométriques de la Théorie des Quantités complexes. Éléments de la Théorie des Quaternions. (1-301).

Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 9.

Ordinaire de Lacolonge (*L.*). — Mémoire sur les étuves à farine, leur théorie et leur construction. (303-384, 1 pl.).

Laisant (*C.-A.*). — Note sur le planimètre polaire de M. Amsler. (385-398).

Laisant (*C.-A.*). — Théorèmes sur les nombres premiers. (399).

Le nombre premier impair P étant décomposé en une partie paire p et en une partie impaire i : 1° le produit $p^p . i^i \equiv i$ (mod. P); 2° le produit $p^i . i^p \equiv p$ (mod. P).

Laisant (*C.-A.*). — Théorèmes sur les nombres. (400-402).

Laisant (*C.-A.*). — Sur un problème d'Arithmétique. (403-411).

Étant donné le produit de deux nombres formés avec les mêmes chiffres disposés dans l'ordre inverse, retrouver l'un ou l'autre des deux facteurs.

Abria. — Théorie élémentaire du potentiel électrique. (413-440).

L'auteur donne de cette théorie une exposition fondée sur les calculs les plus simples, et susceptible d'être introduite dans l'enseignement secondaire.

Tannery (*P.*). — Note sur le système astronomique d'Eudoxe. (441-449).

M. Tannery expose à l'aide du langage algébrique moderne la remarquable restitution du système d'Eudoxe, donnée par M. Schiaparelli. (*Le sfere omocentriche di Eudosso, di Calippo e di Aristotele;* Milan, 1875).

ARCHIV MATHEMATIKY A FYSIKY, kterýž vydává Jednota českých mathematyků v Praze a rediguje stálý tajemník Dr. Emil Weyr (¹).

Tome I; 1875-1876.

Weyr (*Em.*). — Principes d'une théorie des systèmes symétriques d'éléments. (1-24; fr.).

Ce travail avait déjà paru dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (t. X, p. 329-354). Voir *Bulletin*, t. I (2ᵉ série), p. 168.

Zahradnik (*K.*). — Théorie de la cardioïde. (25-40; boh.) (²).

Cette courbe unicursale peut être représentée en prenant pour paramètre variable le rayon d'un cercle touchant la courbe en son point de rebroussement et la coupant en un seul autre point, dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles de ce paramètre. De cette représentation on déduit facilement les deux relations qui ont lieu entre les paramètres de quatre points en ligne droite; on obtient de même les équations de la tangente, des asymptotes et de la normale, la classe de la cardioïde et celle de sa développée: ces deux nombres sont chacun $= 3$. La développée est une autre cardioïde, dont les dimensions sont le tiers de celles de la première. On étudie les tangentes *associées*, c'est-à-dire les couples de tangentes menées aux deux points où la courbe est coupée par une autre tangente. Tout cercle coupe la cardioïde en quatre points dont la somme des paramètres $= 0$. Expression de l'arc de la cardioïde, de son aire, etc.

Salaba (*A.*). — Addition au Mémoire précédent. (40-42; boh.).

Weyr (*Ed.*). — Quelques remarques relatives aux séries arithmétiques et récurrentes. (42-52; boh.).

Résolution de la question suivante: « Quelles sont les séries récurrentes dont les coefficients forment une série arithmétique? » Démonstration de ce théorème: « Si les dérivées d'une fonction $f(x)$ forment, pour $x = a$, une série arithmétique de l'ordre m, il en est de même pour toute autre valeur de x. Théorème analogue concernant les coefficients d'une série récurrente.

Weyr (*Em.*). — Sur la courbure des courbes gauches du troisième ordre. (52-62; ital.).

Čubr (*Em.*). — Sur l'ellipsoïde terrestre. (63-77; boh.).

L'auteur démontre d'abord, suivant l'ordre d'idées de Bremiker (*Studien über hö-*

(¹) *Archives de Mathématiques et de Physique*, publiées par la Société Mathématique de Bohême et rédigées par le Secrétaire perpétuel Dʳ Ém. Weyr. Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 112.

(²) Une traduction allemande de ce Mémoire a paru dans l'*Archiv der Math. und Physik*, t. LIX, p. 337. *Voir* ci-dessus, p. 161.



here Geodäsie), que l'influence de la déviation de la verticale sur les coordonnées astronomiques peut être éliminée à l'aide de la méthode des moindres carrés. Les coordonnées analytiques d'un point de la surface terrestre sont ensuite exprimées en fonctions des coordonnées astronomiques, et l'on développe les expressions des rayons de courbure principaux.

Weyr (*Em.*). — Sur les lignes de courbure. Réclamation de priorité. (78-80; all.).

Au sujet d'un théorème énoncé en 1873 par M. Darboux, et publié déjà en 1872 par M. Weyr dans le *Giornale di Matematiche*, t. X, p. 189.

Hoüel (*J.*). — Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes. (81-91; fr.).

Le but de l'auteur est de montrer que les Mathématiques proprement dites ne considèrent jamais les êtres réels de la nature, mais seulement des entités abstraites, n'ayant aucune existence objective, mais représentant uniquement un ensemble de propriétés analogues à celles que l'expérience a fait apercevoir avec plus ou moins de précision dans les êtres réels soumis à nos recherches. La *vérité mathématique* ne dépend que de la conformité des résultats avec les hypothèses admises, et en aucune façon de la vérité de ces hypothèses, non plus que de l'accord des résultats avec la réalité des faits.

Čubr (*Em.*). — Sur les générations de suites de points ayant une affinité géométrique. (91-103; all.).

Pánek (*A.*). — Sur l'action exercée par un pôle magnétique sur un courant électrique circulaire. (103-109; boh.).

Détermination de cette action à l'aide des intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce, pour une position quelconque du pôle magnétique.

Sucharda (*A.*). — Remarques sur la sphère et le cercle. (110-113; boh.).

Le lieu d'un point dont la somme des carrés des distances à n points fixes est constante et $= k$ est une sphère, dont le centre est indépendant de k. Ce centre est le centre de gravité des n points, supposés d'égale masse. Pour ce centre de gravité, k a une valeur minimum k_0; pour une valeur quelconque de k, le rayon de la sphère $= \sqrt{\frac{k - k_0}{n}}$.

Marek (*J.*). — Remarque sur l'article de M. E. Čubr : « Sur l'ellipsoïde terrestre ». (114-116; boh.).

Réfutation de l'assertion de M. Čubr, que, de toutes les coordonnées astronomiques, l'azimut est celle qui est le moins affectée par la déviation de la verticale. Cette rectification n'affecte en rien le reste du Mémoire, la correction de l'azimut y étant déjà introduite par le calcul.

Strnad (*A.*). — Remarque sur la transformation homographique. (117-119; boh.).

Zahradnik (*K.*). — Théorie des courbes unicursales de la troisième classe. (120-131; boh.).

Ce sont des courbes de troisième classe avec une tangente double ou une tangente d'inflexion. On donne leurs équations en coordonnées de droites, en supposant, pour plus de simplicité, la tangente double à l'infini. Dans le cas où la droite à l'infini est une tangente stationnaire (*Wendetangente*), on peut écrire les équations de la courbe sous la forme

$$\frac{u}{\lambda} = v = \frac{e}{a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d},$$

u, v étant les coordonnées de la droite $ux + vy = 1$, et λ une variable indépendante (paramètre de la tangente u, v). Si la droite à l'infini est une tangente double de la courbe de troisième classe, on peut mettre les équations de la courbe sous la forme

$$\frac{u}{\lambda} = \frac{v}{\lambda^3} = \frac{e}{a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3}.$$

La condition pour que trois tangentes correspondantes aux paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ passent par un même point sera, dans le premier cas, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{b}{a}$, et dans le second $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{a}{d}$. En partant de là, on étudie certains systèmes de tangentes en involution, des tangentes harmoniques et équiharmoniques.

Hoüel (*J.*). — Sur le développement de la fonction perturbatrice suivant la forme adoptée par Hansen dans la théorie des petites planètes. (133-214, 4 tableaux; fr.).

Dans le cas où l'excentricité ou l'inclinaison de la planète sont très-considérables, le développement en série de la fonction perturbatrice ne peut plus s'effectuer algébriquement, comme dans le cas des planètes principales. Hansen effectue le développement par la méthode des quadratures mécaniques, fondée sur la division de la circonférence en parties égales. Cette méthode a des inconvénients, que M. Le Verrier a fait apercevoir, et qu'il évite par l'emploi d'une méthode nouvelle d'interpolation, dans laquelle il fait varier l'angle, suivant lequel doit se faire le développement, par intervalles incommensurables avec la circonférence. M. Hoüel a apporté à la méthode de M. Le Verrier quelques modifications qui en facilitent l'usage, et qui font en même temps de cette méthode un instrument de vérification des calculs. Ces modifications ont été exposées en détail dans un Mémoire inséré au tome VIII des *Annales de l'Observatoire*. Le présent Mémoire contient d'abord un résumé de cette méthode modifiée, suivi d'une application au mode de calcul des coefficients indiqué en 1836 par M. Liouville. Tel est l'objet du Chapitre I[er].

Le Chapitre II contient des indications sur le passage du développement suivant les anomalies excentriques au développement suivant les anomalies moyennes, et sur les formules les plus avantageuses pour le calcul du développement des puissances négatives de $\sqrt{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}$ suivant les puissances de $e^{\theta i}$.

Le Chapitre III contient l'exposition détaillée de deux méthodes proposées par Cauchy pour le développement d'une puissance négative de la distance mutuelle de deux planètes en une série double ordonnée relativement aux multiples des ano-



malies excentriques. L'une de ces méthodes est susceptible d'une abréviation considérable dans le calcul des termes d'ordre élevé.

L'Auteur rapporte, dans un Appendice, les résultats obtenus par lui en calculant, par sa méthode, les termes du premier ordre, par rapport aux masses, des inégalités du moyen mouvement de Pallas produites par l'action de Jupiter, et il termine en donnant des tableaux numériques calculés pour l'emploi de sa méthode d'interpolation.

Machovec (*F.*). — Sur une position relative particulière de trois coniques. (215-218; boh.).

Soient A et A', B et B', C et C' les couples de droites passant respectivement par les points communs aux coniques K'' et K''', K''' et K', K' et K''. Si les droites (A, B, C) concourent en un même point, il en sera de même pour chacun des systèmes (A, B', C'), (B, C', A'), (C, A', B'). On tire de ce théorème diverses propriétés des coniques.

Weyr (*Ed.*). — Sur le développement des irrationnelles du second degré en fractions continues. (218-225; boh.).

La fraction continue

$$a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\ddots}}$$

converge vers $\sqrt{a^2-b}$ toutes les fois que $a^2>b$. La condition $2a \geqq b+1$, donnée par quelques auteurs, n'est pas nécessaire.

Jeřábek (*V.*). — Sur la relation perspective d'un triangle quelconque avec un triangle équilatéral. (225-234; boh.).

Le lieu des points d'où la perspective d'un triangle *abc*, projeté sur un plan fixe N, est un triangle équilatéral, se compose de deux courbes gauches du quatrième ordre, dont chacune est l'intersection de deux cônes du second degré faciles à construire. Le lieu des tangentes à chacune de ces courbes coupe le plan N suivant une cardioïde.

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES. Comptes rendus des Sessions (¹).

1re Session (Bordeaux); 1872.

Respighi (*L.*). — Observations pendant l'éclipse totale du 12 décembre 1871. (74-78).

Janssen. — Éclipse du 12 décembre 1871. (78-86).

(¹) Il paraît chaque année un fort volume in-8.

Perrier (*F.*). — De la méridienne de France. (101-130).

Catalan (*E.*). — Nouvelle formule d'intérêt composé. (141-143).

L'auteur propose une nouvelle règle pour la fixation de l'intérêt composé, qui n'accroît pas indéfiniment la dette.

Respighi (*L.*). — Sur la lunette zénithale de l'Observatoire du Capitole. (145-147).

Respighi (*L.*). — Sur la scintillation des étoiles. (148-155).

Laporte (*M.*). — Application des machines à diviser aux instruments de Géodésie. (155-158).

Abbadie (*Ant. d'*). — Études sur la verticale. (159-168).

Respighi (*L.*). — Sur les protubérances solaires. (169-175).

Arson. — Compensation de la déviation du compas de marine à bord des navires en fer. (178-184).

Lemoine (*E.*). — Note sur la répartition et le mode de régulation des pressions dans un réseau de conduites à gaz. (193-202).

Laussedat (*A.*). — Sur un appareil photographique destiné à l'observation des passages de Vénus. (239-250).

Potier (*A.*). — Recherches sur l'intégration d'un système d'équations aux différentielles partielles à coefficients périodiques. (255-272).

Lallemand (*A.*). — Sur la polarisation et la fluorescence de l'atmosphère. (278-282).

Soret (*J.-L.*). — Recherches sur l'intensité calorifique de la radiation solaire. (282-299).

Mercadier (*E.*). — Mesure des intervalles musicaux. (301-308).

Potier (*A.*). — Recherches sur la réflexion vitreuse et métallique. (308-320).

Cornu (*A.*). — Détermination de la vitesse de la lumière. (320-322).

Gariel (*C.-M.*). — Sur la distribution du magnétisme dans les aimants. (336-339).

Cornu (*A.*).—Sur la constitution physique du Soleil. (1249-1264).

2ᵉ Session (Lyon); 1873.

Collignon (*Éd.*). — Exemples de l'application de la Statique à la Géométrie. (67-69).

Tchebychef (*P.*). — Sur les quadratures. (69-82).

Recherches au sujet de la formule donnée par M. Hermite, dans son *Cours d'Analyse*, p. 452, pour l'évaluation approchée de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

Mannheim (*A.*). — Deux théorèmes d'une nature paradoxale. (82-84).

Sur le mouvement des éléments imaginaires dans le déplacement d'une figure.

Lisbonne. — Cadran solaire azimutal. (86-90).

Lemoine (*E.*). — Sur quelques propriétés d'un point remarquable d'un triangle. (90-95).

Le point dont il s'agit est le point de concours des trois *médianes antiparallèles*.

Mannheim (*A.*). — Les normales aux surfaces trajectoires d'un point d'une figure de forme invariable rencontrent toutes deux mêmes droites. Démonstration nouvelle de ce théorème. (95-97).

Mannheim (*A.*). — Quelques théorèmes montrant l'analogie qui existe entre les propriétés relatives aux surfaces décrites par les points d'une droite et les surfaces touchées par les plans d'un faisceau mobile. (98-101).

Marchegay (*A.*). — Essai théorique et pratique sur le véhicule bicycle (vélocipède). (109-139).

Soret (*J.-L.*). — Spectroscope à oculaire fluorescent. (197-198).

Cornu (*A.*). — Sur la transformation de l'achromatisme optique des objectifs en achromatisme chimique. (198-204).

3ᵉ Session (Lille); 1874.

Lemoine (*E.*). — Losange articulé du colonel Peaucellier. (122-125).

Plassiard. — Des cordes du violon. (192-220).

1. Justesse et assortiment des cordes. — 2. De la quatrième corde ou bourdon. — Notes.

Terquem et *Boussinesq*. — Sur la théorie des battements. (220-228).

Van der Mensbrugghe. — Remarques concernant la tension superficielle des liquides considérée dans ses rapports avec les théories de Laplace et de Gauss sur les actions capillaires. (237-243).

Gariel (*C.-M.*). — Appareils schémas pour l'exposition des lois et phénomènes de l'optique élémentaire. (244-249).

Lallemand (*A.*). — Sur la diffusion lumineuse. (259-262).

Cornu (*A.*). — Sur le levier à réflexion. (262-268).

Lemoine (*E.*). — Note sur les propriétés du centre des médianes antiparallèles dans un triangle. (Suite). (1165-1168).

Mannheim (*A.*). — Sur la surface de l'onde. (1168-1173).

Broch (*O.-J.*). — Sur la représentation graphique des nombres complexes. (1174-1176).

Mannheim (*A.*). — Propriétés relatives à un faisceau de plans, qui est mobile. (1176-1179).

Ricci (le marquis *J.*). — Sur les opérations géodésiques effectuées en Italie. (1180-1192).

Collignon (*Éd.*). — Méthodes géométriques d'évaluation de certaines intégrales doubles. (1193-1202).

Picquet (*H.*). — Sur le centre des médianes antiparallèles. (1202-1204).

Picquet (*H.*). — Des invariants communs à deux fonctions quadratiques, homogènes, à deux, trois et quatre variables. (1205-1236).

Faye (*H.*). — Le prochain passage de Vénus sur le Soleil. (1239-1255).

4ᵉ Session (Nantes); 1875.

Hermite (*Ch.*). — Sur le développement de l'inverse du sinus d'amplitude et de son carré, suivant les puissances croissantes de la variable. (131-136).

La Gournerie (*de*). — Note sur des expériences entreprises pour

déterminer la direction des pressions qui se développent dans une arche biaise. (136-138).

Laisant (*C.-A.*). — Mémoire sur les puissances de points. Étude de Géométrie plane. (139-153).

L'auteur traite cette question au moyen de la méthode des équipollences de M. Bellavitis.

Fouret (*G.*). — Méthode graphique pour résoudre un système quelconque de n équations du premier degré à n inconnues. (154-159).

Laisant (*C.-A.*). — Calcul du produit de tous les sinus du premier quadrant, de degré en degré. (159-161).

Laisant (*C.-A.*). — Note sur un compas trisecteur. (161-163).

Hubert (*C.*). — Sur l'agromètre. (164-166).

Mannheim (*A.*). — Recherches sur la surface de l'onde. (167-173).

Lemoine (*Ém.*). — Note sur le tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales deux à deux. (173-178).

Parmentier (*Th.*). — Comparaison analytique des différentes méthodes d'approximation pour la quadrature des courbes planes, et formule nouvelle. (177-200).

La formule de M. Parmentier $S = h\left(2\,\Sigma y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{6} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{6}\right)$ est plus approchée que celle de Poncelet, et généralement aussi approchée que celle de Simpson ; quelquefois elle cède le pas à cette dernière, mais en conservant le second rang, tandis qu'elle est sujette à des écarts beaucoup moindres que celle de Simpson, qui occupe le quatrième rang quand elle n'occupe pas le premier.

Collignon (*Éd.*). — Sur la résolution des équations numériques. (200-208).

Liguine (*V.*). — Sur les systèmes articulés à six tiges. (208-224).

Picquet. — Sur une propriété du discriminant des formes quadratiques. (225-230).

Mannheim (*A.*). — Propriétés des diamètres de la surface de l'onde et interprétation physique de ces propriétés. (231-235).

Halphen. — Sur le genre des courbes algébriques. (237-245).

Guieysse (*P.*). — De la propagation des marées dans les rivières. (258-268).

Fasci (*A.*). — Sur la solution finale des problèmes de la navigation hauturière. (273-284).

Introduction. — 1. Résumé théorique des propriétés fondamentales de la famille des courbes de hauteur. — 2. Règles pratiques. — Notions générales sur les lignes de position du navire.

Cornu (*A.*). — Points principaux d'un système optique. (353).

Cornu (*A.*). — Propriétés focales des réseaux. (376-378).

Jackson (*H.-W.*). — De l'observation des étoiles filantes et des erreurs dont on a à se garder dans le compte rendu de ces observations. (379-382).

GIORNALE DI MATEMATICHE AD USO DEGLI STUDENTI DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI (¹).

Tome XIV; 1876.

Bertini (*E.*). — Système simultané de deux formes biquadratiques binaires. (1-13).

Application des méthodes et des résultats exposés par Clebsch dans sa *Theorie der binären algebraischen Formen*; nouvel exemple de formation des systèmes simultanés de formes binaires.

Padelletti (*D.*). — Sur la théorie des polygones et des courbes funiculaires. (14-47).

L'auteur développe dans ce Mémoire l'analogie, déjà signalée par Galilée et traitée depuis par Möbius, entre le problème de la courbe décrite par un projectile et celui de la forme d'un fil soumis à certaines forces. M. Padelletti complète les résultats de Möbius en examinant spécialement ce qui se rapporte aux polygones funiculaires.

Amanzio (*D.*). — Quelques propriétés des courbes du troisième et du quatrième ordre. (48-53).

Magnus a tiré des théorèmes de Pascal et de Brianchon, relatifs aux coniques,

---

(¹) Voir *Bulletin*, I, 152, 219, 286, 297, 331; II, 142; III, 171; IV, 196, 254; VI, 110; VII, 90; VIII, 32; X, 278.

deux autres théorèmes sur les lignes droites, en changeant l'hexagone rectiligne en un système de six coniques assujetties à passer toutes par trois points fixes. Schiaparelli aussi a déduit des mêmes théorèmes deux autres, relatifs aussi aux coniques, en changeant l'hexagone rectiligne en un système de six coniques assujetties à passer toutes par trois points fixes, dont deux seulement se trouvent dans la courbe. M. Amanzio, suivant les traces de Schiaparelli, tire des théorèmes de Pascal et de Brianchon d'autres théorèmes analogues à ceux que nous venons de citer, et concernant les courbes du troisième ordre ayant un point double et les courbes du quatrième ordre ayant trois points doubles.

Battaglini (*G.*). — Sur la quintique binaire. (54-65).

Recherche de la signification géométrique de quelques-uns des invariants et des covariants des formes binaires du cinquième degré.

Capelli (*A.*). — Démonstration de deux propriétés numériques qui se rencontrent dans la théorie des substitutions, et observations sur les substitutions permutables avec une substitution donnée. (66-74).

La théorie des substitutions démontre par une voie indirecte que, si l'on a des nombres $n = m_1 n_1 + \ldots + m_\omega n_\omega$, et que l'on pose $M = m_1! \ldots m_\omega! \, n_1^{m_1} \ldots n_\omega^{m_\omega}$, alors $n!$ est divisible par M; et si, de plus, μ est le plus petit commun multiple de $n_1, \ldots, n_\omega$, et $\varphi(\mu)$ le nombre des nombres premiers à μ et $< \mu$, $n!$ est divisible par $M\varphi(\mu)$.

Pincherle (*S.*). — Note sur les surfaces d'aire minimum. (75-82).

L'auteur s'occupe de trouver une relation générale d'où l'on puisse tirer pour les coordonnées des points des surfaces d'aire minimum un nombre indéfini d'expressions analytiques, et il en déduit les formules données par Beltrami et par Weierstrass. Il indique enfin quelques propriétés des surfaces minima applicables les unes sur les autres, propriétés qu'il croit nouvelles.

Crocchi (*L.*). — Sur les coniques polaires réciproques dans les faisceaux de coniques. (83-92).

Les coniques polaires réciproques de toutes les coniques d'un faisceau par rapport à une conique, ou bien d'une conique, par rapport à toutes les coniques d'un faisceau, ne peuvent généralement constituer elles-mêmes un faisceau. L'auteur examine les cas particuliers dans lesquels ces polaires réciproques peuvent former un faisceau.

Minozzi (*A.*). — Questions résolues.

Démonstration de quelques formules proposées par M. Retali, donnant l'aire de certaines courbes fermées à l'aide de leur courbure moyenne.

Günther (*S.*), trad. par *A. Sparagna*. — Sur la possibilité de démontrer l'axiome des parallèles au moyen de considérations sté-

réométriques. Complément à la *Géométrie absolue* de Bolyai. (97-107).

L'auteur n'admet pas comme preuves de l'impossibilité d'une telle démonstration les résultats obtenus par Lobatchefsky, qui a développé complétement toutes les propositions fondamentales de la Stéréométrie, sans admettre l'axiome des parallèles, et sans rencontrer cependant aucune contradiction. Il se propose, par la combinaison des principes de Bolyai avec la méthode de v. Staudt, d'établir cet axiome avec un minimum de définitions et de principes.

Battaglini (*G.*). — Sur la Géométrie projective. (110-138).

Dans ce Mémoire, qui fait suite à deux autres publiés dans les tomes XII et XIII du *Giornale*, M. Battaglini traite de la *forme quaternaire bilinéaire* entre des coordonnées de points et de plans.

Il observe d'abord que la théorie du connexe du premier degré de points et de plans est la même que celle des figures homographiques; puis, après avoir donné les formules générales de la dépendance homographique, il détermine les éléments doubles des figures; il établit les cas spéciaux les plus importants de l'homographie, et indique les constructions pour trouver les éléments doubles. Il discute ensuite le complexe des droites communes à deux points ou à deux plans correspondants, et résout diverses questions relatives à ce complexe, entre autres celle de la recherche de ses droites singulières. Il traite après cela des figures qui s'obtiennent par une même transformation homographique répétée, en discutant les involutions (tant partielles que totales) des divers ordres qui peuvent avoir lieu. Il détermine encore les courbes, la développable, et la surface gauche à laquelle appartiennent respectivement les points, les plans et les droites qui correspondent à un point donné, à un plan donné et à une droite donnée dans les transformations homographiques successives de la figure. Enfin il expose les propriétés des figures homographiques en relation avec l'*absolu* ou limite de l'espace.

Jung (*G.*). — Sur la transformation d'un théorème fondamental de la théorie des pôles et polaires dans la *Géométrie projective* de M. Cremona. (139-140).

Capelli (*A.*). — Sur les valeurs d'une fonction linéaire de plusieurs variables. (141-145).

Soit $X = a_0 x_0 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1}$, où $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont tous inégaux. Si, en appliquant successivement aux variables les substitutions $1, S_1, \ldots, S_{\mu-1}$ d'un système conjugué, X prend les μ valeurs $X_0, \ldots, X_{\mu-1}$, la fonction $V = X_0 + \ldots + X_{\mu-1}$ est ou n'est pas symétrique, suivant que le système des S est transitif ou non. De plus, si ce système est intransitif, la fonction V est symétrique seulement par rapport à chaque groupe de variables par rapport auquel le système donné est transitif.

Cassani (*P.*). — Sur quelques propriétés des quadriques. (146-150).

Dans les méthodes de Géométrie analytique à deux coordonnées, connues sous le nom de *méthodes de notation abrégée*, on fait en sorte qu'un même symbole représente l'équation d'une droite ou la distance d'un point à cette droite, et l'on

agit d'une manière analogue pour le plan dans la Géométrie à trois coordonnées. M. Cassani cherche à établir quelque chose de semblable pour les droites dans la Géométrie à trois coordonnées; puis il applique la convention adoptée par lui à l'établissement de quelques propriétés des surfaces du second ordre.

Bourguet (*L.*).—Solution d'une question proposée (t. IX, p. 210). (151-152; fr.).

Amanzio (*D.*). — Résolution par les séries des équations quadrinômes de la forme $Ax^{2m+n} + Bx^{m+n} + Cx^n + D = 0$. (153-179 et 306-317).

Le professeur Fergola a démontré que toutes les racines d'une équation trinôme de degré quelconque peuvent toujours se développer en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des coefficients, excepté dans le cas où l'équation admet des racines multiples, et il donne aussi ces séries. M. Amanzio, suivant les idées de M. Fergola, fait un développement analogue pour les équations quadrinômes de degré quelconque, de la forme indiquée ci-dessus. Il partage la question en deux cas, qu'il traite successivement dans ses deux Mémoires.

Isè (*E.*). — Note de Calcul graphique sur la résolution des équations du premier degré. (180-189, 1 pl.).

Application d'un procédé fondé sur la *Géométrie projective* de M. Cremona.

Minozzi (*A.*). — Note sur le mouvement d'une courbe sur une autre qui lui est égale. (190-192).

Lieu d'un point du plan de la courbe mobile.

Padelletti (*D.*). — Sur les relations entre la Cinématique et la Mécanique. (193-218 et 280-297).

Discussion critique des méthodes et des définitions habituellement adoptées dans ces deux sciences.

Fais (*A.*). — Note sur quelques formules et propriétés des courbes gauches. (219-240).

L'auteur trouve de deux manières l'élément du lieu des centres de courbure, l'angle de cet élément avec la normale principale correspondante, la distance du centre de courbure au centre de la sphère osculatrice, etc. Application aux hélices, aux courbes sphériques et aux courbes de courbure constante.

Bardelli (*G.*). — Relations métriques et de position dans le triangle rectiligne. (241-262).

L'auteur définit d'abord les coordonnées triangulaires d'un point d'un plan rapporté à un triangle fondamental, et établit quelques formules relatives à ces coordonnées. Il fait ensuite sur ce triangle une certaine construction, dont il démontre les propriétés ; puis il étudie divers lieux et enveloppes déterminés par les droites et les points de la figure, lorsqu'on y fait varier un certain rapport.

Tognoli (*O.*). — Représentation plane d'une classe de surfaces algébriques douées d'une courbe multiple. (263-279 et 378-380).

Les propriétés de la surface du troisième ordre qui peut s'engendrer au moyen de trois faisceaux de droites collinéaires sont exposées dans un Chapitre de la *Geometrie der Lage* de Reye. La lecture de ce Chapitre a suggéré à M. Tognoli l'idée qu'il pourrait y avoir d'autres surfaces susceptibles d'un mode de génération analogue à celui de la surface en question, et représentables aussi d'une manière uniforme sur le plan. Il expose dans deux articles les résultats de ses recherches.

Ovidio (*E. d'*). — Note sur les projections orthogonales dans la Géométrie métrico-projective. (298-305).

M. Schering a défini la projection d'un arc de géodésique sur une autre géodésique dans un espace d'un nombre quelconque de dimensions et de courbure constante, et il a énoncé la proposition suivante : « Le rapport de la tangente de la projection à celle de l'arc projeté est égal au cosinus de l'angle des deux géodésiques », où l'on suppose tacitement que les deux géodésiques aient un point commun à partir duquel soient comptés ces deux arcs. M. d'Ovidio, s'étant occupé de démontrer cette proposition, a été conduit à traiter généralement la question des projections, et il expose ici les résultats qu'il a obtenus dans le cas d'un espace à trois dimensions.

Tirelli (*Fr.*). — Quelques propriétés des coefficients binomiaux. (318-320).

En posant $R(x) = a_1 x^r + \ldots + a_{r+1}$, on a

$$R(n+r+1) - \binom{r+1}{1} R(n+r) + \binom{r+1}{2} R(n+r-1) - \ldots = 0.$$

Ianni (*G.*). — Études d'Analyse supérieure. (321-346).

L'objet de ce Mémoire est l'étude de la relation qui existe entre les périodes de deux intégrales abéliennes de première espèce. L'auteur établit une des formes données par Clebsch et Gordan (*Theorie der Abel'schen Functionen*), en profitant de quelques simplifications indiquées par les Ouvrages de Briot et Bouquet et de Schlömilch. Il expose, à ce propos, la théorie des nœuds fondamentaux de première et de deuxième espèce.

Cassani (*P.*). — Note sur un théorème de M. É. Lucas. (347-350).

Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, mai 1876, p. 205.

Levi (*S.*). — Questions proposées. (351-352).

Sur le nombre des racines réelles de certaines équations spéciales.

Levi (*S.*). — Sur les coordonnées trigonales. (353-376).

X, Y, Z étant les coordonnées trilinéaires d'un point d'un plan par rapport à un triangle fondamental ABC, les rapports

$$\frac{Y}{Z} = x, \quad \frac{Z}{Y} = y, \quad \frac{X}{Y} = z,$$

qui déterminent la position du point, sont ce que l'auteur appelle les coordonnées trigonales de ce point.

Zona (*T.*). — Annonce bibliographique. (377).

Relative au Livre du Dr Abetti, *Sur les cadrans solaires.*

O. Tognoli.

MONATSBERICHTE der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (¹). Année 1875.

Dove. — Sur la concordance des phénomènes météorologiques dans les années exceptionnellement sèches 1857, 1858, 1874. (33-51).

Poggendorff. — Faits nouveaux pour l'établissement d'une théorie définitive des machines électriques de seconde espèce. (53-70).

Du Bois-Reymond. — La Mettrie. (85-112).

Riess. — Contribution à l'étude des étincelles électriques faibles. (147-157).

Auwers. — Communication au sujet des expéditions allemandes pour le passage de Vénus. (158).

Kund et *Warburg.* — Sur le frottement et la conductibilité des gaz raréfiés. (160-173).

Kronecker (*L.*). — Sur les formes quadratiques à déterminants négatifs. (223-236).

Dans le Tome 57 du *Journal de Borchardt*, M. Kronecker a publié un Mémoire ayant pour titre : « Sur le nombre de classes différentes de formes quadratiques à déterminants négatifs ». On y trouve huit équations exprimant les relations, qui résultent de la théorie des fonctions elliptiques, pour le nombre de classes de formes quadratiques à déterminants négatifs. La publication actuelle de M. Kronecker forme le complément de la précédente. Pour établir les équations en question, on se sert, en effet, de certaines fonctions arithmologiques bien caractérisées. A celles-ci M. Kronecker en ajoute encore une nouvelle, par la considération de laquelle il parvient à effectuer complétement une certaine sommation qu'il n'avait obtenue que pour certains cas dans le Mémoire précédent.

(¹) Voir *Bulletin*, I, 187; IV, 200; VI, 40; VII, 131; X, 285.

Une conjecture que l'auteur énonce vers la fin mérite de fixer l'attention. « Il reste encore toujours possible qu'en dehors de ces huit formules il n'en existe pas d'autres où l'on puisse, pour la sommation du nombre de classes, employer les fonctions arithmologiques plus simples, composées au moyen des diviseurs; et que ces formules forment ainsi un système fermé, non pas seulement à cause de la méthode qui les a fournies, mais bien par elles-mêmes, d'après leur essence propre.

Kronecker (*L.*). — Remarques sur un Ouvrage de M. Reuschle. (236-238).

L'Ouvrage de M. Reuschle, mort récemment, a pour titre: « Tables de nombres premiers complexes formés des racines de l'unité; calculées d'après la théorie des nombres complexes de Kummer, par le Dr C.-G. Reuschle, professeur à Stuttgart. Berlin, F. Dümmler, 1875 ». Il a été publié par l'Académie de Berlin, et M. Kronecker fait ressortir l'importance pour les progrès des Sciences de ces Tables, si laborieuses à calculer.

Kronecker (*L.*). — Remarques sur l'histoire de la loi de réciprocité. (267-274).

En partant d'un passage connu d'une lettre de Legendre à Jacobi, M. Kronecker prouve, en citant les textes originaux, qu'Euler avait trouvé par induction la loi de réciprocité avant Legendre. Dans un Mémoire, remontant à 1744-46 et publié dans le tome 14 des *Commentaires de Saint-Pétersbourg*, p. 151, on trouve un théorème qui n'a besoin que d'un léger complément pour donner effectivement la loi de réciprocité. Mais elle est énoncée d'une manière nette et complète dans un Mémoire du premier volume des *Opuscula analytica* (Pétersbourg, 1783), ayant pour titre: *Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos*. Ainsi, même en ne tenant pas compte de la première publication, à cause de son caractère incomplet, Euler n'en a pas moins, dans l'énoncé de la loi, précédé de deux ans Legendre, qui n'a publié ses premières recherches qu'en 1785. Legendre cite bien quelquefois les *Opuscula analytica* d'Euler, mais il ne dit pas un mot du Mémoire en question. Ce dernier paraît également avoir échappé à Gauss lui-même.

Helmholtz. — Expériences sur les forces électromotrices induites par mouvement dans un cercle non fermé. (400-415).

Schiller. — Extrait d'une Lettre à M. Helmholtz. (416-418).

La discussion sur les lois fondamentales de l'Électrodynamique, à laquelle M. Helmholtz a pris une part si importante, paraît actuellement poussée assez loin pour que de part et d'autre on reconnaisse que les spéculations purement mathématiques ne sont pas suffisantes pour trancher définitivement les questions sur lesquelles portait le débat, mais qu'à l'expérience seule il appartient de décider. Mais, comme les différentes lois élémentaires mises en avant ne donnent aucune différence pour les courants fermés, M. Helmholtz a émis l'idée d'expérimenter sur des courants non fermés. A cet effet, il a lui-même commencé des expériences, et a laissé à M. Schiller le soin de les continuer, d'abord dans le laboratoire de Physique de Berlin; M. Schiller les a reprises plus tard à Moscou avec des appareils encore plus complets et dans des conditions si favorables qu'elles devaient permettre de trancher la question. La description complète de ces expériences se trouve dans les

Annales de Poggendorff, 1876. Il suffit ici de faire connaître ce résultat important, que les conséquences en ont été purement négatives, et par suite se prononcent contre la loi du potentiel, défendue par M. Helmholtz. Ce dernier en tire cette conclusion : « Ou bien les actions indiquées par la loi du potentiel n'existent pas ; ou bien, en outre des actions électrodynamiques signalées par cette loi, il y en a encore d'autres, celles de l'électricité qui se transporte quand le mouvement se produit (*der convectiv fortgeführten Electricität*) ; de telle sorte que la loi du potentiel est incomplète, quand on n'a égard qu'aux actions à distance de l'électricité en mouvement dans les *conducteurs*. »

D'une autre expérience, l'auteur tire encore cette conclusion : « Il résulte de là que la théorie du potentiel est en contradiction avec les faits, quand, dans cette théorie, on n'a égard qu'aux mouvements électriques qui ont lieu dans les conducteurs et à leurs actions à distance.... Mais la loi du potentiel peut se compléter, conformément aux résultats obtenus ici, si l'on admet, avec Faraday et Maxwell, qu'il peut aussi se produire dans les isolateurs des mouvements électriques susceptibles de donner lieu à des actions électrodynamiques.... Je me réserve de donner, dans une autre place, le développement mathématique complet des principes qui régissent les actions pondéromotrices et électromotrices qui se produisent dans les conducteurs et les isolateurs, en prenant pour point de départ les faits rapportés ci-dessus, et d'établir par ce moyen, et d'une manière complète, la liaison entre la théorie du potentiel et celle de Maxwell. »

Kummer. — Discours commémoratif à l'occasion de l'anniversaire de Leibnitz. (425-433).

Kirchhoff (*G.*). — Sur les courants électriques stationnaires dans une surface conductrice courbe. (487-497).

En partant d'un travail de M. Oumof, qui s'occupe du même sujet, M. Kirchhoff a fait la remarque très-intéressante que ce problème est dans la relation la plus intime avec cet autre problème célèbre : Représenter une surface courbe sur un plan, avec la condition de similitude des parties élémentaires. Après avoir rapidement établi cette connexion, il montre comment, à l'aide de la solution du problème de la représentation d'une surface courbe sur un plan, on peut transporter aux mouvements stationnaires de l'électricité sur la surface courbe la loi des courants stationnaires de l'électricité dans le plan. Les lignes d'égal potentiel sur une des surfaces sont les représentations des lignes d'égal potentiel sur l'autre ; les lignes de courants sur l'une sont les images des lignes de courants sur l'autre.

Cette méthode pour trouver les mouvements de l'électricité qui sont possibles sur une surface est élucidée au moyen de deux exemples qui ont déjà été traités d'une autre manière par M. Boltzmann. Si l'on donne de l'électricité à un plan par un point et si on lui en enlève par un autre, les lignes de courant sont des arcs de cercle qui réunissent les deux points. Au moyen de la projection stéréographique ce résultat se transporte immédiatement sur la sphère. Le second exemple donne les lignes de courant sur un cylindre, auquel on donne et on enlève de l'électricité par deux points. Comme exemple d'une surface courbe qui ne peut pas être représentée sur un plan, de manière que les limites de l'une soient les représentations des limites de l'autre, M. Kirchhoff étudie en troisième lieu la surface annulaire engendrée par une circonférence qui tourne autour d'un axe, situé dans son plan, mais ne la rencontrant pas. Enfin on peut aussi réciproquement trouver une représentation plane d'une surface courbe donnée, quand on connaît un système

de mouvements possibles de l'électricité sur la surface; en particulier cette représentation peut s'effectuer expérimentalement, puisqu'on peut trouver par l'expérience les lignes d'égal potentiel sur une surface conductrice courbe.

Kronecker (*L.*). — Sur les équations algébriques dont dépend la division des fonctions elliptiques. (498-507).

M. Kronecker se pose le problème de trouver le groupe des équations de degré $\frac{1}{2}(n^2-1)$ dont les racines, dans la notation de Jacobi, sont les carrés de $\sin\operatorname{am}\frac{2mK+2m'K'i}{n}$. En ayant égard aux travaux antérieurs d'Abel et de Jacobi, il est conduit tout d'abord à une équation abélienne du degré n pour $\sin\operatorname{am}\frac{2K'i}{n}$. On en déduit immédiatement le groupe de l'équation de division, ou de son facteur primitif, qui ne renferme que les racines $\sin\operatorname{am}\frac{4rK+2sK'i}{n}$ pour lesquelles les trois membres n, r, s n'ont pas de diviseur commun. En désignant les différents facteurs de n par p, on trouve alors que l'ordre du groupe est égal à $n^2\prod\limits_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$. En outre de cette équation, M. Kronecker étudie aussi celle dont les racines sont $x=\sin^2\operatorname{am}\frac{2K}{n}$.

Groth. — Sur l'élasticité du sel gemme. (544-549).

Holtz. — Sur une expérience pour l'inversion de la lumière électrique polaire sans changement de pôle. (561-571).

Berthold. — Notice sur l'histoire du principe de la conservation de la force. (577-586).

Ce Mémoire a pour but de démontrer que « notre siècle ne doit avoir la prétention ni d'avoir trouvé le principe de la conservation de la force, ni même de l'avoir établi d'une manière essentiellement nouvelle. Cela ne diminue en rien le mérite de ceux qui l'ont trouvé à nouveau ». M. Berthold suit le théorème de la constance de l'énergie successivement chez Épicure, Gassendi, Descartes, Leibnitz, Chr. Wolff, Daniel Bernoulli, Spinoza, Voltaire, Maupertuis, Toland, Hooke, Kant, Diderot, Rumford, Humphry Davy.

Gerhardt. — Le second centenaire de la découverte de l'Algorithme de l'Analyse supérieure par Leibnitz. (588-608).

« Les manuscrits encore existants de Leibnitz nous apprennent que, le 29 octobre 1675, Leibnitz employa pour la première fois le signe d'intégration, au lieu des notations de Cavalieri alors en usage, et reconnut que par là un nouveau calcul venait de naître. Il faut avouer toutefois que Leibnitz ne se fit pas de suite une idée bien complète de l'immense portée de sa découverte. Il n'y vint que peu à peu, lorsque quelques jours plus tard, ayant inventé le signe réciproque, celui de la différentiation, il reconnut que le calcul avec ces nouveaux signes permettrait de traiter tous les problèmes restés jusque-là sans solution.... Il est digne de re-

marque que ni Edleston ni Brewster n'aient pu produire la copie exactement conforme à l'original d'aucun manuscrit de Newton, qui puisse servir comme document pour fixer la première découverte de l'algorithme des fluxions.... L'unité de conception de l'algorithme que l'analyse supérieure doit à Leibnitz manque au calcul des fluxions; Leibnitz reste donc comme le premier inventeur de l'analyse supérieure....

» Dix ans environ après avoir fait connaître l'algorithme du Calcul différentiel, Leibnitz forma le projet d'écrire un ouvrage sur l'Analyse supérieure, qui aurait eu pour titre : *Scientia infiniti*. Malheureusement son entreprise n'aboutit pas. Les deux fragments suivants, non publiés jusqu'ici et que j'ai trouvés dans les papiers de Leibnitz, me paraissent en être le commencement; l'un (I), comme Introduction historique, est particulièrement intéressant, en ce que Leibnitz, vers la fin, y présente son algorithme comme la partie la plus essentielle de sa découverte; le second (II) est le commencement de l'Ouvrage. »

Wernicke. — Sur les changements absolus de phase dans la réflexion de la lumière, et sur la théorie de la réflexion. (673-706).

Ce travail contient les résultats d'expériences très-soignées, entreprises en vue de démontrer les théories actuellement existantes. L'auteur en tire la conclusion suivante : « Nous voyons ainsi que les résultats des théories actuelles ne correspondent même pas une seule fois approximativement avec les expériences. Je ne crois pas que mes résultats renferment de fautes de calcul; car je les ai retrouvés identiquement les mêmes par plusieurs méthodes de calcul différentes. D'après cela, je déduis donc de mes expériences cette conclusion, que les fondements de la théorie réclament une modification essentielle. »

Baeyer. — Cartes lithographiées. — Croquis du Harz et de ses environs. (709).

Siemens. — Mesure de la vitesse de propagation de l'électricité dans des fils de laiton suspendus. (774-785). E. L.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON (¹).

Tome CLXIII; 1873.

Chambers (*F.*). — Les variations diurnes du vent et de la pression barométrique à Bombay. (1-18).

Mallet (*R.*). — L'énergie volcanique : essai de recherche de sa véritable origine et de ses relations cosmiques. (147-227).

(¹) Voir *Bulletin*, I, 181 et 365; VI, 228.

Cayley (*A.*). — Sur la courbure et sur les surfaces orthogonal (229-251).

Lockyer (*J.-Norman*). — Recherches d'analyse spectrale relat au spectre du Soleil. N^os I-II. (253-275 et 639-658; 5 pl.).

Airy (Sir *G.-B.*). — Observations magnétiques dans les ponts fer tubulaires de Britannia and Conway. (331-339).

Perry (*S.-J.*). — Relevé magnétique de la Belgique en 1871. (3 357).

Mc Kichan (*D.*). — [illegible]nation du nombre des unités élect statiques contenue[illegible]nité électromagnétique, faite au la ratoire physiqu[illegible]rsité de Glasgow. (409-427).

Clarke (*A.-R.*). — [illegible] des comparaisons des étalons de l gueur de l'Angle[illegible]'Autriche, de l'Espagne, des Ét Unis, du Cap de Bonn[illegible]érance et d'un second étalon ru faites à l'Ordnance Surv[illegible]Office, Southampton. Sous la direct du Major-Général Sir [illegible]ry *James*. Avec une Préface et Notes sur les mesures grecques et égyptiennes par Sir *He James*. (445-469).

Rosse (le comte *de*). — Sur le rayonnement calorifique de la Lu loi de son absorption par notre atmosphère, et variation de intensité avec les phases. (587-627).

Tome CLXIV; 1874.

Clark (*Latimer*.). — Sur une batterie voltaïque type. (1-14).

Ball (*R.-St.*). — Recherches sur la Dynamique d'un corps rig à l'aide de la théorie des vis. (15-40).

Voir *Bulletin*, t. VII, p. 176.

Tyndall (*J.*). — Sur l'atmosphère considérée comme véhicule son. (183-244).

Cayley (*A.*). — Mémoire sur la transformation des fonctions el tiques. (397-456).

Lockyer (*J.-N.*). — Recherches d'analyse spectrale relatives spectre du Soleil. N°s III-IV. (479-494 et 805-813, 5 pl.).

Crookes (*W.*). — Sur l'attraction et la répulsion causées par la radiation. (501-527).

Gore (*G.*). — Sur l'électrotorsion. (529-562).

Blanford (*H.-F.*). — Les vents de l'Inde septentrionale dans leurs rapports avec la température et l'état hygrométrique de l'atmosphère. (563-653, 7 pl.).

Roscoe (*H.-E.*). — Sur une méthode enregistrante pour mesurer l'intensité de l'action chimique de la lumière totale du jour. (655-673).

Clifford (*W.-K.*). — Sur les problèmes de contact de M. Spottiswoode. (705-717).

Tome CLXV; 1875.

Noble et *Abel* (*F.-A.*). — Recherches sur les substances explosives. (49-155).

Hennessey (*J.-B.-N.*). — Sur les raies atmosphériques du spectre solaire, avec une carte dressée à la même échelle que celle qui a été adoptée par Kirchhoff. (157-160).

Sabine (Sir *Ed.*). — Contributions au magnétisme terrestre. (161-203).

Mallet (*R.*). — Addition au Mémoire sur « L'énergie volcanique : essai de recherche sur sa véritable origine et de ses relations cosmiques ». (205-213).

Lassell (*W.*). — Sur le polissage des miroirs des télescopes à réflexion. (303-315).

Haughton (*S.*). — Sur les marées des mers arctiques. — *IVe Partie :* Sur les marées du Northumberland Sound, à l'entrée nord du Wellington Channel (317-329). — *Ve Partie :* Sur les marées de Refuge Cave, Wellington Channel. (331-337). — *VIe Partie :* Marées de Fort Kennedy, détroit de Bellot. (339-360).

Chambers (*Ch.*) et *Chambers* (*F.*). — Sur l'expression mathéma tique des observations de phénomènes périodiques complexes; et de l'influence planétaire sur le magnétisme terrestre. (361-402).

Le but des auteurs est de déterminer, par la méthode de Bessel, une expression

mathématique d'un phénomène périodique, d'après des observations affectées par un ou plusieurs autres phénomènes périodiques, et de trouver des critériums pour juger à quel point l'expression est affectée par ces autres phénomènes.

Robinson (*T.-R.*). — Réduction des anémogrammes pris à l'Observatoire d'Armagh dans les années 1857-1863. (403-432).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une classe de relations identiques dans la théorie des fonctions elliptiques. (489-518).

L'auteur indique certaines transformations que l'on peut faire subir aux fonctions elliptiques primaires, et discute les relations identiques auxquelles ces transformations donnent naissance. Il fait voir que ces relations peuvent s'obtenir immédiatement à l'aide du théorème de Fourier, ou, par une voie moins directe, à l'aide de l'Algèbre ordinaire.

Crookes (*W.*). — Sur la répulsion résultant de la radiation. 2e Partie. (519-547).

Lockyer (*J.-N.*) et *Seabroke* (*G.-M.*). — Observations spectroscopiques du Soleil. (577-586).

Prestwich (*J.*). — Tables des températures de la mer à différentes profondeurs au-dessous de la surface, réduites et colligées d'après la discussion des diverses observations faites entre les années 1749 et 1868. Avec une Carte et des Sections. (587-674).

Cayley (*A.*). — Mémoire sur les prépotentiels. (675-774).

Ce Mémoire traite d'intégrales multiples exprimées au moyen des $s+1$ variables $(x, \ldots, z, w)$ qui disparaissent finalement, et d'un nombre égal de paramètres $(a, \ldots, c, e)$, ces intégrales étant de la forme

$$\int \frac{\rho\, d\varpi}{[(a-x)^2+\ldots+(c-z)^2+(e-w)^2]^{\frac{1}{2}s+q}},$$

où ρ et $d\varpi$ dépendent uniquement des variables $x, \ldots, z, w$. Une telle intégrale, relative à l'indice $\frac{1}{2}s+1$, est appelée *prépotentiel*; dans le cas particulier de $q = -\frac{1}{2}$, c'est un *potentiel*.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG (¹).

Tome XX; 1874-1875.

Hasselberg (*B.*). — Sur les moyens d'obtenir une égale exposition dans le levé photographique du Soleil. (169-187; all.).

Asten (*E. v.*). — Sur l'existence d'un milieu résistant dans les espaces célestes. (187-197; all.).

Berg (*Fr.-W.*). — Contributions à la théorie de la détermination des orbites. (197-202; all.).

Somof (*J.*). — Théorème barycentrique, qui donne un moyen d'exprimer la durée d'un mouvement quelconque d'un point par le rapport de deux droites. (258-262).

Soient T la durée d'un mouvement quelconque d'un point M; AMB l'arc de courbe décrit pendant T; AB la corde sous-tendant cet arc; v la vitesse à l'instant t; Aμ une droite variable, qui reste pendant T égale et parallèle à la vitesse v; enfin ab la courbe décrite par μ pendant T, c'est-à-dire l'hodographe de la vitesse v. Concevons une masse tellement distribuée sur ab, que la densité au point μ soit en raison inverse de la force qui sollicite le point M, ou de l'accélération du premier ordre. Le centre de gravité de cette masse se trouve sur la corde AB, et le rapport $\frac{AB}{AC}$ est égal à la durée T.

Savitch (*A.*). — Analyse des observations faites au Caucase sur les réfractions terrestres. (300-321).

Asten (*E. v.*). — Sur l'apparition de la comète d'Encke en 1875, et sur l'existence d'un milieu résistant dans les espaces célestes. (340-365; all.).

Romberg (*H.*). — Sur un mouvement remarquable, observé dans un niveau très-sensible. (365-367; all.).

Lindemann (*Ed.*). — Détermination de l'éclat des étoiles fixes au moyen du photomètre de Zöllner et par des évaluations graduelles. (387-421; all.).

Minding (*F.*). — Sur la courbure moyenne des surfaces. (531-537; all.).

(¹) Voir *Bulletin*, I, 240; II, 299; IV, 58; VI, 32; VII, 190; VIII, 143.

Kowalski (*M.*). — Sur le calcul de l'orbite elliptique à l'aide des deux rayons vecteurs r et r', de l'angle $2f$ compris entre eux, et du temps t écoulé entre les deux observations de la planète. (559-571).

Tome XXI; 1875-1876.

Struve (*O.*). — Sur l'orbite de l'étoile double $\Sigma.1728 = 42$. Comæ Ber. (34-47; all.).

Savitch (*A.*). — Observations des planètes à Saint-Pétersbourg. (59-61).

Wild (*H.*). — Nouveau baromètre à siphon. (85-93, 1 pl.; all.).

Wild (*H.*). — Anémomètre muni d'un simple appareil pour la mesure de la force du vent. (177-185; all.).

Minding (*F.*). — Les courbes de moindre périmètre sur les surfaces de révolution. (252-261; all.).

Wild (*H.*). — Éloge de Moritz-Hermann von Jacobi. (261-280; all., avec portrait).

Wild (*H.*). — Recherches photométriques concernant la lumière diffuse du ciel. (312-350, 1 pl.; all.).

Struve (*O.*). — Sur l'étoile double $\Sigma.2120 = 210$ d'Hercule. (350-366; all.).

Tome XXII; 1876-1877.

Savitch (*A.*). — Observations faites à l'Observatoire astronomique de l'Académie des Sciences à Saint-Pétersbourg. (198-199).

Struve (*O.*). — Sur le satellite supposé de Procyon. (295-303; all.).

D'après M. Struve, les observations que lui-même et d'autres astronomes avaient cru faire de ce satellite seraient le résultat d'une illusion purement physiologique.

Bouniakovsky (*V.*). — Sur quelques propositions nouvelles relatives au symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$. (358-377).

Avenarius (*M.*). — Sur les causes qui déterminent la température critique. (378-389, 1 pl.; all.).

Chwolson (*O.*). — Sur un rhéostat à mercure construit par M.-H. v. Jacobi. (409-440, 2 pl.; all.).

Lenz (*R.*). — Application de la loi de Kirchhoff sur la distribution du courant électrique dans les conducteurs fluides. (440-454; all.).

Brosset (*M.*). — De la Chronologie technique géorgienne, ecclésiastique et civile. (455-488).

Asten (*E. v*). — Recherches ultérieures sur la comète d'Encke. (550-572; all.).

PUBLICATIONS DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DES LETTRES DE DANEMARK (1).

I. — DET KONGELIGE DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS SKRIFTER. 5. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling. 10. Bd. (2).

Tome X.

Zeuthen (*H.-G.*). — Recherches des propriétés générales des systèmes de courbes planes (3).

Hansen (*P.-C.-V.*). — Théorème sur le facteur d'Euler, correspondant à l'équation différentielle $M + N \frac{dy}{dx} = 0$, où M et N sont des fonctions algébriques de x et de y (4).

Lorenz (*L.*). — Recherches expérimentales et théoriques sur l'indice de réfraction des corps. IIe Partie. (36 p.; dan.).

Ce Mémoire fait suite à un Mémoire de même titre (Ire Partie), inséré au t. VIII de la même collection.

Steen (*A.*). — Sur la possibilité de l'intégration de quelques équations différentielles par des fonctions finies et explicites. (23 p.; dan.).

Les fonctions que l'auteur appelle *finies* et *explicites* sont celles qui sont composées d'une manière quelconque par un nombre fini d'opérations algébriques et

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 86. On peut acheter séparément les divers Mémoires de cette collection.

(2) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark.* Section des Sciences physiques et mathématiques; 5e Série, t. X.

(3) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 97.

(4) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 140.

d'opérations indiquées par les signes des fonctions logarithmiques et exponentielles. Il reprend donc, de même qu'il a été fait dans quelques autres publications danoises (voir *Bulletin*, t. VIII, p. 140), les anciennes recherches de Liouville sur la classification des fonctions. La partie essentielle du contenu du présent Mémoire, dit l'auteur, appartient à Liouville, la forme à lui-même. Les équations discutées sont de la forme $\frac{d^2 y}{dx^2} - Py = 0$, où l'on a $P = \frac{M}{x^m}$, ou $P = \frac{M}{N}$, M et N étant des fonctions algébriques entières et rationnelles, et l'auteur se borne au cas où les facteurs de N sont différents entre eux. Les conditions nécessaires de l'intégrabilité sont dans les deux cas assez nombreuses.

Tome XI.

Colding (*A.*). — Exposé des résultats de recherches sur les courants de la mer excités par la force du vent. (28 p.; dan.).

Christiansen (*C.*). — Recherches magnétiques. (31 p.; dan.).

II. — Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder (¹). — 1874-1876.

Année 1874.

Steen (*A.*). — Sur la forme de l'intégrale de l'équation différentielle du second ordre (²). (1-12).

Schjellerup (*H.-C.-F.-C.*). — Contributions au jugement de la certitude des éléments modernes de la Lune. (64-95).

Après avoir donné un aperçu historique de la controverse bien connue sur la vraie valeur de l'accélération séculaire du mouvement moyen de la Lune, l'auteur présente plusieurs observations critiques sur les méthodes employées par Hansen et Delaunay pour calculer les perturbations de la Lune. Quant aux perturbations périodiques, l'auteur mentionne avec éloges la très-grande exactitude obtenue par les deux célèbres astronomes-géomètres; cette partie du Mémoire finit par une *comparaison complète des coefficients numériques des termes périodiques de la longitude de la Lune trouvés par Hansen et par Delaunay.*

Pour l'évaluation des perturbations séculaires, et en particulier pour le calcul du mouvement séculaire du nœud, l'auteur fait voir la faiblesse de la méthode de Delaunay comparée à celle de Hansen. En tous cas, il reste encore beaucoup à faire dans cette partie de l'Astronomie physique. D'ailleurs, il faut qu'on se rappelle que Delaunay a laissé inachevée sa théorie de la Lune: pour cette raison l'auteur se borne à examiner les Tables de la Lune de Hansen.

Pour atteindre son but, l'auteur s'est proposé de discuter à fond trois éclipses

---

(¹) *Bulletin de l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark*; 1874-1876. — Voir *Bulletin*, t. VII, p. 86.

(²) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 141.

totales mentionnées dans le livre chinois *Chun-Tsin*, attribué à Confucius. La discussion détaillée de l'authenticité de ce Livre rend très-vraisemblable que les trois éclipses, qui ont eu lieu le 16 juillet — 708, le 19 septembre — 600 et le 18 juin — 548, se sont présentées totales dans un lieu (la capitale de la principauté de *Lou*) dont la latitude est + 35°52′, et la longitude 117°13′ E. de Greenwich, suivant Biot. Le premier calcul de ces éclipses, au moyen des Tables de la Lune et du Soleil de Hansen sans aucune correction, ayant conduit à des résultats qui n'étaient pas entièrement acceptables, l'auteur a essayé d'obtenir, au moyen de formules différentielles, une meilleure harmonie avec la tradition historique, en appliquant une correction de 18″,3 au mouvement séculaire du nœud. Cette correction de la théorie de Hansen conduit aux résultats suivants : *La plus grande phase de l'éclipse du* 16 *juillet* — 708 *était à la capitale de* 11 *doigts ; l'éclipse du* 19 *septembre* — 600 *était totale et la plus grande phase de celle du* 18 *juin* — 548 *était de* $11\frac{3}{4}$ *doigts à peu près*.

L'auteur continue ses recherches en faisant usage de l'accélération de Adams et de Delaunay. Les résultats qu'il en déduit sont en discordance complète avec la tradition historique qu'on trouve dans le Livre chinois. Cependant, adoptant la variabilité de la rotation de la Terre, l'auteur déduit de ce calcul, par un procédé qui lui est propre, pour le *temps* une correction de $-12^s,514\,t^2$, t étant le nombre des siècles depuis 1800.

Enfin l'auteur a ôté aux Tables la fausse équation à longue période de Vénus, en appliquant d'après Airy une diminution de 36 secondes au mouvement séculaire moyen de la Lune. L'accélération du jour sidéral qui en résulte est de $-9^s,547\,t^2$, d'où il suit que le jour sidéral était, il y a 2400 années, plus court de $0^s,01252$ qu'il n'est aujourd'hui.

Année 1875.

Oppermann (*L.*). — Sur l'interpolation appliquée à faciliter le calcul de nombres irrationnels. (18-22).

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des valeurs approximatives successives d'un nombre cherché A. Alors, en regardant A_n comme fonction de n, on peut appliquer l'interpolation au calcul d'une valeur plus exacte de A. Seulement il faut substituer à l'argument n une fonction $\varphi(n)$ qui devient égale à zéro par $n = \infty$. Si, par exemple, A_n est la somme de n termes de la série connue

$$\pi = \frac{8}{1.3} + \frac{8}{5.7} + \frac{8}{9.11} + \ldots,$$

et $\varphi(n) = \frac{1}{n}$, les cinq valeurs $A_1, \ldots, A_5$ donneront de cette façon une valeur de π plus exacte qu'il ne résulterait de la sommation de 90000 termes de la série.

L'auteur fait remarquer que déjà Stirling a indiqué qu'on peut appliquer l'interpolation à la solution de problèmes de ce genre.

L'auteur ajoute encore la conjecture historique qu'Archimède aurait trouvé la racine carrée d'une quantité, ou bien la moyenne géométrique de deux quantités, par des substitutions successives des moyennes arithmétique et harmonique des deux quantités.

Année 1876.

Tychsen (*C.*). — Note sur un point difficile de la « Théorie analytique des Probabilités » de Laplace. (12-23).

L'auteur s'occupe du problème des joueurs qui se trouve à la p. 225 du célèbre Ouvrage cité, que Laplace a résolu par des fonctions génératrices : il obtient une solution assez simple en appliquant à l'intégration de l'équation aux différences finies la Méthode dont se sert Lagrange dans son Mémoire sur des séries récurrentes, inséré aux *Mémoires* de l'Académie de Berlin, 1775.

Buchwaldt (*F.*). — Nouvelle méthode pour la différentiation à indice quelconque. (80 p.). Avec un résumé en français. (8 p.).

La base de cette différentiation est autre que celle de Liouville, mais elle coïncide à peu près avec celle dont M. Letnikof venait de se servir dans un Mémoire (¹) dont M. Buchwaldt n'a pris connaissance qu'après la première publication de sa méthode dans le *Tidsskrift for Mathematik*. L'auteur du présent article s'occupe beaucoup du « complément » auquel il parvient à donner une forme déterminée au moyen de l'extension de la fonction Gamma à des arguments négatifs.

L'auteur ajoute plusieurs applications de sa méthode. En choisissant de préférence des exemples traités par M. Liouville, il cherche à montrer que sa méthode peut remplacer celle de ce célèbre savant.

III. — Autres Publications de l'Académie.

Tyge Brahes meteorologiske Dagbog, holdt paa Uraniborg for Aarene 1582-1597. Udgiven som Appendix til Collectanea meteorologica af det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab ved dets meteorologiske Comité. — Kjöbenhavn, 1876. (In-8).

Ce Livre contient : Préface de l'édition du *Journal météorologique* de *Tycho Brahe*, par F.-R. Friis, p. I-IV (danois) ; le *Journal météorologique* de *Tycho Brahe*, tenu à Uraniborg, île de Hveen, pendant la période 1582-1597, à présent conservé à la Bibliothèque I. R. de Vienne, p. 1-263 (danois) ; *Résumé du Journal météorologique de Tycho Brahe*, par P. La Cour, sous-chef du Bureau météorologique de Copenhague, p. I-XLVII (danois) ; *Registre des Notices historiques insérées au Journal météorologique de Tycho Brahe*, par H.-F. Rördam, p. XLVIII-LIV (danois) ; et enfin, *Résumé d'un Journal météorologique* du célèbre astronome Tycho Brahe, tenu à Uraniborg, île de Hveen, pendant la période 1582-1597, par P. La Cour, p. LV-LXXV (en français).

Le Résumé est aussi inséré au *Bulletin de la Société* pour 1876.

Z.

(¹) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 233.

PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY (¹).

Tome IV (fin); 1873.

Cayley (*A.*).—Addition au « Mémoire sur les lignes géodésiques, particulièrement sur celles d'une surface quadrique » (²). (368-380).

Clifford (*W.-K.*). — Notions préliminaires sur les biquaternions. (381-395).

Cayley (*A.*). — Sur une correspondance de points par rapport à deux tétraèdres. (396-404).

Walker (*J.-J.*). — Conditions invariantes pour que trois coniques aient des points communs.

Davis (*W.-Barrett*). — Sur les méthodes employées dans la construction des Tables de diviseurs. (416-417).

Tome V; 1873-1874.

Roberts (*S.*). — Note sur l'expression de la longueur d'un arc d'une ovale de Descartes en intégrales elliptiques. (6-9).

Clifford (*W.-K.*). — Représentation graphique des composantes harmoniques d'un mouvement périodique. (11-14).

Cayley (*A.*). — Sur la surface de Steiner. (14-25).

Crofton. — Sur un théorème de Cinématique. (25-27).

Cayley (*A.*). — Sur certaines constructions des quartiques bicirculaires. (29-33).

Griffiths (*J.*). — Sur l'équation cartésienne du cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés. (33-35).

Wolstenholme. — Sur un autre système d'équations poristiques. (35-38).

Hirst. — Sur la corrélation de deux plans. (40-70).

(¹) Voir *Bulletin*, III, 344; IV, 45; VII, 25.

(²) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 27.

Spottiswoode (*W.*). — Sur le contact des quadriques avec d'autres surfaces. (70-74).

Monro (*C.-J.*). — Note sur l'inversion du théorème de Bernoulli dans le Calcul des probabilités. (74-78).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur la transformation des produits continus en fractions continues. (78-88).

Roberts (*S.*). — Sur les surfaces parallèles des développables et des courbes à double courbure. (90-94).

Griffiths (*J.*). — Sur une relation remarquable entre la différence de deux arcs de Fagnano sur une ellipse d'excentricité e, et celle de deux arcs correspondants sur une hyperbole d'excentricité $\frac{1}{e}$. (95-96).

Routh (*E.-J.*). — Stabilité d'un système dynamique animé de deux mouvements indépendants. (97-99).

Routh (*E.-J.*). — Sur les pierres branlantes. (100).

Routh (*E.-J.*). — Petites oscillations à un degré quelconque d'approximation. (101-105).

Taylor (*H.-M.*). — L'inversion, en considérant particulièrement l'inversion d'un tore. (105-112).

Merrifield (*C.-W.*). — Détermination de la forme du dôme de pression uniforme. (113-119).

Rayleigh (lord). — Note sur le calcul numérique des racines des fonctions oscillantes. (119-124).

Röhrs (*J.-H.*). — Mouvement sphérique et cylindrique dans un fluide visqueux. (125-139).

Tome VI; 1874-1875.

Hirst (*T.-A.*). — Sur la corrélation dans l'espace. (7-9).

Wolstenholme (*J.*). — Nouvel aperçu sur le porisme du triangle inscrit et circonscrit. (9-19).

Cayley (*A.*). — Sur les potentiels des polygones et des polyèdres. (20-34).

Cône à base plane, et figure plane. — Cas d'un polyèdre ou d'un polygone. — Formule pour la pyramide rectangulaire et le triangle composants. — Formules pour la pyramide rectangulaire et le rectangle. — Groupe de résultats pour le point, la ligne, le rectangle et le cuboïde. — Propriétés différentielles des fonctions A, B, C, D. — Application aux potentiels du point, de la ligne, du rectangle et du cuboïde. — Potentiel d'une surface cuboïde.

Mannheim. — Description mécanique de certaines courbes. (35-36).

Cayley (*A.*). — Sur le potentiel de l'ellipse et du cercle. (38-58).

Potentiel de l'ellipse. — Cas où le point attiré est sur l'hyperbole focale. — Le potentiel du cercle.

Cayley (*A.*). — Détermination de l'attraction d'une couche ellipsoïdale sur un point extérieur. (58-67).

Établissement de théorèmes géométriques. — Détermination de l'attraction de la courbe. Démonstration des théorèmes géométriques. — Expressions analytiques de l'attraction de la courbe et de ses composantes. — Composantes de l'attraction de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}+\frac{z^2}{h^2}=1.$$

Hammond (*J.*). — Sur la résolution des équations différentielles linéaires en séries. (67-73).

Campbell (*John-R.*). — Le principe de l'échelle diagonale appliqué à la mesure des angles dans la règle logarithmique circulaire. (73-78).

Cayley (*A.*). — Note sur un point de la théorie de l'attraction. (79-81).

Cayley (*A.*). — Sur l'expression des coordonnées d'un point d'une courbe quartique en fonction d'un paramètre. (81-83).

Laverty (*W.-H.*). — Extension du théorème de Peaucellier. (84-85).

Routh (*E.-J.*). — Sur les trois molécules de Laplace, avec un Supplément sur la stabilité du mouvement permanent. (86-97).

Griffiths (*J.*). — Note sur quelques relations entre certaines fonctions elliptiques et hyperboliques. (98-100).

Roberts (*S.*). — Sur une méthode simplifiée pour obtenir l'ordre des conditions algébriques. (101-113).

Darwin (*G.-H.*). — Sur quelques formes proposées pour la règle à calcul. (113).

Darwin (*G.-H.*). — Description mécanique des lignes équipotentielles. (115-117).

Clerk-Maxwell (*J.*). — Sur l'application de la fonction caractéristique de Hamilton à la théorie d'un instrument d'optique symétrique autour de son axe. (117-122).

Taylor (*C.*). — La méthode de réversion appliquée à la transformation des angles. (123-125).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Notes sur les coefficients de Laplace. (126-136).

Hart. — Sur la description mécanique d'une sphéroconique. (136-137).

Hart. — Un mouvement parallèle. (137-139).

Smith (*H.-J.-Stephen*). — Sur l'intégration des fonctions discontinues. (140-153).

Smith (*H.-J.-Stephen*). — Sur les singularités d'ordre supérieur des courbes planes. (153-182).

Clerk-Maxwell (*J.*). — Sur la fonction caractéristique de Hamilton pour un étroit rayon de lumière. (182-190).

Thomson (sir *W.*). — Vibrations et ondulations dans une chaîne uniformément tendue de gyrostats symétriques. (190-194).

Wolstenholme (*J.*). — Problème d'Hydrostatique. (197-199).

Tome VII; 1875-1876.

Hammond (*J.*). — Sur la relation entre les nombres de Bernoulli et les coefficients binomiaux. (9-14).

Roberts (*S.*). — Sur le mouvement *three-bar* dans un espace plan (14-23).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Valeurs de certains produits infinis, avec

une application à la sommation de la série géométrique du $n^{ième}$ ordre sous forme d'intégrale définie. (23-26).

Clifford (*W.-K.*). — Sur la transformation des fonctions elliptiques. (29-38).

Cayley (*A.*). — Sur un système d'équations se rattachant au problème de Malfatti. (38-42).

Tanner (*H.-W.-Lloyd.*). — Sur la résolution de certaines équations aux différentielles partielles du second ordre à plus de deux variables indépendantes. (43-60).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une identité de fonctions elliptiques. (61-66).

Clifford (*W.-K.*). — Sur le mouvement libre d'un système rigide qui n'est soumis à aucune force, dans un homaloïde n-uple. (67-70).

Rayleigh (lord). — Sur la solution approximative de certains problèmes relatifs au potentiel. (70-75).

Tanner (*H.-W.-Lloyd*). — Résolution des équations aux différentielles partielles du second ordre à un nombre quelconque de variables, quand il existe une intégrale première générale. (75-90).

Wolstenholme. — Sur des théorèmes relatifs aux cubiques circulaires qui sont les inverses d'une lemniscate par rapport à ses sommets. (91-100).

Spottiswoode (*W.*). — Sur les déterminants de nombres alternés. (100-112).

Muir (*Th.*). — Sur la transformation de la série hypergéométrique de Gauss en fraction continue. (112-118).

Hammond (*J.*). — Sur la somme des produits de r termes différents d'une série. (119-135).

Cayley (*A.*). — Sur le mouvement *three-bar*. (136-166).

Cayley (*A.*). — Sur la sextique bicursale. (166-172).

Hermite (*Ch.*). — Sur un théorème d'Eisenstein. (173-175; fr.).

Sturm (*R.*). — Sur les pinceaux corrélatifs. (175-194).

Smith (*H.-J.-St.*). — Note sur la théorie de l'équatio des formes quadratiques binaires de déterminant p 208).

Smith (*H.-J.-St.*). — Sur la valeur d'un certain déterm métique. (208-212).

Kempe (*A.-B.*). — Sur une méthode générale pour courbes planes du $n^{ième}$ degré au moyen d'un systè (213-216).

Roberts (*S.*). — Nouvelle Note sur le mouvement d'u certaines conditions. (216-225).

Clifford (*W.-K.*). — Note sur la Communication intit la transformation des fonctions elliptiques ». (225-2

Smith (*H.-J.-St.*). — Sur un problème d'Eisenstein. invariants simultanés de deux coniques ou de deux — Sur l'équation P × D = const. d'une ligne gé l'ellipsoïde. (237-241).

PUBLICATIONEN DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT.

Indépendamment du *Vierteljahrsschrift*, l'*Astronomische Gesellsc* Berlin en 1863, et dont le siége est à Leipzig, publie à des intervalle et dans le format in-4°, des Mémoires qui, par le développement mathématiques qu'ils comportent ou le grand nombre de chiffres qu peuvent s'accommoder des dimensions restreintes de l'in-8°. — Cett moires est comprise sous le nom générique de *Publicationen der* *Gesellschaft*; elle se compose aujourd'hui des fascicules suivants :

I. *Tables auxiliaires pour le calcul des perturbation par Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Ura tune* pendant les années comprises entre 1830 et 1 (82 p.).

Ces Tables donnent, pour l'équinoxe moyen de 1830 et de dix e coordonnées elliptiques moyennes x', y', z' des planètes précédente de la forme $1600\,\frac{m' k^{2\prime} x}{z'^{3}}$; elles ont été calculées par une réunion d'a

posée de MM. Zöllner, Möller, Hänsel, Engelmann, Bruhns, Schönfeld, Oertel, Zech, Hopff, Krüger et Peters. C'est le Dr Bruhns qui a été chargé de la publication.

II. *Lesser* (*Otto*). — Tables de Métis (9), avec les perturbations par Jupiter et Saturne. 1865. (56 p.).

Ces Tables s'étendent à la période de 1848 à 1885.

III. *Weiler* (*A.*). — Sur le problème des trois corps en général, et en particulier sur son application à la théorie de la Lune, 1866. (90 p.).

IV. *Hoüel* (*G.-J.*). — Tables pour la réduction du temps en parties décimales du jour. 1866. (28 p.).

Une première Table donne à simple vue le nombre de jours écoulés entre le zéro janvier de l'année zéro de l'ère vulgaire et une date quelconque du calendrier grégorien; une seconde Table donne à la seconde ronde la fraction décimale de jour correspondante et il ne reste à faire d'interpolation que pour les fractions de secondes.

V. *Auwers* (*A.*). — Réduction des observations d'étoiles fondamentales faites de 1803 à 1805 à l'instrument des passages de l'Observatoire de Palerme, et calcul de leurs ascensions droites pour 1805. 1866. (104 p.).

VI. *Powalky, Tietjen, H. Romberg, Brunn, E. Becker* et *P. Lehmann*. — Coordonnées écliptiques de Jupiter (d'après les Tables de Bouvard), et composantes de la force perturbatrice, de 1770 à 1830. 1866. (24 p.).

VII. *Auwers* (*G.-F.-J.-Arthur*). — Calcul des éléments de l'orbite de Sirius. 1868. (158 p.).

Ce n'est pas la première fois que M. A. Auwers s'occupe des mouvements de Sirius; déjà en 1861, il avait publié sur cette question un important Mémoire dans lequel il avait déduit des variations observées dans la déclinaison de cet astre les éléments d'une orbite approchée de ce corps. La découverte du satellite, faite en 1862 par Alvan Clark, est venue confirmer les prévisions de la théorie et donner une base certaine au calcul des mouvements de l'astre, considéré comme la composante principale d'un système d'étoile double. Dans le Mémoire actuel, M. Auwers a repris les observations d'ascensions droites ou de déclinaisons relatives, faites de 1751 jusqu'à la fin de 1863 à Greenwich, ou dans les principaux observatoires de l'Europe, et, après les avoir réduites à nouveau, il en a, par la comparaison avec un premier système d'éléments, déduit 119 positions normales. Ces positions ont ensuite servi au calcul d'un second, d'un troisième et enfin d'un quatrième système d'éléments, qui représentent exactement les ascensions droites et les déclinaisons

observées. Ces éléments sont

$$\begin{aligned} T &= 1843,275, \\ u &= 49,399, \\ e &= 0,6148, \quad \varphi = 37^\circ\, 56',2, \\ \Omega &= 61^\circ 57',8, \\ \varpi - \Omega &= 18.\ 54,5, \\ i &= 47.\ \ 8,7, \\ a &= 2'',3307. \end{aligned}$$

Mouvement rétrograde.

Ils donnent d'ailleurs par le calcul des positions qui s'accordent avec les obse tions directes du satellite, faites en Amérique et en Europe depuis 1862 j qu'en 1866.

VIII. *Schjellerup (H.-C.-F.-C.).* — **Positions approchées po 1856,0 des étoiles fixes dont des observations se trouvent dans tomes I à LXVI des** ***Astronomische Nachrichten.*** **1866. (40 p**

C'est un répertoire destiné à abréger le temps des recherches à faire dans la lumineuse collection du journal astronomique. Pour chaque étoile, dont l'ascens droite et la déclinaison sont données, il renvoie au volume et à la page corresp dante des *Astronomische Nachrichten.*

IX. *Lesser (Otto).* — **Tables de Pomone (32) avec les perturbatio par Jupiter, Saturne et Mars. 1869. (XII-87 p.).**

Ces Tables ont été calculées suivant la méthode donnée par Hansen dans numéros 1596 et 1597 des *Astronomische Nachrichten;* elles s'étendent à la péri comprise en 1854 et 1900.

X. *Becker (E.).* — Tables d'Amphitrite (29) avec les perturbatio par Jupiter, Saturne et Mars. 1870. (XLVIII-106 p.).

Ces Tables, également calculées par les méthodes de Hansen, sont fondées sur éléments déduits des six oppositions observées de 1854 à 1866 ; elles sont appli bles à l'intervalle 1854-1900.

XI. *Winnecke (F.-A.-T.).* — Parallaxe de la seconde des étoil d'Argelander, d'après les observations faites à l'héliomètre Bonn en 1857 et 1858. 1872. (29 p.).

En mai 1857, Argelander fit l'intéressante découverte que l'étoile de 7ᵉ gr deur, dont la position dans le *Durchmusterung* de Bonn est, pour 1855,0 :

$$\text{Æ} = 10^h\, 55^m\, 26^s,6, \quad \delta = +36^\circ 56',3,$$

avait un mouvement annuel de 4",7, et occupait ainsi le troisième rang parmi étoiles à mouvement propre du ciel boréal. La grandeur de ce déplacement pai sait indiquer l'existence d'une parallaxe assez considérable ; c'est elle que M. W necke s'est proposé de déterminer.

Dans ce but, il a comparé la position de cet astre avec celles des deux étoiles

(a) $\alpha = 10^h 54^m 35^s,4$, $\delta = +37° 7',5$; zone 37°, n° 2151,

(b) $\alpha = 10^h 56^m 51^s,8$, $\delta = +36° 36',0$, zone 36°, n° 2150,

qui sont situées l'une au nord et l'autre au sud. Les observations ont été régulièrement faites avec l'héliomètre de Bonn, qui a 72 lignes d'ouverture libre et 8 pieds de foyer, pendant les années 1857 et 1858, et puis à certaines époques déterminées en 1860 et 1868.

Une première discussion de toutes ces mesures, publiée dans le volume XLVIII, page 391, des *Astronomische Nachrichten*, avait donné pour parallaxe

$$\pi = +0'',511, \text{ erreur probable } \pm 0'',0152.$$

En admettant cette parallaxe, il a été possible de calculer *a priori* quelle devait être aux diverses époques la situation relative de l'étoile considérée et des étoiles (*a*) et (*b*). La comparaison des résultats théoriques avec les résultats directs de l'observation a alors conduit à des équations de condition dont la solution a définitivement donné à M. Winnecke

$$\pi = +0'',511, \text{ erreur probable } \pm 0'',01138.$$

La distance de l'étoile à la Terre est alors 412000 fois celle de la Terre au Soleil, et sa lumière doit nous arriver en 6 $\frac{1}{2}$ ans.

XII. *Weiler* (*A.*). — Essai d'une nouvelle théorie des perturbations, et son application au mouvement de la Lune. 1872. (178 p.).

XIII. *Spörer* (*G.*). — Observations des taches solaires faites à Anclam, 1874. (161 p., 23 pl.).

Les observations de taches solaires publiées par Carrington embrassent la période comprise entre le 9 novembre 1853 et le 9 mars 1861. Les observations de M. G. Spörer commencent en janvier 1861 et ont été poursuivies jusqu'en octobre 1871 ; elles peuvent donc être considérées comme la suite naturelle des premières. La publication en est d'ailleurs faite sur un plan identique au plan autrefois adopté par l'astronome anglais, en sorte qu'au point de vue même de la discussion rien ne distingue l'une de l'autre les deux séries. Le volume allemand, comme le volume anglais, renferme des tableaux numériques ou des cartes de deux espèces : dans les premiers, on trouve, pour chaque période de rotation du Soleil, la latitude héliographique moyenne des taches ; dans les seconds, M. Spörer a donné la distribution des taches suivant leur longitude héliographique.

Les procédés d'observation sont la seule chose qui distingue les observations de M. Spörer de celles de Carrington. Pour fixer la position des taches, l'astronome allemand s'est servi, jusqu'en 1865, d'une lunette de 3 $\frac{1}{2}$ pieds de foyer pourvue d'un micromètre annulaire, et à partir de cette époque d'un instrument plus grand de 10 pieds de longueur. A Redhill, M. Carrington avait un instrument un peu moindre que 4 pieds de foyer seulement. Les deux astronomes ont d'ailleurs observé en projetant sur un carton l'image du Soleil et de ses taches, et en relevant leurs positions apparentes soit à l'aide des passages à un micromètre de Bradley (Carrington), soit à l'aide d'un système de coordonnées rectangulaires tracées à l'a-

vance sur l'écran (Spörer). Dans l'un et l'autre cas, les positions héliocentriques ont ensuite été obtenues par des formules bien connues dont des Tables auxiliaires simplifient beaucoup l'emploi.

Les 90 rotations solaires étudiées par l'astronome d'Anclam conduisent aux deux conséquences suivantes :

1° Les taches sont plus fréquentes dans l'hémisphère sud que dans l'hémisphère nord. Tandis qu'en 1856 le minimum des taches se continue encore dans l'hémisphère nord, leur nombre augmente déjà dans l'hémisphère sud, et un maximum relatif, qui ne sera point plus tard compensé à l'époque du maximum absolu de 1860, se trouve atteint. Les maxima ou minima se produisent d'ailleurs plus tôt dans l'hémisphère sud que dans l'hémisphère nord.

2° La latitude héliographique moyenne des taches est sensiblement la même dans les deux hémisphères, soit $15°\frac{1}{2}$.

M. Spörer a enfin déterminé, d'après ses propres observations, quelle était la vitesse de la rotation solaire aux diverses latitudes ; ses résultats sont en général un peu plus faibles que ceux de Carrington, et surtout leur loi de variation est un peu différente, en sorte que leur ensemble ne paraît pas pouvoir être représenté par la même formule.

Pour représenter les vitesses angulaires de rotation du Soleil, M. Spörer essaye diverses formules.

La première qu'il cherche à adapter à ses nombres est, en désignant par ξ la vitesse angulaire diurne et par b la latitude,

$$\xi = x + y \sin b + z \cos b,$$

x, y, z étant trois constantes à déterminer. L'expérience prouve que y est très-petit et que la formule se réduit pratiquement à la forme déjà autrefois employée par M. C.-H.-F. Peters

$$\text{(I)} \qquad \xi = x + z \cos b.$$

La formule proposée par M. Faye, $\xi = m - n \sin^2 b$, peut s'écrire sous la forme, plus commode pour le calcul,

$$\text{(II)} \qquad \xi = x + y \cos 2 b.$$

Enfin, d'après les travaux et les idées théoriques de Zöllner, cette fonction devrait avoir la forme

$$\text{(III)} \qquad \xi = x \sec b + y \cos b.$$

De toutes ces formules, c'est la première qui représente le mieux les observations, et elle doit alors s'écrire

$$\xi = 512', 88 + 347', 88 \cos b,$$

ce qui donne pour valeurs des rotations angulaires du Soleil aux diverses latitudes les quantités suivantes :

Latitude.	Vitesse angulaire.	Latitude.	Vitesse angulaire.
0°	860′,8	25°	828′,2
5	859,4	30	814,1
10	855,5	35	797,8
15	848,9	40	779,3
20	839,8	45	758,9
25	828,2	50	736,5

Ceux de ces nombres qui se rapportent aux latitudes très-petites ou bien aux latitudes supérieures à 35 degrés sont un peu plus faibles que ceux de Carrington.

G. R.

TIDSSKRIFT FOR MATHEMATIK. Udgivet af H.-G. ZEUTHEN (¹).

Tome V; 1875.

Buchwaldt (*F.*). — Nouvelle méthode pour la différentiation avec des indices quelconques. (1-21, 95-96 et 128).

Généralisation de la méthode de Liouville. L'auteur a traité, depuis, le même sujet avec plus de développements. (*Bulletin de l'Académie de Copenhague*, 1876).

Petersen (*L.*). — Quelques propositions sur les figures homographiques. (21-29).

Lorsqu'une figure plane se transforme en restant toujours homographique à une figure donnée et ayant avec elle des points communs fixes, les trajectoires de tous ses points seront homographiques entre elles, aux trois mêmes points communs. Après avoir énoncé et prouvé ce théorème, l'auteur étudie les enveloppes des droites de la figure variable, les trajectoires de ses points étant connues, et réciproquement.

Petersen (*J.*). — Quelques propositions géométriques. (30-33).

Solution de quelques problèmes.

Steen (*A.*). — Démonstration modifiée d'un théorème de Jacobi. (33-34).

Ce théorème est le cinquième de la *Nova Methodus*, exprimé par la formule

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] = 0.$$

La démonstration, à laquelle l'auteur donne une nouvelle forme, se trouve dans le Mémoire d'Imschenetsky, sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre.

(¹) Voir *Bulletin*, I, 179, 369; V, 277; VII, 29; VIII, 137.

Steen (*A.*). — Nouvelle récréation mathématique. (35-37

Kryger (*Chr.*). — Exposition de la méthode de d'Alemb
l'intégration de deux équations différentielles linéaires
nées. (38-40).

Lorenz (*L.*).—Remarques sur un problème d'équilibre. (4

Tychsen (*C.*). — Sur le calcul des rentes viagères et des as
sur la vie. (49-80 et 97-120).

En prenant pour point de départ les principes exposés par M. Wool
un Mémoire inséré au t. XV de l'*Assurance Magazine*, l'auteur dévelop
mathématique des procédés suivis par les actuaires. Il s'occupe en partic
valeurs momentanées des assurances sur une seule vie; 2° des primes à
ces assurances; 3° du calcul de la valeur de la police; 4° des valeurs m
des assurances, combinées sur deux vies; 5° des primes à payer pour ces
6° du calcul de la valeur de la police. L'auteur a joint à son Mémoire
des Tables numériques dont on se sert pour exécuter les calculs des
assurances.

Lorenz (*L.*). — Équations fondamentales de la Cinémati
système de points. (81-86).

Développement des équations qui indiquent les lois générales de tous
ments dans l'intérieur d'un corps, indépendamment des forces. Ce
résultent d'une généralisation des équations dynamiques ordinaires.

Holst (*E.-B.*). — Propriété d'une figure sphérique de
toute la surface de la sphère au moyen de ce qu'on nom
réflexion répétée. (87-95).

Deux points de la surface sphérique sont dits les *images* l'un de l'au
port à un petit cercle, lorsque la droite qui les joint passe par le p
cercle par rapport à la sphère. L'auteur cherche le triangle dont les ima
sives, prises toujours par rapport à l'un des côtés, peuvent remplir tout
sphérique. Il résout ce problème, en le réduisant, au moyen de la transfo
rayons vecteurs réciproques, à celui où les petits cercles sont remplac
grands cercles.

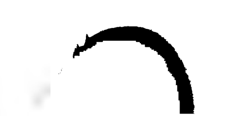
Pedersen (*M.*). — Appareil mécanique pour la tris
l'angle. (123-125).

Steen (*A.*). — Détermination des courbes gauches au moy
relation entre les rayons de courbure et de torsion. (12

Extrait abrégé du Mémoire de M. Molins sur le même sujet. (*Jour
ville*, 2e série, t. XIX).

Johanssen (*F.*).—Sur la composition des vibrations. (137

L'auteur fait usage d'une représentation graphique.



Madsen (*V.-H.-O.*). — Remarque sur la méthode dialytique d'élimination de Sylvester. (144-145).

Madsen (*V.-H-O.*). — Détermination des foyers et de l'excentricité d'une section conique. (146-147).

Kryger (*Chr.*). — Exposition de l'intégration des équations aux différentielles totales. (147-149).

G. — Sur une classe d'équations différentielles. (149-150).

Crone (*C.*). — Sur le partage des tangentes doubles dans les divers systèmes de coniques quatre fois doublement tangentes à certaines courbes du quatrième ordre. (161-176).

Cette discussion se joint à celle de M. Zeuthen sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre et sur la réalité de leurs différentes tangentes doubles (¹). On sait qu'il existe 63 systèmes de coniques tangentes quatre fois à une courbe du quatrième ordre, et chacun d'eux contient six coniques composées de deux tangentes doubles. M. Crone discute, par des considérations appartenant à la Géométrie de situation, la distribution des tangentes doubles réelles aux différents systèmes. Ses études ne s'appliquent immédiatement qu'aux courbes à quatre ou à trois branches réelles; mais les cas qui restent à traiter ne sont pas difficiles.

Dans une Note ajoutée à cet article (p. 190-192; *voir* plus bas), M. Zeuthen a montré la connexité de cette discussion avec celle de la distribution des droites réelles d'une surface du troisième ordre aux différents doubles-six.

Möller (*C.-F.-C.*) et *Holten* (*C.*). — Sur la divisibilité d'un nombre par un nombre premier quelconque. (177-180).

Juel (*C.*). — Remarques sur deux problèmes de Géométrie. (180-182).

Zeuthen (*H.-G.*). — Courbes gauches où il existe un rapport constant entre les rayons de courbure et de torsion. (182-183).

Green (*A.*). — Démonstration géométrique de la formule $\rho = \frac{rdr}{dp}$, ρ étant le rayon de courbure, r le rayon vecteur, p la distance de l'origine à la tangente. (188-189).

Zeuthen (*E.*). — Démonstrations géométriques de quelques formules de Trigonométrie. (189-190).

(¹) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 138 et 213.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur les coniques quatre fois doublement tangentes à des courbes du quatrième ordre. (190-192).

Prix proposé par la Société Royale des Sciences de Copenhague pour 1876. — Théorie nouvelle et plus étendue de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right) = 0.$$

Prix de Mathématiques de l'Université de Copenhague pour 1875. — En appelant *puissance de deux cercles* la différence entre le carré des distances des centres et la somme des carrés des rayons, on peut déterminer un cercle quelconque dans un plan par les rapports entre les puissances x_1, x_2, x_3, x_4, que l'on forme avec quatre cercles fixes dans ce même plan. Sur ces cercles fixes, on fait l'hypothèse (qui est encore possible quand on prend des cercles de rayons imaginaires) que ces cercles pris deux à deux donnent des puissances nulles. On demande que la détermination de cercles ainsi obtenue soit appliquée à l'étude des figures planes composées de cercles, qui doit comprendre une théorie développée des systèmes de cercles, représentés par des équations homogènes du premier degré entre x_1, x_2, x_3, x_4, avec des exemples de déduction des propriétés des systèmes de cercles représentés par des équations du second degré. (*Voir* Darboux : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*. Paris, 1873, Note X).

Tome VI; 1876.

Petersen (*Julius*). — Sur les transcendantes du Calcul intégral (1-9).

Ce Mémoire se rattache à des recherches antérieures de MM. Hansen, Lorenz et Steen [1], qui ont, de leur côté, pris pour point de départ celles de Liouville. L'auteur appelle *hyperalgébrique* une fonction d'une ou de plusieurs variables, dont les dérivées sont algébriques. Si les variables indépendantes de cette fonction sont elles-mêmes des fonctions algébriques d'autres variables, elle sera une fonction hyperalgébrique *du premier ordre* de celles-ci; si les variables indépendantes sont elles-mêmes des fonctions hyperalgébriques du premier ordre, la fonction sera du

(1) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 140.

second ordre, et ainsi de suite. L'auteur démontre que, si l'équation $\frac{dy}{dx} = P$, P étant une fonction algébrique de x et de y, a pour intégrale une équation $u = c$, où u peut s'exprimer par la fonction dont nous venons de parler, il sera possible d'exprimer u par une somme de fonctions hyperalgébriques du premier ordre et de fonctions algébriques. Il indique aussi les modifications à l'aide desquelles on peut rendre ce théorème applicable au cas où P contient des transcendantes.

Petersen (*J.*). — Deux formules de la théorie des fonctions symétriques. (9-10).

Démonstration très-simple de la formule de Waring et de celle qui sert à résoudre le problème inverse.

Westergaard (*H.*). — Sur la fortune morale et l'espérance morale. (11-15).

Discussion mathématique de questions appartenant à l'Économie politique.

Hommel (*L.-L.*). — Sur la divisibilité d'un nombre par un nombre premier quelconque. (15-19).

Tychsen (*C.*) et *Crone* (*C.*). — Solution de questions proposées. (19-27).

Lorenz (*L.*). — Sur l'exécution des calculs d'après la méthode des moindres carrés. (33-37).

Westergaard (*H.*). — Un problème du calcul des opérations. (37-41).

Buchwaldt (*F.*). — Addition au Mémoire intitulé : « Nouvelle méthode pour la différentiation avec des indices quelconques. (41-56).

M. Westergaard, dans son article, critique la définition donnée par le Mémoire de Buchwaldt, dans le tome précédent du *Tidsskrift*; M. Buchwaldt répond à cette critique.

Seidelin (*C.*). — Construction du centre de courbure des courbes planes engendrées par le mouvement d'une figure invariable dans le plan. (57-63).

Seidelin (*C.*). — Démonstration de la construction donnée par Delabar des axes d'une ellipse. (63-64).

Mansion (*P.*). — Note sur une classe de courbes unicursales. (64-66; fr.).

Étude analytique de quelques propriétés des courbes d'ordre n à un point $(n-1)$-uple.

$$[illegible]$$

application de la même méthode à d'autres équations.

Problèmes d'examen. (73-79 et 84-96).

Lucas (*Éd.*). — Sur la trisection de l'angle à l
(Traduction). (81-82).

Schlegel (*L.*). — Solution élémentaire d'un probl
(82-84).

Crone (*C.*). — Étude sur un système particuli
des figures planes composées de cercles. (97-1

Les coordonnées, analogues à celles dont se sert M. Darbo
son Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de sur*
déterminer les sphères, servent à déterminer les cercles d
puissance de deux cercles le carré de la distance des centre
carrés des rayons, on prend pour coordonnées d'un cercle
sances qu'il forme avec quatre cercles fixes et orthogonaux
qui le présent Mémoire a valu un prix, proposé par l'Unive
ses étudiants et à ses anciens élèves pour la meilleure soluti
tuelle, fait usage notamment des relations qui ont lieu entre
posée de cercles et une figure dans l'espace où les coordonn
mêmes valeurs que celles du cercle correspondant de la figu

Lorenz (*L.*). — Sur le développement des fon
suivant des fonctions données. (129-144).

L'auteur s'occupe du développement d'une fonction $f(x)$
mule générale

$$f(x) = \Sigma_k A_k F(x, k), \quad A_k = \int_a^b f(x') \varphi(x', k)$$

Les coefficients étant déterminés dans l'hypothèse que le dével
il s'agit de discuter les conditions de la *validité* du développe

équation $q(y=0.)$ Il trouve que les règles de la décomposition des fractions rationnelles seront applicables à des fonctions de la forme $\frac{p(y)}{q(y)}$, dont on peut développer le numérateur et le dénominateur en séries infinies convergentes suivant des puissances de y à exposants entiers et positifs, si la quantité

$$\left[\frac{p(\rho e^{\theta i})}{q(\rho e^{\theta i})}\right]_{\rho=\infty}$$

est en général égale à zéro.

Les théorèmes trouvés sont appliqués au développement d'une fonction en fonctions de Bessel de première espèce $J_n(r)$. A côté du développement connu, de la forme $f(r)=\Sigma_k A_k J_n(kr)$, où les valeurs de k sont les racines de $J_n(r)=0$, on trouve le suivant, qui forme le complément du premier, $f(r)=\Sigma_{k'} B_{k'} J_n(k'r)$, où les valeurs de k' sont les racines de $\frac{dJ_n(r)}{dr}=0$.

Hansen (P.-C.-V.). — Sur la possibilité d'intégrer par des fonctions algébriques certaines équations différentielles linéaires du second ordre. (144-164).

Toutes les équations étudiées sont binômes. Une partie des résultats est déjà connue (*voir* les travaux de MM. Liouville et Steen); d'autres sont nouveaux. L'auteur se sert des méthodes de MM. Briot et Bouquet. La marche est donc bien différente de celle qui vient de conduire M. Klein aux conditions générales de l'intégrabilité algébrique des équations linéaires du second ordre. *Voir* une courte Communication à la *Société d'Erlangen*, 28 juin 1876.

Tychsen (C). — Remarque sur une équation aux dérivées partielles. (165-168).

Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}{\sin\theta\,\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+n(n+1)u=0,$$

qui a été intégrée par M. Donkin à l'aide de la méthode symbolique. M. Tychsen parvient au même résultat sans faire usage de cette méthode.

Zeuthen (H.-G.). — Sur l'histoire des Mathématiques. I. Le *trapèze* de Brahmegupta. (168-174 et 181-191).

Hankel, dans son intéressante *Histoire des Mathématiques*, fait la remarque que la déduction des théorèmes géométriques de Brahmegupta se présente d'une manière très-naturelle, si l'on regarde les constructions, indiquées à la fin de la Section, des figures dont s'occupe le géomètre indien, comme les *définitions* de ces figures, ce qu'il montre par des exemples. L'auteur du présent article, suivant ces indications, en a déduit les théorèmes relatifs aux figures dites *trapèzes*. Le théorème sur le rayon du cercle circonscrit à un triangle, — qui ne peut, selon l'auteur, être trouvé par les considérations de Ch[illegible] par Hankel comme exemple des méthodes des Hindous. [illegible] sans qu'on ait recours au théorème sur les [illegible]dous, qui ne se ser-

vent même pas, autant que sache l'auteur, du mot *angle*. L'auteur suppose que le trapèze a servi à la déduction de la formule $\sin(x+y)$, qui résulte immédiatement de la construction de cette figure.

Thiele (*T.-N.*). — Sur la représentation plane des cosinus des nombres complexes. (177-180).

Par la substitution de $x+iy=\cos(X+iY)$, on fait une transformation de deux systèmes de droites rectangulaires entre eux en des systèmes d'ellipses et d'hyperboles confocales.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, herausgegeben von Dr. O. SCHLÖMILCH, Dr. E. KAHL und Dr. M. CANTOR. In-8 (¹).

Tome XX, fascicule 4-6; 1875.

Beez (*K.*). — Sur la représentation conforme des *variétés* d'ordre supérieur. (253-270).

Weiler (*A.*). — Intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre dans toute leur généralité. (271-299).

Helmert. — Sur le calcul de l'erreur probable, d'après un nombre fini d'erreurs vraies d'observation. (300-303).

Van Geer. — Sur les coordonnées centrales et elliptiques. (304-311).

Milinowski. — Démonstration élémentaire d'un théorème de Fermat. (311-314).

Weihrauch (*K.*). — Nombre des solutions d'une équation indéterminée pour un cas particulier de coefficients non premiers. (314-316).

Wiener (*Chr.*). — Solution directe du Problème : Placer sur un cône de révolution une section conique donnée par cinq points ou par cinq tangentes. Remplacement des foyers par des cercles; lieu des sommets de ce cône de révolution. (317-325).

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 59, 275; t. II, p. 137; t. III, p. 290; t. IV, p. 283; t. VI, p. 247; t. VIII, p. 185; t. IX, p. 238, 280.

Matthiessen (*L.*). — Sur les séries normales des dispersions relatives dans le spectre visible, comme critérium de la sûreté des mesures des constantes optiques. (326-340).

Kötteritzsch (*Th.*). — Sur le potentiel logarithmique. (341-361).

§ 1. Caractère de la transformation. § 2. Caractérisation des surfaces de niveau. § 3. Exemples des différents cas du paragraphe précédent. (*A suivre.*)

Mangoldt (*H. v.*). — Sur un passage des Œuvres posthumes de Gauss relatif à la moyenne arithmétique et géométrique. (362-369).

Stolz (*O.*). — Démonstration de quelques théorèmes sur les séries de puissances. (369-376).

Baur (*C.-W.*). — Aires des sections parallèles des surfaces réglées. Mouvement du centre de gravité d'un système libre de points matériels dans un plan. Volume du prismatoïde. (376-380).

Burmester (*L.*). — Études cinématiques et géométriques du mouvement d'un système variable suivant une loi donnée. (3e *Partie*). (381-422).

Voir *Zeitschrift*, XIX, 154, 465. — *Bulletin*, VIII, 187, 190.

Beez (*R.*). — Sur la théorie de la mesure de la courbure des *variétés* d'ordre supérieur. (423-444).

Becker (*J.-C.*). — Les fondements de la Géométrie. (445-456).

L'auteur croit pouvoir démontrer le *postulatum d'Euclide* par des considérations sur la nature de l'espace et sur l'infini.

Schwering (*K.*). — Sur une espèce de courbes transcendantes qui sont fermées. (457-467).

Seeliger (*H.*). — Remarques sur les déterminants symétriques, et application de ces déterminants à un problème de Géométrie analytique. (467-474).

Thomae (*J.*). — L'intégration par parties. (475-478).

Sohncke. — Liaison entre la formule donnée par Reye pour la mesure barométrique des hauteurs et la formule ordinaire. (478-480).

PARTIE HISTORIQUE ET BIBLIOGRAPHIQUE.

Günther (*S.*). — Histoire des Mathématiques en Allemagne au xve siècle. (1-14).

Steinschneider (*M.*). — Le Pseudo-Trithème et Cam. Leonardi. (25-27).

Curtze (*M.*). — Remarques sur le Mémoire précédent de M. Günther. — Copernic a-t-il ou non biffé lui-même l'Introduction de son livre *De revolutionibus?* (57-62).

Noether (*M.*). — Otto Hesse. (Né à Königsberg le 22 avril 1811, mort à Munich le 4 août 1874). (77-88).

Cantor (*M.*). — Gottfried Friedlein. (Né à Ratisbonne le 5 janvier 1828, mort à Hof le 31 mai 1875). (109-113).

Günther (*S.*). — Additions à un précédent travail d'Histoire mathématique. (113-120).

Tome XXI; 1876.

Hesse (*O.*). — Leçons sur la Géométrie analytique des sections coniques. (1-27).

Ces deux Leçons, tirées des papiers posthumes de l'auteur, font suite à celles qui ont été publiées dans ce Journal en 1874 (t. XIX, p. 1-52. — Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 185):

XXIIIe *Leçon :* Pôles harmoniques et polaires harmoniques. Couples de tangentes et couples de points d'une conique.

XXIVe *Leçon :* Résolution de deux équations du second degré à deux inconnues.

Korteweg (*J.*). — Sur quelques applications d'un cas particulier de l'affinité homographique. (28-37).

Matthiessen (*L.*). — Sur les figures acoustiques d'une lame carrée de liquide et d'une masse cubique gazeuse. (38-46).

Giesen (*A.*). — Sur une manière simple de traiter les problèmes d'Hydrodynamique, dans lesquels on considère des ellipsoïdes de faibles excentricités. (47-72).

1re *Partie :* Ellipsoïdes homogènes. — § 1. Formules approchées pour le potentiel d'un ellipsoïde homogène de faibles excentricités. — § 2. Forme d'un satellite fluide homogène, tournant autour d'un corps central. — § 3. Marées. — § 4. Oscil-

lations d'une masse fluide homogène, dont les particules sont soumises uniquement à leur attraction mutuelle.

2e *Partie :* Ellipsoïdes non homogènes. — § 1. Formules approchées pour le potentiel d'un ellipsoïde non homogène de faibles excentricités. — § 2. Figure d'équilibre d'un système de fluides, entourant un noyau ellipsoïdal, lorsque le système tourne autour de l'axe des z avec une petite vitesse. — § 3. Relation entre la densité et l'aplatissement des couches terrestres intérieures. — § 4. Relation entre l'attraction et l'aplatissement de la surface terrestre.

Hesse (*O.*). — Problème. (73-74).

Lieu d'un point p du plan, lorsque le couple de points correspondant sur la droite fondamentale se déplace, de manière que le segment compris entre ces derniers points sont de grandeur constante.

Schlömilch (*O.*). — Sur les surfaces jouissant de propriétés données. (75-79).

Schlegel (*V.*). — Théorèmes sur la décomposition d'un nombre en une somme de carrés. (79-80).

Geisenheimer. — Construction des centres de courbure de l'ellipse et de l'hyperbole. (80).

Hauck (*G.*). — Principes d'une théorie axonométrique générale de la représentation perspective. (81-99 et 402-426).

§ 1. Exposition. — § 2. Calcul des constantes fondamentales. — § 3. Procédé pratique. Échelles de réduction. — § 4. Élimination des constantes d'orientation. — § 5. Choix arbitraire des constantes de réduction. — § 6. Cas particuliers. — § 7. Passage à la perspective parallèle. — § 8. Théorèmes généraux sur la collinéation. — § 9. Exposition axonométrique de la perspective relief. — § 10. Perspective pittoresque. Remarque sur l'action optique. — § 11. Système oblique de coordonnées des objets. — § 12. Collinéation projective. — § 13. Transformation dans le système cartésien coaxial de coordonnées. Représentations collinéaires d'un ellipsoïde. — § 14. Détermination de la collinéation par trois relations linéaires entre les coordonnés de deux points correspondants. — § 15. Collinéation entre des systèmes plans. — § 16. Conclusion. Coordonnées de M. Chasles et coordonnées projectives.

Thomae (*J.*). — Un cas dans lequel l'équation différentielle

$$x(1-x)(1-kx)y''' + (u+vx+wkx^2)y'' + (v+w'kx)y' + w''ky = 0$$

peut s'intégrer. (100-115).

Gosiewski (*W.*). — Sur l'hypothèse fondamentale de la Mécanique moléculaire. (116-125).

Mees (*R.-A.*). — Sur le calcul de l'erreur probable d'un nombre fini d'observations. (126-128).

Holzmüller (*G.*). — Étude élémentaire de la cycloïde. (128-129).

Schwering (*K.*). — Détermination du nombre des tangentes doubles des courbes planes dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles d'un paramètre. (130-133).

Schwering (*K.*). — Remarque sur la courbe $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$. (133-134).

Weihrauch (*K.*). — Sur la construction d'un déterminant unimodulaire. (134-137).

Thomae (*J.*). — Sur l'ellipse inscrite et l'ellipse circonscrite à un triangle. (137-139).

Reuschle (*C.*). — Sur les courbes podaires. (139-141).

Mertens (*F.*). — Sur les critériums des maxima et des minima des intégrales définies. (142-144).

Böttcher (*J.-E.*). — Sur le mouvement d'un point sur une sphère, sous l'action de forces situées dans un plan méridien et ayant un potentiel exprimé par $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Bx_3^2$. (145-177).

I. Le problème. Sa réduction aux quadratures. — II. Remarques générales. Deux cas particuliers. — III. Discussion générale des racines. Réduction à la forme normale. — IV. La latitude géographique β. — V. La longitude géographique φ. — VI. La vitesse. — VII. Dépendance mutuelle des constantes.

Günther (*S.*). — Sur les fractions continues ascendantes. (178-191).

Helmert. — Sur la probabilité des sommes de puissances des erreurs d'observation, et sur certaines questions qui s'y rattachent. (192-218).

§ 1. Formules générales. — § 2. Probabilité constante des erreurs. — §§ 3 et 4. Loi des erreurs de Gauss. — § 5. Loi quelconque de l'erreur; cas d'un nombre très-grand n d'observations. — § 6. Probabilité constante des erreurs, n étant très-grand. — § 7. Loi des erreurs de Gauss, n étant très-grand. — § 8. Probabilité constante des erreurs dans diverses hypothèses. — § 9. Loi des erreurs de Gauss dans diverses hypothèses. — § 10. Loi des erreurs de Gauss; erreur probable des hypothèses.

Mischer (*R.*). — Mouvement des points matériels sur des orbites mobiles assignées. (219-224).

Thomae (*J.*). — Sur la définition de l'intégrale définie comme limite d'une somme. (224-227).

Müller (Felix). — Sur une récréation arithmétique. (227-228).

Biehringer. — Sur les courbes tracées sur les surfaces de révolution. (*Suite*). (229-264).

Voir *Zeitschrift*, t. XVIII. — *Bulletin*, t. VI, p. 252.

Müller (R.). — Relations entre la courbe méridienne et le contour apparent des surfaces de révolution représentées orthogonalement. (265-277).

Schwering (K.). — Sur un système particulier de coordonnées de lignes. (278-286).

Dahlander (G.-R.). — Sur la représentation géométrique du changement d'état d'un corps par l'action de la chaleur, d'après la théorie mécanique de la chaleur. (287-294).

Lüroth (J.). — Sur la démonstration donnée par Bertrand de l'axiome des parallèles. (294-297).

Mertens (F.). — Le problème de Malfatti pour le triangle rectiligne. (297-300).

Weinmeister (J.-Ph.). — Le système des coordonnées polaires de droites dans le plan. (301-324).

Holzmüller (G.). — Géométrie, affinité et cinématique lemniscatiques, établies à l'aide de la fonction d'argument complexe $Z = \sqrt{z}$. (325-363).

§ 1. Remarques préliminaires. — § 2. Caractère général de la représentation $Z = \sqrt{z}$. — § 3. Transformation de la droite et du cercle par la représentation $Z = \sqrt{z}$, et coordonnées lemniscatiques généralisées qui en résultent. — § 4. La géométrie du cercle, de la droite et des figures projectives transformée au moyen de la fonction $Z = \sqrt{z}$. — § 5. Réciprocité lemniscatique et affinité lemniscatique. — § 6. Quelques théorèmes et problèmes résultant de l'affinité lemniscatique et de sa combinaison avec d'autres affinités. — § 7. Remarques sur la cinématique des systèmes variables lemniscatiquement.

Heilermann. — Remarque sur la résolution des équations biquadratiques. (364-365).

Schlegel (V.). — Divisibilité d'un nombre donné par un autre nombre. (365-366).

toutes les forces perturbatrices qui peuvent avoir une influence, moins, pendant la période écoulée depuis l'année 1848.

Année 1878. Reprendre le problème des perturbations en faisan d'exponentielles analogues aux fonctions Θ.

Année 1879. Constater, en s'appuyant sur des expériences rig siques, la production d'électricité dans les cristaux par l'élévation de la température (thermo-électricité, pyro-électricité, électric et les changements de la distribution électrique normale qui résul à leur formation ou des lésions extérieures.

Beez (*R.*). — Sur la théorie de la mesure de la cou riétés d'ordre supérieur. (*Suite*). (373-401).

Voir ci-dessus, p. 214.

Milinowski. — Étude synthétique des courbes plane ordre. (427-441).

I. Propriétés générales. — II. Propriétés polaires.

Radicke (*A.*). — Forme simple de représentation elliptiques complètes de première et de seconde 443).

Mertens (*F.*). — Solution analytique du problème (443-448).

Moshammer (*C.*). — Sur la Géométrie de la ligne dr

Hočevar. — Sur les fonctions gamma incomplètes. (4

Schlegel (*V.*). — Deux théorèmes sur le centre de g 451).

Boltzmann (*L.*). — Sur l'histoire du problème de l des ondes aériennes planes de longueur finie. (45

Günther (S.). — Mélanges mathématiques et historiques. (57-64).

I. Les progressions géométriques chez les Arabes. — II. Les carrés magiques chez Gauss.

Hipler (F.). — La Chorographie de Joachim Rheticus. (125-150).

Günther (S.).—Adolph Zeising comme mathématicien. (157-165).

PAMIĘTNIK TOWARZYSTWA Nauk ścisłych w Paryżu [1]. In-4°.

Tome IV; 1874.

Martynowski (A.). — Théorie de la pression des liquides sur les parois planes et courbes. (78 p.).

IIe Partie : Pression sur les parois courbes; suite du Mémoire publié dans le t. III. (Voir *Bulletin*, VII, 158.)

Brandt (C.). — Recherches analytiques relatives aux valeurs des charges accidentelles employées dans le calcul des poutres métalliques. (32 p.).

Franke (J.-N.).—Contribution à la théorie des engrenages. (18 p.).

Kluger (L.). — Théorie de la turbine de Fontaine. (34 p.).

Puchewicz (L.). — Théorie des fonctions de variables complexes. (131 p.).

Ce Mémoire expose la théorie élémentaire des fonctions de variables complexes; il est partagé en deux Chapitres dont le premier contient : les opérations sur les fonctions complexes et leur représentation géométrique, fonction algébrique d'un variable complexe, série de quantités complexes; fonctions exponentielles, trigonométriques, logarithmiques et circulaires des variables complexes. Le deuxième Chapitre renferme les notions générales sur les fonctions complexes et les fonctions périodiques.

Tome V; 1874.

Maszkowski (Ch.). — La perspective projective, résultant des projections orthogonales sur des plans inclinés. (38 p.).

Les constructions fondées sur les principes développés dans ce Mémoire sont

---

[1] *Mémoires de la Société des Sciences exactes à Paris*. — Voir *Bulletin*, t. VI, p. 148. — Les Mémoires sont paginés séparément.

souvent plus faciles à effectuer et représentent les objets en espace sous une forme plus facile à comprendre et plus ressemblante à la nature que les figures projetées orthogonalement.

Gosiewski (*W.-I.*). — Revue critique des diverses théories de la pression dans les gaz. (15 p.).

Wojciechowski (*L.*). — Nouvelle méthode de calcul des déblais et des remblais. (48 p.).

Méthode fondée sur la transformation du polygone représentant un profil en un triangle équivalent. Ce Mémoire a été publié en français dans les *Annales industrielles*, 1875-1876.

Tome VI; 1875.

Martynowski (*A.*). — Pressions exercées sur les appuis des constructions quelconques sur leurs bases. (39 p.).

Formules du calcul des pressions sur les appuis à base polygonale régulière, exprimées en fonction du rayon du cercle circonscrit.

Zajączkowski. — De l'équation différentielle

$$X dx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n = 0,$$

intégrable sous forme d'une équation primitive unique. (14 p.).

Tome VII; 1876.

Gosiewski. — Sur l'hypothèse fondamentale de la Mécanique moléculaire. (8 p.).

Solution du problème suivant : « A quelles conditions doit satisfaire un corps, considéré comme système de points matériels, pour qu'il soit permis, dans l'établissement des équations de son mouvement ou de son équilibre, de différentier et d'intégrer dans toute son étendue, autrement dit pour qu'on puisse le considérer comme une matière homogène? »

Brandt (*C.*). — Recherches analytiques sur les ponts composés d'arcs métalliques. (81 p.).

Chap. I. — Détermination des poussées.

Chap. II. — Détermination des tensions et des pressions.

§ 1. Formules servant à déterminer les tensions et les pressions dans une section quelconque de l'arc.

§ 2. Détermination des tensions maxima sous des charges quelconques.

Chap. III. — Détermination de la position la plus défavorable des charges accidentelles.

Chap. IV. — Applications.

Hertz et *Dickstein*. — Théorie des nombres complexes et de leurs fonctions. I[re] Partie. (60 p.).

Introduction. — Théorie générale des opérations.
Chap. I. — Propriétés des opérations.
Chap. II. — Systèmes de nombres; nombres réels.
Chap. III. — Nombres imaginaires ordinaires; quantités dirigées.

Baraniecki (D[r] *M.-A.*). — Développement en fraction continue du rapport de deux intégrales elliptiques complètes, de première et de deuxième espèce. (8 p.).

Baraniecki (D[r] *M.-A.*). — Sur les substitutions permutables. (35 p.).

Sagajło (*A.*). — Quelques problèmes de Géométrie analytique, traités d'après les méthodes nouvelles de l'Analyse moderne. (28 p.).

Tome VIII; 1876.

Gosiewski. — Deux théorèmes de Mécanique moléculaire. (7 p.).

I. Dans les corps parfaitement élastiques, les forces moléculaires ne dépendent que des masses des molécules et de leurs distances.

A propos de ce théorème, l'auteur fait remarquer que le désaccord apparent entre les formules de Cauchy et l'expression du potentiel de Green, et les résultats des expériences, n'existe pas. Il établit que les formules de Cauchy s'appliquent surtout aux vibrations dans le cas d'une élasticité parfaite où les déplacements sont infiniment petits et infiniment courts. Les formules de Green s'appliquent au contraire au cas d'équilibre dans un corps où les déformations sont de longue durée et lorsque le corps perd l'élasticité parfaite.

II. Le travail moyen de forces moléculaires dans un gaz est une fonction de sa densité seule, ou, ce qui revient au même, la pression est inversement proportionnelle au volume.

Baraniecki. — Démonstration d'un théorème fondamental, relatif aux fonctions hypergéométriques. (19 p.).

Une des plus importantes questions dans la théorie des fonctions hypergéométriques est la détermination des valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est continue, finie et monodrome. La solution de ce problème a été ramenée par Thomé (¹) à l'intégration de l'équation différentielle

$$(1) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

L'auteur traite la question par une méthode nouvelle; il expose d'abord le procédé de Jacobi pour obtenir l'intégrale générale de (1) pour les divers cas; il

(¹) *Journal de Crelle*, t. 66.

détermine ensuite les valeurs de la variable pour lesquelles chacu
rentrant dans l'expression de l'intégrale générale soit toujours
monodrome, et étend enfin les résultats trouvés à la fonction F.

Hulewicz (*M.*). — Calcul de la résistance des poutre
travées solidaires. (126 p.).

Sągajło (*A.*). — Aperçu des principales recherches
moderne relatives au contact d'une circonférence
tres. (7 p.).

Transon (*Abel*). — Remarques à propos d'une for
par Wroński en 1812 et démontrée plus sin
M. Cayley en 1873. (8 p.).

Traduit des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIII, avril

Sągajło (*A.*). — Sur la formation des séries de
Phoronomie. (16 p.).

Baraniecki. — Représentation géométrique des ré
théorie des formes quadratiques binaires. (8 p.).

MATHEMATISCHE ANNALEN, begründet von A. CLEBSCH un
gegenwärtig herausgegeben von F. KLEIN und A. MAYER [1].

Tome IX; 1876.

Harnack (*A.*). — Sur l'utilité des fonctions ellipti
géométrie des courbes du troisième degré. (1-54).

Voss (*A.*). — Sur les complexes et les congruences. (

Lüroth (*J.*). — Démonstration d'un théorème sur les
cursales. (163-165).

Il s'agit de cette proposition, admise par plus d'un auteur sans q
montrée : si les coordonnées d'un point d'une courbe peuvent s'e
nellement au moyen d'un paramètre, on pourra toujours, au moy
tution rationnelle, remplacer ce paramètre par un autre, de faço
point de la courbe, corresponde seulement une valeur de ce nouve

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 124; t. II, p. 173, 235, 353; t. III, p. 3
115, 209; t. X, p. 175.

öther (*M.*). — Sur les systèmes singuliers de valeurs d'une fonction algébrique, et les points singuliers d'une courbe algébrique. (166-182).

lein (*F.*). — Sur les formes binaires admettant des transformations linéaires par lesquelles elles se reproduisent elles-mêmes. (183-208).

edekind (*L.*). — Contributions à l'interprétation géométrique des formes binaires. (209-237).

arnack (*A.*). — Sur la théorie des formes cubiques ternaires. (218-240).

oss (*A.*). — Sur le nombre des ombilics dans une surface générale du $n^{\text{ième}}$ ordre. (241-244).

Ce nombre a été donné inexactement dans la Géométrie de Salmon. Il faut le établir ainsi : $n(10n^2 - 28n + 22)$.

e (*S.*). — Théorie générale des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (245-296).

äcklund (*A.-V.*). — Sur les transformations de surfaces. (297-320).

uthen (*H.-G.*). — Sur une classe de points singuliers des surfaces. (321-332; fr.).

L'auteur traite un point spécial d'un travail sur les surfaces réciproques, qu'il compte publier plus tard : il s'agit *des points doubles à un seul plan tangent* (*double*), *qui est le lieu de droites rencontrant la surface en quatre points coïncidents et qui, de son côté, n'a qu'un seul point de contact.*

urm (*R.*). — Sur les *Würfe* de Staudt. (333-346).

Ce travail se rattache au Mémoire de M. Lüroth (*Math. Ann.*, t. VIII; voir *Bulletin*, t. X, p. 179). L'auteur donne quelques constructions et quelques démonstrations nouvelles, relatives à l'addition et à la soustraction, et démontre que, dans le système de coordonnées de Staudt, l'équation du plan est linéaire.

ayer (*A.*). — Sur la méthode de Weiler pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (347-370).

arnack (*A.*). — Sur une manière de traiter les différentielles algébriques en coordonnées homogènes. (371-424).

ommel (*E.*). — Sur une fonction ayant de l'affinité avec les fonctions de Bessel. (425-444).

Pringsheim (*A.*). — Sur la transformation du second degré des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (445-475).

Klein (*F.*). — Sur la connexité des surfaces. (476-482).

Voss (*A.*). — Sur la courbe du contact quadriponctuel sur une surface algébrique. (483-486).

M. Voss établit un résultat auquel M. Cayley était parvenu par l'induction : l'ordre de la courbe du conctact quadriponctuel (*die Curve vierpunktiger Berührung*) sur une surface F_n, ayant une courbe double d'ordre d et une courbe de rebroussement d'ordre r, est $n(11n-21)-22d-27r$. Ce résultat ne convient pas pour les surfaces réglées : l'ordre est alors $5n+12(p-1)$, n étant l'ordre et p l'espèce de la surface. Ces recherches se relient avec des travaux précédents du même auteur. (*Math. Ann.*, t. VIII, p. 90.)

Königsberger (*L.*). — Sur le développement en séries des intégrales hyperelliptiques de première et de seconde espèce. (487-503).

Sohncke (*L.*). — Sur la théorie du pouvoir rotatoire des cristaux. (504-529).

König (*J.*). — Expression générale de la moindre racine en valeur absolue d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré. (530-540).

Démonstration du théorème suivant :

Soit $f(x)=0$ une équation algébrique à coefficients réels, et

$$\frac{1}{f(x)}=y_0+y_1x+y_2x^2+\ldots;$$

désignons par w_n le nombre de variations de signe que présentent les nombres $y_0, y_1, \ldots, y_n$, et par

$$x=r_1(\cos\omega_1 \pm i\sin\omega_1)$$

la racine de plus petit module de l'équation $f(x)=0$; on aura

$$\frac{\omega_1}{\pi}=\left(\frac{w_n}{n}\right)_{n=\infty}, \quad r_1=\text{mod.}\,\frac{1}{\left(\sqrt[n]{y_n}\right)_{n=\infty}}.$$

Le théorème doit être légèrement modifié quand il existe une racine (autre que la conjuguée) ayant le même plus petit module.

Ball (*R.-St.*). — La théorie des vis. Étude de dynamique d'un corps rigide. (541-563 ; angl.).

Voir *Bulletin*, t. VII, p. 176.

Krause (*M.*). — Sur le discriminant des équations modulaires des fonctions elliptiques. (Suite). (554-572).

Ce Mémoire termine un travail dont l'auteur a publié le commencement dans le

même Recueil (t. VIII). M. Krause commence par traiter un cas qu'il avait précédemment négligé, celui où P, Q, R ont un commun diviseur avec n. Il applique ensuite la méthode à caractériser toutes les équations

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0,$$

aux racines desquelles appartiennent des fonctions $\varphi(\tau)$ qui sont des solutions distinctes de la discriminante. Puis il détermine l'ordre de multiplicité de ces fonctions, en tant que racines, et, s'appuyant sur ces résultats, il décompose le discriminant en facteurs qui correspondent aux racines distinctes. Enfin il donne des exemples numériques pour les nombres de transformation $n = 15, 21, 29, 33, 35$.

On peut remarquer en terminant que les deux théorèmes de M. Krause contiennent une généralisation du théorème donné sans démonstration par M. Hermite dans les *Comptes rendus* de l'année 1859 (t. XLIX) pour les nombres premiers de transformation.

Sturm (*R.*). — Sur la théorie des surfaces algébriques. (573-575).

Soient n l'ordre, r le rang, m la classe d'une surface, α le nombre de tangentes d'inflexion contenues dans un plan, β le nombre de ces tangentes passant par un point. Les tangentes aux lignes de courbure forment un système de rayons d'ordre $m + r + \beta$ et de classe $n + r + \alpha$.

Schubert (*H.*). — Contributions à la Géométrie numérique. (1-116).

Sturm (*R.*). — Le problème de la collinéation. (117-136).

Étant donnés dans l'espace deux groupes de points en nombre égal, numérotés de la même façon, on propose de trouver les points correspondants tels que, si on les joint successivement aux points des deux groupes, on obtienne deux réseaux collinéaires. Il y a lieu de distinguer deux cas, suivant qu'on donne six ou sept couples de points. Dans le premier cas, les points cherchés appartiennent à deux surfaces du second degré; dans le second, il n'y en a plus qu'un nombre fini.

Schläfli (*L.*). — Sur la convergence du développement d'une fonction arbitraire $f(x)$ suivant les fonctions de Bessel $J^a(\beta_1 x)$, $J^a(\beta_2 x)$, $J^a(\beta_3 x)$, ..., où $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ représentent les racines positives de l'équation $J^a(\beta) = 0$. (137-142).

Voss (*A.*). — La Géométrie de la ligne droite appliquée aux surfaces du second degré. (143-188).

Harnack (*A.*). — Sur la division en branches d'une courbe algébrique plane. (189-198).

L'auteur arrive par une voie élémentaire (méthode de la notation abrégée) aux propositions suivantes:

Une courbe d'ordre quelconque et d'espèce p ne peut pas avoir plus de $p + 1$ branches.

Réciproquement, il existe toujours des courbes d'un ordre donné et de l'espèce aussi donnée, qui admettent le nombre maximum de branches.

Une distinction importante dans ces recherches est celle des branches paires et des branches impaires, introduite par v. Staudt. F. K.

Klein (*F.*). — Nouvelle relation entre les singularités d'une courbe algébrique. (199-209).

Le travail se relie aux recherches de Zeuthen sur les courbes du quatrième ordre (*Math. Ann.*, VII), recherches que M. Klein étend aux courbes planes algébriques; il établit la proposition suivante:

« Soient n l'ordre, k la classe, r' le nombre des rebroussements réels, ω' le nombre des points d'inflexion réels, d'' le nombre des points doubles isolés réels, t'' le nombre des tangentes doubles isolées réelles; on a

$$n + \omega' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

Zeuthen (*H.-G.*). — Note sur les singularités des courbes planes. (210-220; fr.).

Krey (*H.*). — Sur les points de contact triple d'une courbe donnée des courbes d'un faisceau triplement infini. (220-226).

M. Brill (*Math. Ann.*, t. III) a donné l'équation de la courbe qui coupe une courbe donnée

$$f = 0$$

aux points où elle est osculée par les courbes du faisceau

$$A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_3\varphi_3 = 0.$$

M. Krey a entrepris la même recherche dans le cas d'un faisceau triplement infini

$$A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_3\varphi_3 + A_4\varphi_4 = 0.$$

Mais le résultat final ne paraît pas pouvoir être mis sous une forme aussi simple que dans le premier cas. F. K.

Eckardt (*F.-E.*). — Sur les surfaces du troisième degré sur lesquelles trois lignes droites leur appartenant se coupent en un même point. (227-272).

Clebsch a étudié (*Math. Ann.*, t. IV) la surface du troisième degré pour laquelle cette circonstance se présente dix fois, et lui a donné le nom de surface *diagonale*. M. Eckardt s'occupe des cas pour lesquels la même circonstance se présente moins souvent. Une des surfaces qu'il traite a déjà été étudiée par M. Cayley. (*Voir* SALMON-FIEDLER, *Géométrie de l'espace*, 2e édition, 2e Partie, p. 663, note 123.) Ces surfaces jouissent de plusieurs belles propriétés relatives notamment à la position de leur pentaèdre. L'auteur discute particulièrement la réalité des 27 droites.

Züge (*H.*). — Sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène. (273-286).

L'auteur part des formules données par M. Heine pour le potentiel d'un cerc

(*Journal de Borchardt*, t. 76, p. 271). Il en déduit, par la considération des sections circulaires, le potentiel d'un ellipsoïde homogène, principalement lorsque l'attraction s'exerce suivant la loi de Newton, et plus généralement quand elle est inversement proportionnelle à une puissance entière n de la distance. Les cas où $n = 3, 4, 5$ sont particulièrement étudiés : le potentiel s'exprime alors par une intégrale simple.

Hermite (*Ch.*). — Lettre à M. Gordan. (287-288; fr.).

L'auteur démontre, en se servant des fractions continues algébriques, le théorème de Jacobi

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin(n\arccos x).$$

Schröder (*E.*). — Sur la méthode de v. Staudt pour le calcul avec les *Würfe* et les résultats qui s'y rattachent. (289-317).

L'auteur s'occupe depuis longtemps de ce qu'on peut appeler l'*Algèbre formelle*, qui considère les opérations, non plus par rapport à leur signification, mais bien en ce qui concerne les lois d'association; il éclaircit quelques points de cette étude au moyen du calcul des rapports anharmoniques de v. Staudt.

Schubert (*H.*). — Modules des conditions multiples dans les surfaces du second ordre. (318-364).

Klein (*F.*). — Sur la marche des intégrales abéliennes dans les courbes du quatrième degré. (365-397, 3 pl.).

Klein (*F.*). — Sur une nouvelle espèce de surfaces de Riemann. (Deuxième Note). (398-416).

Prix proposés par la Société Jablonowski. (417-419).

Le développement de l'inverse de la distance r de deux points joue un rôle prépondérant dans les problèmes de l'Astronomie et de la Physique mathématique.

On démontre dans la théorie des fonctions elliptiques la formule suivante, découverte par Cauchy :

$$\frac{a}{r}\left(1+2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}}+\ldots\right) = 1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+\ldots.$$

Si l'on remarque que, dans les applications, la constante a peut être prise assez grande pour que les exponentielles $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}, \ldots$ puissent être négligées, on aura

$$\frac{a}{r} = 1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+\ldots,$$

développement en série d'une convergence exceptionnelle. On doit donc supposer qu'une théorie de la fonction perturbatrice s'appuyant sur la formule précédente se présente comme très-avantageuse pour le calcul numérique.

La Société désire donc une théorie des perturbations entreprise d'après le point de vue qu'elle vient d'indiquer. Tout en laissant aux auteurs le choix du cas particulier auquel ils feront une application numérique de leur méthode, elle demande que l'exemple choisi ait assez d'importance et d'étendue pour que l'on puisse juger l'utilité de la méthode proposée et la comparer aux procédés antérieurs.

Valeur du prix 700 marks.

Schröter (*H.*). — Sur la construction d'un système équi-anharmonique. (420-430).

Du Bois-Reymond (*P.*). — Additions au Mémoire intitulé : « Recherches sur la convergence et la divergence des formules représentatives de Fourier ». (431-445).

Voir *Abhandl. der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften*, 2e Classe, t. XIII, 2e Partie.

Zeuthen (*H.-G.*). — Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques. (446-546; fr.).

Gordan (*P.*) et *Nöther* (*M.*). — Sur les formes algébriques dont le déterminant hessien est identiquement nul. (547-568).

Neumann (*C.*). — Sur l'état électrique stationnaire du courant sur une surface conductrice courbe. (569-571).

Dans les *Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin* du 19 juillet 1875, M. Kirchhoff a publié un théorème général sur les rapports qui existent entre le problème de la détermination de l'état électrodynamique permanent et celui de la représentation conforme de deux surfaces l'une sur l'autre. M. Neumann remarque que déjà en 1863 il était parvenu au même théorème, et il en donne une démonstration nouvelle, plus simple que l'ancienne. Le théorème en question s'énonce comme il suit :

« Si l'on sait résoudre pour une surface F le problème de l'état électrodynamique permanent, on saura aussi le résoudre pour toute autre surface F_1 qui peut être représentée d'une manière conforme sur F, pourvu que toutefois les points d'arrivée comme les points de sortie du courant soient des points correspondants sur les deux surfaces. Si U représente la tension pour l'état électrodynamique permanent de F, la même fonction représentera aussi la tension du point correspondant de la surface F_1 dans l'état permanent relatif à cette surface. »

Gordan (*P.*). — Sur le théorème fondamental de l'Algèbre. (572-575).

Du Bois-Reymond (*P.*). — Note sur les égalités infinitaires. (576-578).

Table générale des dix premiers volumes.

Tome XI; 1877.

Herstowski (*F.*). — Sur la théorie des fonctions Θ de Jacobi. (1-29).

Bertini (*E.*). — Système simultané de deux formes biquadratiques. (30-40; fr.).

Stolz (*O.*). — Théorie générale des asymptotes des courbes algébriques. (41-83).

Lüroth (*J.*). — L'imaginaire en Géométrie et le calcul avec les *Würfe*. (2[e] Mémoire). (84-110).

Voir *Math. Ann.*, t. VII, p. 55; *Bulletin*, t. X, p. 179.

Brioschi (*F.*). — Extrait d'une lettre à M. Klein. (111-114; fr.).

Sur quelques formes binaires.

Klein (*F.*). — Sur les équations différentielles linéaires. (115-118).

Une traduction de cette Note a paru dans le *Bulletin*, t. I, 2[e] Série, 1[re] Partie, p. 180.

Königsberger (*L.*). — Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques aux fonctions algébrico-logarithmiques. (119-144).

Du Bois-Reymond (*P.*). — Deux théorèmes sur les valeurs limites des fonctions de deux variables. (145-148).

I. Si $f(x, y)$ satisfait, comme fonction de y, pour toute valeur de $x (0 < x < X)$, à la condition

$$\lim_{y=0} f(x, y) = 0,$$

de sorte qu'on ait aussi

$$\lim_{x=0} [\lim_{y=0} f(x, y)] = 0,$$

(par cela même que la parenthèse [ ] est nulle), alors il existe toujours une fonction s'évanouissant sans maxima avec x, $y = \varphi(x)$, telle que 1° $f[x, \varphi(x)]$ pour x suffisamment petit devienne inférieur à toute limite donnée, et que 2° il en soit de même pour $f[x, \varphi_1(x)]$, en supposant que, pour toute valeur à partir de x, on ait toujours $\varphi_1(x) < \varphi(x)$.

II. Si, pour une fonction $y = \lambda(x)$ s'annulant avec x, ainsi que toutes les fonctions $\lambda_1(x) < \lambda(x)$, on a $f[x, \lambda(x)] = 0$, on aura aussi

$$\lim_{x=0} [\lim_{y=0} f(x, y)] = 0.$$

Du Bois-Reymond (*P.*). — Sur les paradoxes du calcul de l'infini. (149-167).

Dillner (*G.*). — Essai d'un nouveau développement de la méthode d'Hamilton appelée « Calcul des Quaternions ». (168-193).

Cayley (*A.*). — Sur la théorie des équations aux différentielles partielles. (194-198; angl.).

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur les équations aux différentielles partielles d'ordre supérieur, admettant des intégrales premières intermédiaires. (199-241).

Korkine (*A.*) et *Zolotareff* (*G.*) — Sur les formes quadratiques positives. (242-292; fr.).

Klein (*F.*). — Sur la marche des intégrales abéliennes dans les courbes du quatrième degré. (2e Mémoire). (293-305).

Voir *Math. Ann.*, t. X; *Bulletin*, t. I (2e Série), 1re Partie, p. 325.

Neumann (*C.*). — Sur les éléments de surface correspondants. (306-308).

Neumann (*C.*). — Sur le degré de certitude de la loi d'Ampère. (308-317).

L'auteur démontre que la loi d'Ampère est *indépendante* de l'hypothèse que l'action d'un courant fermé sur un élément unique soit *perpendiculaire* à ce dernier.

Neumann (*C.*). — Sur les objections faites contre la loi de Weber. (318-340).

1. Objection de Tait et de Thomson contre la loi d'Ampère. — 2. Assertions de Helmholtz sur cet objet. — 3. Objection (A) de Helmholtz contre la loi d'Ampère. — 4. Quelques remarques à ce sujet. — 5. Objection (B) de Helmholtz contre la loi d'Ampère. — 6. Sur quelques théories proposées dans ces derniers temps pour remplacer la loi de Weber. — 7. Sur le nombre des matières électriques. — 8. Sur quelques remarques de M. Helmholtz.

Holst (*Elling*). — Quelques théorèmes métriques concernant les courbes algébriques. (341-346 et 575).

Schubert (*H.*). — Singularités tangentielles de la surface générale d'ordre quelconque. (347-378).

§ 1. — Les moyens auxiliaires à employer. — § 2. Relations des F_n avec les ∞^4 droites de l'espace et avec ses ∞^3 tangentes. — § 3. Énumération des systèmes de couples dont on doit s'occuper, relatifs aux tangentes principales et aux tangentes doubles ayant un point de contact commun. — § 4. Détermination des nombres relatifs aux tangentes principales et aux tangentes doubles ayant un point de contact commun. — § 5. Les nombres pour les tangentes singulières dans une variété d'une dimension. — § 6. Les nombres pour les fonctions singulières des F_n en nombre fini. — § 7. Le nombre déterminé par Clebsch au t. 63 du *Journal de Crelle*.

Neumann (*C.*). — La décomposition et la composition des mouvements infiniment petits d'un corps rigide, comme moyen auxiliaire pour l'établissement des équations différentielles de la Dynamique. (379-400).

§ 1. L'état de vitesse d'un système de points quelconque. — § 2. L'état de vitesse d'un corps rigide, et l'indication de cet état par certains caractères. — § 3. La force vive d'un corps rigide, exprimée à l'aide des caractéristiques de son état de vitesse actuel. — § 4. Contrainte pour la composition de divers états de vitesse, c'est-à-dire pour la réduction des caractéristiques correspondantes. — §§ 5 et 6. Règles pour la réduction des caractéristiques. — § 7. Méthode pour la détermination de la force vive d'un corps rigide. — § 8. Exemple : un pendule à volant. — § 9. Exemple : La chute d'un point matériel.

Brioschi (*F.*). — La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. (401-411).

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur les systèmes d'équations aux différentielles partielles du premier ordre. (412-433).

Toeplitz (*Em.*). — Sur un réseau de second ordre de surfaces. (434-463).

Lie (*S.*). — Théorie générale des équations aux différentielles partielles du premier ordre. (2e Mémoire). (464-557).

Neumann (*C.*). — Sur la théorie du potentiel logarithmique et du potentiel de Newton. (558-566).

Enneper (*A.*). — Sur quelques intégrales elliptiques. (567-570).

Nöther (*M.*). — Sur la théorie de l'élimination. (571-574).

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS [1].

Tome XIII; 1875.

Townsend (*R.*). — Sur les courbes tautochrones et brachistochrones dans le cas des forces parallèles et des forces concourantes. (1-15).

§ II. Courbes brachistochrones.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. II, p. 267; t. VI, p. 204.

L'auteur donne, dans ce second article, les conditions pour qu'une courbe so chistochrone dans le cas où les forces qui agissent sur la molécule assujetti mouvoir sur cette courbe ont une direction constante, ou bien sont consta dirigées vers un même point; il donne une série d'applications intéressantes conditions.

Warren (*J.*). — Équation générale d'une conique, le rayon teur mené d'un point fixe à un point de la conique et la long de la perpendiculaire abaissée du premier point sur la tan au second étant pris pour variables. (16-18).

Cayley (*A.*). — Sur un problème de projection. (19-29).

M. Cayley donne la solution du problème suivant :

« Soient $\Omega X = \Omega Y = \Omega Z = \theta$ trois longueurs égales portées sur trois a tangulaires; $\Omega A = a$, $\Omega B = b$, $\Omega C = c$, trois longueurs portées sur trois situées dans un plan passant par Ω; les points A, B, C peuvent être regardés les projections sur ce plan des trois points X, Y, Z, projections faites pa ment à une certaine droite ΩO; regardant ΩA, ΩB, ΩC comme données e deur et en position, trouver θ, et aussi la position de la droite ΩO. »

Malet (*J.-C.*). — Forme générale de l'équation dont les ra sont les produits de deux racines d'une équation algébr (30-32).

L'auteur met cette équation générale sous forme d'un déterminant égalé à développe les calculs pour les équations des degrés 3, 4, 5.

Everett (*J.-D.*). — Cinématique d'un système solide. (33-6

L'auteur expose complètement la théorie du mouvement d'un corps solid fait l'application à quelques problèmes.

Walton (*W.*). — Sur les vitesses latérales des rayons lum dans un cristal à deux axes. (66-74).

Dans un cristal biaxe, la direction de la vibration lumineuse est oblique p port à la direction de propagation; l'auteur appelle *vitesse latérale* la com de la vitesse vibratoire comprise dans le plan de l'onde. Il se propose de dét la nature du lieu des directions de propagation pour lesquelles la somme de des vitesses latérales des deux systèmes d'ondes correspondants est une con

Ford (*P.*). — Sur les coordonnées biangulaires. (75-87).

L'auteur traite dans ce système de coordonnées divers problèmes élémenta la droite et le cercle.

Cockle (*J.*). — Sur le mouvement des fluides. (88-102).

Ce Mémoire est la suite de travaux antérieurement publiés par M. Cockl même sujet.

Allman (*J.*). — Sur quelques propriétés des paraboloïdes. (102-115).

Soient

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\quad \frac{X^2}{p_1}+\frac{Y^2}{q_1}=2Z$$

les équations d'un même paraboloïde, lorsque l'on prend successivement l'origine au sommet, ou en un point quelconque x', y', z' du paraboloïde, les coordonnées étant, dans le premier cas, rectangulaires; M. Allman montre que, en désignant par θ l'angle des axes OX, OY, par γ et γ' les angles de ces mêmes axes avec OZ, par ν l'angle de la normale en (x', y', z') avec oz, on a les trois relations

$$p_1+q_1=p+q+2z',$$
$$p_1 q_1 \cos^2\nu \sin^2\theta = pq,$$
$$p_1 \sin^2\gamma + q_1 \sin^2\gamma' = p+q.$$

Il utilise ensuite ces relations pour la solution de divers problèmes relatifs à la courbure, à la cubature et à la quadrature des paraboloïdes.

Ferrers (*N.-M.*). — Sur le mouvement d'une masse d'eau dans un cylindre en mouvement. (115-127).

L'auteur étudie le mouvement de l'eau le long d'un cylindre indéfini, qui se déplace de façon que les vitesses dont ses différents points sont animés restent perpendiculaires à son axe.

Cayley (*A.*). — Sur le tore conique. (127-129).

M. Cayley part de l'équation

$$p+\sqrt{qr}+\sqrt{st}=0,$$

où p, q, r, s, t sont des fonctions linéaires de x, y, z, w, et indique diverses propriétés de la surface du quatrième degré représentée par cette équation, propriétés qui sont mises en évidence par la forme donnée. Cette surface, pour des valeurs convenables des fonctions p, q, r, s, t, se réduit au tore engendré par une conique tournant autour d'un de ses diamètres.

Jeffery (*H.-M.*). — Équation d'une conique en coordonnées biangulaires. (130-149).

L'auteur démontre, au moyen des coordonnées biangulaires, diverses propriétés élémentaires des coniques planes et sphériques.

Moon (*R.*). — Sur l'intégration des équations différentielles qui conviennent au mouvement à deux dimensions d'un solide élastique. (149-158).

L'objet de ce travail est de présenter sous leur forme la plus générale les équations représentant le mouvement à deux dimensions d'un solide élastique, et d'intégrer les équations différentielles ainsi obtenues sans avoir recours à une approximation.

Anonyme. — **Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.** (158-171).

Suite d'un Mémoire *Sur les coefficients différentiels et les déterminants de lig... leur application à la Mécanique analytique.* (*Philos. Transact.*, 18..; t. ... p. 463-510).

Les diverses propositions qui constituent la théorie du mouvement d'un co... lide autour d'un point fixe sont, dans ce travail, déduites de ce théorème : « S... P' sont deux points d'une sphère entraînés avec elle dans son mouvement su... même, la projection de la vitesse du point P sur le rayon OP' est égale et de... contraire à la projection de la vitesse d'un point P' sur le rayon OP.

Niven (*W.-D.*). — **Sur les lignes isochromatiques et les li... neutres des cristaux.** (172-184).

L'objet de ce travail est de donner une méthode pour calculer les lignes iso... matiques et les lignes neutres des cristaux observés avec un analyseur dans ... mière polarisée. Cette méthode s'applique aux cristaux biaxes comme aux c... à un axe, grâce à la forme des expressions employées pour donner les vites... propagation : elle fournit aisément les équations des deux sortes de lignes d... cas usuels.

Frost (*P.*). — **Sur les harmoniques zonaux et les images élec... ques.** (184-188).

L'auteur, sans employer l'équation de Laplace, démontre d'abord les relations

$$\int dS\,Q_i Q_j = 0, \quad \int dS\,Q_i^2 = \frac{4\pi}{2i+1},$$

entre deux harmoniques zonaux.

Il donne ensuite une méthode pour obtenir l'action exercée par une sphère ... trisée, de telle sorte que la densité électrique en un quelconque de ses points ... raison inverse du cube de la distance de ce point à un point donné ; il montre ... la propriété des images électriques, en s'appuyant sur un théorème de Thom... fait sur les distributions symétriques par rapport à un axe.

Roberts (*S.*). — **Sur la surface quartique réciproque de la su... des centres de courbure d'une surface du second degré à ce... (188-197).**

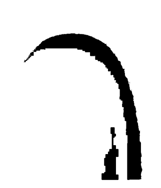
Si l'équation de la surface du second degré est

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0,$$

l'équation de la surface en question est

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 - 3^2\left(\frac{X^2}{a} + \frac{Y^2}{b} + \frac{Z^2}{c}\right) \ldots (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = 0.$$

Elle est étudiée au point de vue des singularités qu'elle présente et des r... qu'elle a avec son hessien.



Taylor (*J.-F.*). — Démonstration géométrique d'une propriété connue du cercle des neuf points. (197).

Le cercle des neuf points touche les quatre cercles inscrit et exinscrits au triangle auquel il se rapporte : une démonstration simple de cette proposition se tire de la considération des figures inverses.

Eurenius (*A.-G.-I.*). — Sur les foyers et directrices en coordonnées trilinéaires. (198-211).

L'auteur détermine les foyers et les directrices d'une conique donnée par son équation générale en coordonnées polaires, en identifiant cette équation avec l'équation qui, dans ce système, correspond à l'équation aux foyers.

Cayley (*A.*). — Illustration géométrique de la transformation du troisième degré dans les fonctions elliptiques. (211-216).

Si l'on coupe la courbe

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz = 0$$

par la droite $z = 0$, $x + y = 0$, on aperçoit immédiatement que le rapport $\frac{x}{y}$ est une fonction de u où entre le radical

$$\sqrt{\left(2u^3 + 3lu + \frac{1}{2}\right)\left(lu - \frac{1}{2}\right)}.$$

Or on reconnaît aisément que les deux courbes

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz = 0,$$
$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 6mxyz = 0,$$

où $m^2 = \frac{-l^2}{1 + 8l^3}$, peuvent être regardées comme ayant entre elles une correspondance définie par les équations

$$\omega x + \omega^2 y - 2lz : \omega^2 x + \omega y - 2lz : x + y - 2lz = X^3 : Y^3 : Z^3,$$

où ω est une racine cubique imaginaire de l'unité. A un point donné sur la seconde correspond un point sur la première ; à un point sur la première correspondent trois points sur la seconde. On conclut de là une transformation du troisième degré qui permet de passer de l'intégrale

$$\int du \sqrt{\left(lu - \frac{1}{2}\right)\left(2u^3 + 3lu + \frac{1}{2}\right)}$$

à l'intégrale de même forme

$$\int dv \sqrt{\left(mv - \frac{1}{2}\right)\left(2v^3 + 3mv + \frac{1}{2}\right)}.$$

Les calculs sont complètement effectués dans le reste du Mémoire.

Townsend (*R.*). — Sur la comparaison des deux problèmes relatifs à l'équilibre d'une corde homogène et au mouvement d'un point matériel, sous l'influence d'une force centrale. (217-238).

Ces deux problèmes sont résolus complètement dans les Traités de Mécanique

rationnelle, et l'on est naturellement amené à en rapprocher les deux solutions. M. Townsend met en lumière la connexion qui, *a priori*, doit lier ces deux questions, et donne une série d'applications intéressantes.

Cockle (sir _J._). — Sur les intégrales particulières. (239-255).

Ce Mémoire vient compléter celui du même auteur sur les solutions singulières, donné au tome XII de ce *Journal* (p. 305). L'auteur y considère en particulier les équations aux différentielles totales.

Glaisher (_J.-W.-L._). — Valeurs numériques d'un certain nombre de fractions continues. (255-259).

Citons tangh 1, tang 1, $1-\frac{1}{e}$, sin 1, cos 1, etc.

Genese (_R.-W._). — Sur l'enveloppe d'une ligne droite. (260-268).

Si P, Q, R, M sont des fonctions de t, et α, β, γ des polynômes du premier degré en x, y, le point où se rencontrent les deux droites

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0,$$
$$\frac{d.MP}{dt}\alpha + \frac{d.MQ}{dt}\beta + \frac{d.MR}{dt}\gamma = 0$$

est le point où la droite $P\alpha + Q\beta + R\gamma = 0$ touche son enveloppe, obtenue en faisant varier t. En disposant convenablement du facteur M, M. Genese fait plusieurs applications intéressantes de cette remarque.

Walton (_W._). — Sur le cône de vibration et le cône de section d'égale bifurcation dans un cristal à deux axes. (268-278).

Concevons une section plane d'un cristal biaxe passant par un point donné A : la lumière tombant normalement sur la face ainsi créée sera, après sa pénétration dans le cristal, divisée en deux ondes planes parallèles, polarisées dans deux plans rectangulaires, et se propageant avec deux vitesses distinctes ; par suite, à cause de l'obliquité du mouvement vibratoire par rapport au front de l'onde, chaque vibration de la lumière incidente se bifurque en pénétrant dans le cristal. Si l'on change la direction du plan passant par le point A, l'angle de bifurcation change aussi en général. Le principal objet du Mémoire est de déterminer le lieu de la normale aux deux plans de polarisation au point considéré, quand l'angle de bifurcation des vibrations intérieures est constant.

Malet (_J.-C._). — Note sur une transformation de fonctions elliptiques. (278-284).

M. Malet remarque que l'équation

$$\frac{dy}{\Delta(k,y)} = \frac{2dx}{\Delta(k,x)}$$

est satisfaite par la substitution

$$y = -\frac{k^2x^4 - 2x^2 + 1}{k^2x^4 - 2k^2x^2 + 1}.$$

Il applique cette proposition à la transformation des fonctions elliptiques de troisième espèce et parvient à ce théorème :

« Deux fonctions elliptiques de troisième espèce dépendent l'une de l'autre, si leurs paramètres sont liés par la relation

$$n' = -\left(\frac{n^2 + k^2 + 2nk^2}{n^2 + k^2 + 2n}\right)^2. »$$

Townsend (*R.*). — Sur la représentation géométrique de plusieurs faits usuels de réaction dans la dynamique des corps solides. (284-298).

L'auteur s'occupe dans ce travail de plusieurs problèmes intéressants de la nature des suivants :

1° « Un corps solide ayant un simple point de contact sans frottement avec un plan fixe est soumis à l'action de la gravité et d'un système de forces ayant une résultante, et passant par le centre de gravité; supposons qu'après l'avoir maintenu en équilibre on l'abandonne à lui-même : chercher la valeur initiale de la réaction du plan. »

2° « Un corps solide se mouvant librement dans l'espace vient rencontrer un plan fixe, trouver la réaction de ce plan en négligeant le frottement. »

Childe (*G.-F.*). — Surfaces de réfraction. (299-320).

L'auteur considère une ligne à double courbure, qu'il suppose appartenir à la surface de séparation de deux milieux, et il étudie les surfaces réglées obtenues par la réfraction de rayons parallèles ou issus du même point, quand on suppose que la réfraction s'opère en chaque point par rapport à la normale à la courbe, soit comprise dans le plan osculateur, soit perpendiculaire à ce plan.

Cayley (*A.*). — Sur la transformation scalène d'une courbe plane. (321-328).

Le système articulé de Peaucellier permet d'opérer mécaniquement la transformation par rayons vecteurs réciproques; un appareil analogue permettra d'effectuer la transformation définie par la relation

$$rr'(r + r') + (m^2 - l^2)r + (m^2 - n^2)r' = 0$$

entre les deux rayons vecteurs r, r' situés sur la même droite et relatifs aux deux courbes : on reconnaît la relation qui lie les longueurs l, m, n de trois droites issues d'un point et terminées à une droite, sur laquelle les longueurs r', r, $r' + r$ sont respectivement interceptées par les couples de droites l et m, m et n, l et n. Il suffira d'imaginer trois droites $PA = l$, $PB = m$, $PC = n$ s'articulant en P, trois autres droites $QA = l$, $QB = m$, $QC = n$ s'articulant entre elles en Q et s'articulant avec les précédentes en A, B, C; les trois points A, B, C seront en ligne droite et les longueurs $AB = r'$, $BC = r$ seront liées entre elles par la relation ci-dessus. Cet appareil devient celui de Peaucellier dans le cas où deux des trois longueurs l, m, n sont égales entre elles. Si l'on fixe le point B et si l'on force le point A à décrire une courbe donnée, le point C décrira la courbe correspondante. M. Cayley donne plusieurs applications de ce mode de transformation. Il montre en particulier comment, en combinant l'appareil décrit avec celui de Peaucellier, on parvient à une description mécanique des ovales de Descartes.

Cayley (*A.*). — **Sur la description mécanique des ovales de Descartes. (328-330).**

La transformation par rayons vecteurs, liés entre eux par la relation

$$r' = N + r + \frac{B}{r},$$

permet de passer du cercle

$$r' = -A\cos\theta$$

à l'ovale de Descartes

$$r^2 + (A\cos\theta + N)r + B = 0;$$

cette transformation peut être réalisée mécaniquement au moyen d'une addition légère à l'appareil de Peaucellier.

Ferrers (*N.-M.*). — **Sur le mouvement d'une masse indéfinie d'eau sur un ellipsoïde mobile. (330-338).**

Ce travail peut être regardé comme la suite des recherches précédemment faites par M. Ferrers dans le cas où l'ellipsoïde est remplacé par un cylindre elliptique : la solution du problème, compliquée d'intégrales elliptiques, s'obtient moins complétement dans ce dernier cas.

Purser (*F.*). — **Sur les bitangentes à la surface des centres de courbure d'une surface du second degré. (338-342).**

Dans un précédent Mémoire, inséré dans le *Quarterly Journal* (avril 1866), M. Purser a établi que, étant donnée une surface du second degré

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

il fallait qu'une certaine condition entre les coefficients de l'équation d'un plan fût remplie, pour que les normales en trois points de la section déterminée par le plan dans la surface se rencontrassent en un même point. Si cette condition est satisfaite, le lieu des points d'intersection de trois normales relatives à trois points de la surface est une droite. Les pieds des trois autres normales menées par un point de cette droite restent dans un plan corrélatif du premier et jouissent de la même propriété.

Par un point quelconque K passent dix de ces droites; elles correspondent avec dix couples de plans corrélatifs passant, l'un par trois des pieds des six normales menées par le point K, l'autre par les trois autres pieds.

Dans le travail qui nous occupe, M. Purser montre que les vingt-huit bitangentes menées par la point K à la surface des centres de courbure de la surface du second degré que l'on considère se décomposent ainsi : six sont les normales menées du point K, dix sont les dix droites dont nous venons de parler, douze sont les six couples de génératrices des six surfaces du second degré

$$\frac{a^2x^2}{(a^2-h^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2-h^2)^2} + \frac{c^2z^2}{(c^2-h^2)^2} - 1 = 0,$$

qui passent par le point K.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les intégrales $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ et $\int_0^\infty \cos x^2 dx$. (343-349).

Relativement à ces intégrales, M. Cayley a montré que l'intégrale double

$$\int\int \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

relative à l'aire d'un cercle infiniment grand, était indéterminée, tandis que la même intégrale, relative à l'aire d'un carré infiniment grand, avait une valeur parfaitement déterminée. M. Glaisher vérifie les conclusions de M. Cayley et les complète.

Jeffery (*H.-M.*). — Sur les coniques sphériques inscrites ou circonscrites à un quadrilatère sphérique. (350-368).

L'auteur traite, pour les coniques sphériques, divers problèmes relatifs aux lieux ou aux enveloppes de points ou de lignes remarquables de ces courbes, en prenant pour triangle de référence le triangle sphérique dont les sommets sont les points d'intersection des diagonales et des côtés opposés du quadrilatère sphérique inscrit ou circonscrit.

Cayley (*A.*). — Sur une opération algébrique. (369-375).

Soit $F(a, x)$ une fonction rationnelle de a, x, développée suivant les puissances ascendantes de a, les coefficients de ces diverses puissances étant développés suivant les puissances ascendantes de x, M. Cayley désigne par le symbole

$$\Omega\, F(a, x)$$

ce qui reste de la fonction $F(a, x)$ quand on a supprimé les puissances négatives de x : il étudie cette opération et en donne une application à la fonction

$$F(a, x) = \frac{1 - x^{-2}}{(1 - ax^2)(1 - ax)(1 - ax^{-1})(1 - ax^{-2})}.$$

Ellis (*R.-L.*). — Note sur un point de la Dynamique. (375-376).

On sait que si, sous l'action de la percussion, un corps solide se met en mouvement, l'axe autour duquel il commence à tourner est celui pour lequel la force vive est maximum. Cette proposition, due à Euler, a été établie, comme on sait, d'une manière rigoureuse par Delaunay, Sturm et Bertrand. L'auteur en propose une démonstration nouvelle.



BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATIC FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI (¹).

Tome IX; 1876.

Napoli (*F.*). — Sur la vie et les travaux de *Francesco Maurol* (1-21).

Maurolycus (*Fr.*). — Écrits inédits. (23-121).

Impression de quatre pièces tirées du fonds latin de la Bibliothèque Nati de Paris, nᵒˢ 7473, 7476, 7468, 7466. — I. *Illustrissimo Dño D. Joani Vega cilia Proregi*, etc. Sur l'histoire de la Géométrie (23-40). — II. *Demonstratio A* (41-49).— III. *Maurolyci Siculi geometricarum quæstionum liber I :* Circa tetr. Circa plana triangula. Circa regulas chordarum. Circa mensuram circuli e portionum. Circa triangula sphæralia. *Liber II :* Circa solida. Circa perpe larem pyramidis. Circa pyramidis corpulentiam. Circa solidorum regularium Circa solidorum inscriptiones. Circa coni et cylindri mensuram. Circa ter superficiem et corpulentiam. Circa sphæræ dimensiones. Circa Archimedis in Circa conicas sectiones. De cylindro. Circa diversa supposita (50-113). — IV. demonstratio centri in parabola (114-121).

Lucas (*Éd.*). — Sur un théorème de l'Arithmétique indie (157-164).

Favaro (*A.*). — Die römischen Agrimensoren und ihre Ste in der Geschichte der Feldmesskunst. Eine historisch-ma tische Untersuchung von Dʳ *M. Cantor*. (Analyse). 16

Voir *Bulletin*, t. X, p. 161.

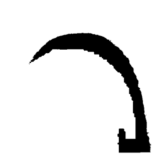
Cantor (*M.*). — Die Rechenkunst im sechzehnten Jahrh von *A. Kuckuck*. (Analyse : trad. par *A. Sparagna* 187).

Boncompagni (*B.*). — Sur un Traité d'Arithmétique d *Widmann* d'Eger. (188-210).

Brioschi (*F.*). — Sur le problème des tautochrones. Lettres à *Boncompagni*. (211-216).

Günther (*S.*). — Note sur *Jean-André de Segner*, fond la Météorologie mathématique. (217-228).

(¹) Voir *Bulletin*, 2ᵉ Serie, t. I, 2ᵉ Partie, p. 50.



Hankel (*H.*). — Tableau historique du développement de la Géométrie moderne. (Trad. par A. Sparagna). (267-289).

Introduction à l'Ouvrage intitulé : *Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung*. Voir *Bulletin*, t. I (2e Série), 1re Partie, p. 51.

Zahn (*W. v.*). — Notice sur *Hermann Hankel*. (Trad. par A. Sparagna). (290-296).

Extrait des *Mathematische Annalen*, t. VII. Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 216.

Catalogue des travaux de *Hermann Hankel*. (279-308).

Klein (*F.*). — Notice sur la vie et les travaux de *Louis-Othon Hesse*. (Trad. par *P. Mansion*). (309-314).

Copernic en Italie. — Copernic à Bologne, par *F. Hipler*. (Trad. par *A. Sparagna*). (315-325).

Biadego (*G.-B.*). — Sur la vie et les écrits de *Gianfrancesco Malfatti*, mathématicien du xviiie siècle. (361-381).

Catalogue des travaux de *Gianfrancesco Malfatti* (382-387).

Catalogue des travaux relatifs au problème de Malfatti. (388-392).

Lettres inédites de *Gianfrancesco Malfatti*. (393-480).

Ce recueil contient soixante-sept lettres à Anton.-Maria Lorgna (1769-1796), neuf lettres à l'abbé Girolamo Tiraboschi (1779-1782), deux lettres à Bartolomeo de Galvagni, une au comte Alfonso Bonfioli, une à Leonardo Salimbeni, une à Antonio Cagnoli (1798).

Cantor (*M.*). — *Gottfried Friedlein*. Notice nécrologique. (Trad. par *A. Sparagna*). (531-535).

Extrait du *Zeitschrift für Math. u. Physik*, t. XX.

Boncompagni (*B.*). — Catalogue des travaux du Dr *Gottfried Friedlein*. (536-553).

Abria et *Hoüel* (*J.*). — Notice sur la vie et les travaux de *V.-A. Le Besgue*. (554-555).

Boncompagni (*B.*). — Catalogue des travaux de *V.-A. Le Besgue* (556-573).

Le Besgue (***V.-A.***). — Notice sur ses principaux travaux, rédigée par [redacted]-582).

versionibus duabus antiquis (altera quoque
cum textu hebraico e manuscriptis primum
versionem verbalem adjecit Mauritius Steinschn

Sédillot (Dr *C.-E.*). — Lettre à D. B. Boncomp
les travaux de M. *Louis-Amélie Sédillot*. (649

Boncompagni (*B.*). — Catalogue des travaux d
Sédillot. (656-700).

Cantor (*M.*). — Sur la nationalité de Coperni
Sparagna). (701-716)

Annonces de publications récentes. (122-156, 2
481-530, 615-648, 717-758).

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, begründet von H.-C. S
gegeben von Professor Dr C.-A.-F. Peters. Kiel (1).

Tome LXXXI, nos 1921-1944; 1873.

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Compte rendu des obse
l'occasion de l'éclipse totale de Soleil du 12 déce
l'Inde Néerlandaise. (1-36).

Asten (*E. v.*) — Sur l'orbite de la comète II, 185

Adolph (*C.*). — Éphéméride de Mnémosyne (57).

Peters (*C.-H.-F.*). — Éléments d'Alceste (124). (47

Jordan (*W.*). — Sur le calcul de l'erreur moyenne d'une mesure de base. (51-56).

Andries (*P.*). — Détermination de l'orbite de la comète III, 1853. (55-58).

Khandrikof. — Lettre au Rédacteur. (57-62).

Application de l'équation d'Euler au calcul des orbites elliptiques.

Heis. — Sur la variabilité de l'étoile 48 du Taureau. (61-62).

Oppenheim (*H.*). — Observations micrométriques de la comète II, 1870 (Coggia), faites à l'héliomètre de Königsberg. (63-64).

Plummer (*W.-E.*). — Lettre au Rédacteur. (65-68; angl.).

Sur la comète II, 1867.

Tietjen (*F.*). — Observations faites au grand cercle méridien de l'Observatoire de Berlin. (67-100).

Gericke (*H.*). — Observations au micromètre circulaire, à Leipzig. (101-104).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observation des astéroïdes : Gerda (122) et Brunhilda (123), faites à l'Observatoire Litchfield de Hamilton-College. (103-108; angl.).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de deux planètes. (109-110 et 111-112).

Hall (*A.*). — Éléments de (124) Alceste, et observations de (129). (109-110; angl.).

Tietjen (*F.*). — Planète (129). (111).

Vogel (*H.-C.*). — Observations des satellites III et IV de Jupiter, en vue d'une détermination de la masse de cette planète. (113-126).

Galle (*J.-G.*). — Extrait d'une lettre au Rédacteur. (127-128).

Kowalczyk. — Détermination définitive des orbites des comètes III, 1840; II, 1842; I, 1845; II, 1869. (129-144).

Seeliger (*H.*). — Éphéméride pour la deuxième apparition de la comète II, 1867 (Tempel). (145-148).

Börgen. — Observations de la planète (129). (149-150).

Wolfers (*J.-Ph.*). — Comparaison des déclinaisons obser Valentiner (*Astr. Nachr.*, n° 1902) avec celles de *Jahrb.* pour 1879. (150-152).

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — Observations a méridien de l'Observatoire de Leyde. (151-156).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la marche de la Knoblich n° 1813, à compensation barométrique. (155–

Schönfeld (*E.*). — Sur le changement d'éclat de W de la (161–168).

Van de Sande Bakhuyzen (*E.-F.*) — Observations de au réfracteur de 6 pouces. (169-172).

Hall (*A.*). — Observations équatoriales faites à l'Obs naval de Washington. (171-176; angl.).

Schmidt (*J.-F.-J.*) — Observations à l'Observatoire d'At 1872. (177–188).

Doberck. — Éphéméride de la comète II, 1867. (189-190)

Konkoly (*N. v.*). — Perfectionnement au support de l'é et à un appareil enregistreur. (189-192).

Engelmann (*R.*). — Observation méridienne de la pla (191-192).

Knorre (*V.*). — Développement d'une formule de co relative à la détermination de l'orbite d'un astre, observations. (193-224).

Stephan (*E.*). — Lettre au Rédacteur. Observation de la c 1867. (223-224).

Zachariæ (*G.*). — Sur la détermination de l'erreur d'une base mesurée doublement dans plusieurs de se (225-228).

Peters (*C.-H.-F.*). — Éléments et éphémérides d'Anti — Observations d'Électre (130). — Éphéméride pour l'a d'Io (85), en 1873. (227-230).

Asten (*v.*). — Éléments et éphéméride pour la deuxièm tion de la comète II, 1867. (233-236).

Schulhof (*L.*) et *Holetschek* (*J.*). — Observations de planètes au réfracteur de 6 pouces et au cercle méridien, à Vienne. (235-240).

Wittstein. — Sur les observations d'étoiles filantes. (241-248).

Dembowski (*H.*). — Détermination de la valeur en arc des révolutions du micromètre. (247-272).

Fearnley (*C.*). — Annonce de la mort de *Christopher Hansteen*. (273-274).

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Lettre au général *v. Baeyer*. (273-282; une carte).

Triangulation de Java.

Oppolzer (*Th.*). — Sur la comète découverte par Pogson, le 2 décembre 1872. (281-288).

Stark (*J.-E.*). — Éléments et éphéméride d'opposition de la planète (100) Hécate. (287-288).

Engelmann (*K.*). — Éléments d'Héléna. — Éléments et éphéméride de (129) Antigone. (289-292).

Wittstein. — Sur l'erreur finale des grands nivellements. (291-298).

Helmert (*F.-R.*). — Sur la théorie du nivellement géométrique. (297-300).

Engelmann (*R.*). — Éphéméride d'opposition de la planète (100) Hécate. — Observations méridiennes de la planète (129). — Positions moyennes de quelques étoiles de comparaison pour 1873,0. (299-304).

Stephan (*E.*). — Nébuleuses découvertes à l'Observatoire de Marseille. (303-304).

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Sur le problème de calculer, au moyen des différences en latitude et en longitude de deux lieux sur le sphéroïde terrestre, leur distance et leurs azimuts mutuels. (305-320).

Newcomb (*S.*). — Un moyen pour examiner le mouvement d'une horloge à pendule. (319-320; angl.).

Doberck (*A.-W.*). — Éléments paraboliques de la comète I, 1801. (321-324).

Schwarz (*Fr.-X.*). — Occultations d'étoiles pendant l'éclipse totale de Lune du 4 novembre 1873. (323-332).

Krueger (*A.*). — Sur la masse de Jupiter, déduite du mouvement de Themis. (331-336).

Radtschenko (*N.*). — Sur le calcul de la comète d'Encke. (335-336).

Asten (*E. v.*). — Éphéméride de la comète de Tempel. (337-338).

Palisa (*J.*). — Observations de planètes à l'Observatoire I. R. de Pola. (339-346).

Tietjen (*F.*). — Observations de comètes à l'Observatoire de Berlin. (345-352).

Galle (*J.-G.*). — Sur l'opposition de Phocéa en 1872, et sur celle de Flora en 1873, au point de vue de leur usage pour une détermination de la valeur de la parallaxe du Soleil. (353-362).

Engelmann (*R.*). — Observations méridiennes à Leipzig. (363-368).

Peters (*C.-A.-F.*), *Wittstein* (*Th.*), *Dreyer* (*J.*). — Observations de l'éclipse de Soleil du 25 mai 1873. (367-368).

Bruhns (*C.*). — Observation de la planète (131). (367-368).

Hind (*J.-R.*). — Orbite de la comète de Tempel. (369-370 ; angl.).

Möller (*Ax.*). — Observations de petites planètes à Lund. (369-380).

Stephan (*E.*). — Planète (131) et comète II, 1867. (379-380).

Leppig (*H.*). — Observations de taches solaires en 1872. (379-384).

Tome LXXXII, n°s 1945-1968 ; 1873.

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes faites à Leipzig dans le 2e semestre de 1872. (1-8).

Becker (*E.*). — Observations de petites planètes faites en 1872 à l'Observatoire de Neuchâtel. (8-16).

Denning (*W.-F.*). — Observations des étoiles filantes faites à Bristol les 19, 20 et 21 avril 1873. (17-18).

White (*E.-J.*). — Catalogue de 56 étoiles voisines du pôle austral. (19-30).

Ce Catalogue est extrait des observations faites de 1863 à 1872 avec le cercle méridien de l'Observatoire de Melbourne; les mouvements propres sont déduits de comparaisons avec les Catalogues de Fallows, Henderson et Maclear.

Luther (*R.*). — Observations de planètes à l'Observatoire de Düsseldorf. (27-33).

Winlock (*J.*). — Ascensions droites d'étoiles fondamentales observées au cercle méridien de l'Observatoire de Harvard College (33-42).

Les étoiles observées sont au nombre de 302; elles ont été prises parmi les étoiles choisies par l'*Astronomische Gesellschaft* pour servir de repères dans le travail de révision et de complément des zones.

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de la planète (131), faites à Clinton (43-44).

Hall (*A.*). — Positions des principales étoiles observées de 1853 à 1860 à l'Observatoire de Washington. (43-48).

Galle (*J.-G.*). — Note sur l'observation des petites planètes en vue de la détermination de la parallaxe solaire. (49-52).

Spörer. — Observations de taches solaires de juillet à octobre 1871. (51-58).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de petites planètes à Hamilton-College. (57-64).

Richter (*H.*). — Éléments de la planète (128). (63-64).

Sellack (*C.-Schultz*). — Observations de groupes d'étoiles de l'hémisphère sud faites à Cordoba. (65-70).

Strasser (*C.*). — Observations de petites planètes faites en 1871 à Kremsmünster. (73-74).

Zachariæ (*G.*). — Note sur les erreurs du nivellement géométrique d'un sphéroïde. (73-80).

Tempel (*W.*). — Découverte d'une comète (comète 1873, II) faite à Milan le 3 juillet 1873. (79-80).

Stockwell (*J.-N.*). — Éphéméride de Gerda (122) pour l'opposition de 1873. (81-84).

Hill (*G.-W.*). — Sur une inégalité à longue période de Saturne. (82-88).

Cette inégalité a pour argument six fois l'anomalie moyenne de Saturne moins deux fois celle de Jupiter, moins trois fois celle d'Uranus.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de comètes faites en 1873 à Athènes. (89-94).

Schulze (*L.-R.*). — Éléments de la première comète de 1830 et de la comète de 1832. (97-110).

Stephan et *Coggia*. — Observations de la planète (122) faites à l'Observatoire de Marseille. (109-100).

Schulhof (*L.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Tempel 1873, II. (111-112).

Tempel (*W.*). — Observation de la comète 1873, II, découverte par lui le 3 juillet. (113-116).

Schönfeld (*E.*). — Éphéméride pour l'observation en 1873-1874 des étoiles variables : Algol, λ Taureau, S du Cancer et δ de la Balance. (115-118).

Schiaparelli (*J.-V.*). — Éléments et éphéméride de la comète de Tempel 1873, II. (119-120).

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes à l'Observatoire de Leipzig. (119-124).

Schulhof (*L.*). — Éléments elliptiques de la comète de Tempel comète 1873, II. (125-126).

Knorre (*V.*). — Éléments et éphéméride de la planète (131). (127-128).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de (129), (130) et (131) à Hamilton College (129-134).

Hind (*J.-R.*). — Éléments elliptiques de la comète de Tempel comète 1873, II. (135-136).

Sporer. — Observations des taches solaires en 1871. (137-144).



Lorenzoni (*G.*). — Observations de la comète 1873, II, faites à Padoue. (143-144).

Hind (*J.-R.*) — Calcul du passage de Vénus en 1882. (147-148).

Bruhns (*C.*). — Observations et éphéméride de la comète périodique de Tempel. (149-152).

Galle (*J.-G.*). — Note sur les observations de l'opposition de Flore (153-156).

Watson. — Découverte de la planète (133) à Ann-Arbor le 23 août 1873. (155-156).

Borrelly. — Découverte de la comète 1873, III, faite à Marseille le 20 août. (155-156).

Rogers (*W.-A.*). — Éphéméride de Félicitas pour l'opposition de 1873. (157-158).

Niessl (*G. v.*). — Mémoire sur l'orbite du bolide du 17 juin 1873. (161-174).

Schulze (*L.-R.*). — Éléments et éphéméride de la comète de Brorsen pour son retour de 1873. (173-184).

Plummer (*W.-E.*). — Éphéméride de la comète de Brorsen pour son retour en 1873. (183-186).

Weiss (*E.*), *Peters* (*C.-F.-W.*). — Observations et éléments de la comète 1873, III. (187-188).

Weiss (*E.*). — Éléments et éphéméride de la comète 1873, IV, découverte à Paris le 23 août, par M. P. Henry. (193-194).

Bruhns (*C.*). — Observations de planètes faites à Leipzig. (195-198).

Börgen (*C.*). — Observations des comètes 1873, III et 1873, IV, faites à Leipzig. (197-200).

Möller. — Éléments et éphéméride de la comète 1873, IV. (199-200).

Lorenzoni (*G.*). — Observations de la comète 1873, II, faites à Padoue. (199-200).

Spörer (*G.*). — Observations des taches solaires en 1871. (201-208).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Sur la variabilité de la période de δ de la Balance. (209-217).

Vogel (*H.*). — Note sur les spectres des comètes 1873, II (Borrelly) et 1873, IV (Henry). (217-220).

Seeliger (*H.*). — Sur les erreurs des déterminations électriques de différences de longitudes. (221-240).

Watson (*J.-C.*). — Découverte d'une nouvelle planète faite à Ann-Arbor le 16 août. (241-242).

Plummer (*W.-E.*). — Éphéméride de la comète de Brorsen. (241-244).

Engelmann (*R.*). — Observations de petites planètes faites à Leipzig. (242-248).

Seeliger (*H.*). — Note sur la méthode de Jacobi pour la résolution d'un système d'équations normales à trois inconnues. (249-252).

Luther (*R.*). — Découverte de la planète (134) faite à Düsseldorf le 27 septembre 1873. (252-254).

Knorre (*W.*). — Observations de petites planètes faites en 1873 au cercle méridien de Berlin. (253-256).

Hall (*A.*). — Éléments d'Alceste (124) et éphéméride pour l'opposition de 1873. (262-266).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations des comètes de Tempel, Borrelly, Henry et Brorsen, faites à Athènes en 1873. (265-268).

Oppenheim (*H.*). — Observations des comètes 1873, IV et 1873, V, faites à l'héliomètre de Königsberg. (267-268).

Tempel (*W.*). — Observations de la comète 1873, II, faites à Milan. (269-272).

Engelmann (*R.*). — Observations méridiennes de (133), faites à Leipzig. (275-278).

Ball (*Leo de*). — Éléments de la planète (128). (281-284).

Fabritius (*W.*). — Éléments et éphéméride de la comète 1873, V. (282-284).

Bruhns (*C.*). — Observations de la planète (134), faites à Leipzig. (285-288).

Luther (*R.*). — Observations de la planète (134), faites à Bilk. (287-288).

Dreyer (*Joh*). — Remarques sur le point radiant des Perséides. (289-292).

L'astronome de Copenhague rapproche l'orbite de cet essaim de celui de la comète 1870, I.

Vogel (*H.*). — Sur la détermination du mouvement des étoiles à l'aide des observations spectroscopiques. (291-298).

Vogel (*H.*). — Sur le spectre de la comète 1873, V. (297-298).

Holetschek. — Orbite de la première comète de 1871. (297-302).

Strasser (*G.*). — Observations méridiennes de planètes, faites en 1872 à Kremsmünster. (301-304).

Weiss (*E.*). — Éléments et éphémérides des comètes 1873, II et 1873, V. (305-308).

Gericke (*Hugo*). — Observations de petites planètes faites en 1872 et 1873 à Leipzig. (309-312).

Stephan (*E.*). — Observations de comètes et de planètes, faites en 1873 à Marseille. (311-316).

Coggia. — Découverte de la comète 1873, VI, faite à Marseille le 11 novembre 1873. (315-316).

Winnecke et *Rümker.* — Observations de la comète 1873, VI, faites à Strasbourg et à Hambourg. (317-318).

Weis (*E.*). — Éléments et éphéméride de la comète 1873, VI. (319-320).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Mémoire sur la durée de la rotation de la planète Mars. (321-334).

M. Schmidt fixe la durée de la rotation à $24^h 37^m 22^s,6007$.

Krüger (*A.*). — Note sur le calcul des coefficients d'une fonction périodique à l'aide de valeurs données de la fonction (333-336).

Engelmann (*R.*). — Observations méridiennes de Mars, faites à Leipzig pendant l'opposition de 1873. (337-368).

Bruhns. — Observations de la comète 1873, VI,
(367-370).

Watson (*J.-C.*). — Éphéméride d'Hélène (101) p
de 1873-1874. (317-372).

Ball (*Leo de*). — Éphéméride de (123) pour l'opp
(373-374).

Austin (*E.-P.*). — Éphéméride de Brunhilda (12
tion de 1873-1874. (375-376).

Millosovich (*E.*). — Circonstances du passage de
pour divers points de la Terre. (277-280).

Fabritius (*W.*). — Éléments de la comète 1873,

Stephan (*E.*). — Observations de la comète de Fa
seille. (283-284).

Tome LXXXIII, n[os] 1969-1992; 1874.

Spörer (*G.*). — Remarques sur la théorie de
profondeur donnée par M. Faye, à propos des
(1-6).

Weiss (*E.*). — Sur l'identité de la comète de 181
mète découverte le 10 novembre 1873 par M.
velle détermination de l'orbite de cette dernière.

Schmidt (*J.-F.-Julius*). — Observations d'étoiles
à Athènes en 1873. (9-14).

Schur (*W.*). — Éphéméride pour l'opposition d'
1874. (13-16).

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Sur la différence de
Batavia et Singapore (17-20).

Holetschek. — Observations méridiennes de petites planètes, faites en 1873 à l'Observatoire de Vienne. (27-32).

Hoppenheim (*H.*). — Éléments et éphéméride de Lydie (110) pour l'opposition de 1874. (33-36).

Möller (*Axel*). — Observations de planètes et de comètes, faites en 1873 à Lund. (35-42).

Valentiner (*W.*). — Éphéméride pour l'opposition de Clio (84), en 1874. (43-44).

Strasser. — Observations méridiennes de planètes et de comètes, faites en 1873 à Kremsmünster. (43-48).

Weiss (*Ed.*). — Éléments et éphéméride de la comète découverte par M. P. Henry, le 23 août 1873. (49-50).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de Flore (8), faites à l'Observatoire d'Hamilton-College, suivant le plan du Dr Galle. (49-52).

Stephan (*E.*). — Liste de quinze nébuleuses découvertes et observées à Marseille. (51-54).

Zielinsky (*Aug.*). — Éléments paraboliques les plus probables de la comète 1873, V. (53-56).

Schönfeld (*E.*). — Note sur les anciennes observations de Mira Ceti, par *David Fabricius*. (55-60).

Luther (*R.*). — Observations de petites planètes, faites en 1873 à l'Observatoire de Bilk-Düsseldorf. (59-62).

Knorre (*V.*). — Observations de planètes, faites en 1873 au grand cercle méridien de Berlin. (61-64).

Peters (*C.-H.-F.*). — Orbite de Ianthe (98). (63-64).

Stein (*S.-Th.*). — L'Heliopictor. (65-72).

Le Dr Stein décrit une sorte de châssis photographique qui permet d'opérer en pleine lumière, sans la nécessité d'avoir une chambre obscure, toutes les opérations se faisant d'une manière automatique dans une boîte fermée. On sait qu'il existe déjà un grand nombre d'appareils de cette espèce.

Schmidt (*J.-F.-Julius*). — Note sur la rotation de Jupiter. (71-80).

Les déterminations les plus modernes de la durée de la révolution de Jupiter sur

lui-même sont celles d'Airy et de Mädler, en 1834, qui donnent $9^h 55^m 24^s,2$ et $9^h 55^m 26^s,53$; ces résultats sont concordants, mais leur degré d'approximation n'est pas connu.

M. Schmidt s'est occupé deux fois de cette question : une première fois en 1851, à l'Observatoire de Bonn, il a eu l'occasion de montrer que le passage d'une tache par le méridien central de Jupiter pouvait se déterminer avec une erreur moyenne moindre que $0^m,45$.

Plus tard, à Athènes, il a eu l'occasion d'observer sur la planète des taches remarquables, qui ont persisté du 15 mai au 7 juillet 1862 et du 15 au 21 mai 1873.

En discutant ces deux séries d'observations, M. Schmidt trouve pour durée de révolution de la planète :

1862...........	$9^h 55^m 25^s,70$	erreur probable $\pm 0^s,05$
1873...........	$9^h 56^m 7^s,2$	

Le Dr Lohse, après avoir rappelé divers phénomènes des passages de 1761 et 1769, qui paraissent s'expliquer par une action de l'atmosphère de la planète, propose d'étudier au spectroscope l'absorption produite par cette atmosphère et indique les régions du spectre où elle doit être le plus sensible.

La comète a été découverte à Strasbourg, le 21 février 1874.

Henry (*P.* et *Pr.*).— Éléments et éphéméride de Velléda (126) pour l'opposition de 1874. (145-146).

Möller (*Axel*). — Observations de petites planètes, faites à Lund en 1873. (149-154).

Dembowski. — Mesures micrométriques d'étoiles doubles, faites en 1872 et 1873 à son observatoire de Gallarate. (161-174).

On sait que, depuis plusieurs années, M. Dembowski s'occupe de reprendre avec le 7 pouces de son observatoire particulier les mesures des étoiles doubles principales du Catalogue de Dorpat.

Bredikhine (*Th.*). — Observations de Flore (8), faites à l'Observatoire de Moscou en 1873. (174-175).

Schulhof (*L.*). — Observations équatoriales de planètes et de comètes, faites en 1873 à l'Observatoire de Vienne. (177-198).

Spörer (*G.*). — Observations de taches et de protubérances solaires, faites en 1872 à Anclam. (199-206).

Hill (*G.-W.*). — Méthode pour le calcul des perturbations absolues. (209-224).

La méthode indiquée par M. Hill consiste à prendre pour variable indépendante l'anomalie vraie; Hansen a, on le sait, fait usage de l'anomalie excentrique.

Veltmann (*W.*). — Sur les projections conformes des cartes géographiques. (225-238).

Kayser (*E.*). —De l'emploi géodésique et astronomique du niveau. (241-264).

Tisserand (*F.*). — Observations des éclipses des satellites de Jupiter, faites en 1874 à l'Observatoire de Toulouse. (265-266).

Engelmann (*R.*). — Observations de petites planètes, faites en 1873-1874 au cercle méridien de Leipzig. (267-270).

Van de Sande Bakhuyzen. — Observations des planètes (135) et (136), faites à l'Observatoire de Leyde. (269-270).

Stephen Alexander. — Remarques, à propos des observations de M. Tebbutt, sur les passages des s[illegible]r devant la planète. (273-278).

Stockwell (J.-N.). — Correction des éléments de l'orbit dice (75). (279-284).

Le calcul des corrections porte sur l'ensemble des observations de

Wolf (R.). — Remarques sur les variations de la déclin gnétique. (285-286).

Luther (R.). — Observations de petites planètes, faites Düsseldorf. (291-294).

Schur (W.). — Éléments et éphéméride de la comète necke. (293-294).

Weiss (E.). — Éléments et éphéméride de la même com 298).

Holetschek (J.). — Éléments et éphéméride de la comète (299-300).

Palisa (J.). — Observations de la planète (137), découver le 21 avril 1874. (301-302).

Gasparis (A. de). — Observations de la comète de Winne à Naples. (301-302).

Rümker (G.). — Observations des comètes de Winne Coggia, faites à Hambourg. (303-304).

Van de Sande Bakhuyzen. — Note sur la goutte noir dans les passages de Vénus. (305-316).

Becker (E.). — Observations méridiennes de petites faites en 1873 à Neuchâtel. (317-320).

Tempel (W.). — Observations de la comète de Winnec l'Observatoire de Brera. (319-320).

Galle (J.-C.). — Sur le calcul de la trajectoire d'un servé de plusieurs stations et sur le bolide du 17 (321-350).

Renan (H.). — Éléments et éphéméride de la planète 350).

Dunér (A.-C.). — Éléments et éphéméride de la com gia. (351-352).

Schönfeld (*E.*). — Mémoire sur les variations d'intensité de la lumière des étoiles variables. (353-384).

Van de Sande Bakhuyzen. — Éléments de la planète (136). (383-384).

Tome LXXXIV, n°s 1993-2016; 1874.

Bayer. — Sur l'influence des déviations locales du fil à plomb dans les opérations de nivellement. (16).

Tietjen (*F.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Coggia (1874, III). (15-16).

Davis (*C.-H.*) et *Hall* (*A.*). — Observations de comètes et de petites planètes, faites en 1873 à l'équatorial de l'Observatoire de Washington. (17-28).

Dunér (*A.-C.*). — Observations des différences de déclinaison entre Flora (8) et les étoiles voisines, faites en 1873 à l'Observatoire de Lund. (27-32).

Holetschek (*J.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Coggia (1874, III). (31-32).

Bruhns (*C.*). — Observations de comètes et de planètes, faites en 1873 à l'Observatoire de Leipzig. (33-46).

D'Arrest et *Dreyer* (*J.*). — Observations de la comète de Coggia (1874, III) faites à Copenhague, du 8 au 23 mai 1874. (45-48).

Perrotin. — Découverte de la planète (138), faite à l'Observatoire de Toulouse le 19 mai 1874. (47).

Haupt. — Sur l'influence des déviations du fil à plomb dans la mesure des différences de hauteur et dans les nivellements géométriques. (49-56).

Spörer. — Observations de taches et de protubérances solaires, faites en 1872 à Anclam. (57-65).

Powalky (*C.*). — Orbite de Virginia (50). (65-75).

Les éléments, déduits de l'ensemble des observations faites pendant les oppositions de 1857, 1859, 1860, 1861, 1863, 1866 et 1870, se rapportent à l'équinoxe moyen de 1874,0; ils sont suivis d'une éphéméride pour l'opposition de 1874.

Vogel (*H.-C.*). — Observations de Flora (8), faites en 1873 à l'Observatoire de Bothkamp, par MM. *Vogel* et *Lohse*. (73-77).

Doberck (*W.*). — Orbite définitive de la comète I, 1824. (74-79).

Cette comète a été découverte en 1824 par Rumcker et observée seulement en Australie par Rumcker et Brisbane. A la demande de la Société Astronomique allemande, les observations originales ont été réduites et calculées à nouveau avec toute l'exactitude possible.

Vogel (*H.-C.*). — Emploi de la photographie pour l'observation du passage de Vénus. (81-90).

De ses nombreux essais sur les divers collodions et sur les différentes manières de développer l'image, le Dr Vogel déduit les conclusions suivantes :

1° La contraction de la lame de collodion dépend de la nature de la pyroxyline et de son degré de concentration. Le collodion épais adhère plus fortement que le collodion peu concentré.

2° Le collodion obtenu avec la celloïdine de Schering est le meilleur.

3° L'emploi de l'albumine et du caoutchouc, comme de tous les autres moyens d'augmenter l'adhérence avec la plaque, augmente la stabilité de la couche. L'usage de la gomme (plaques sèches) diminue la stabilité.

4° Les développements par les sels d'acide pyrogallique peuvent être employés sans inconvénient pour les plaques sèches à l'albumine. Les développements alcalins doivent être employés pour les plaques humides.

Hall (*A.*). — Orbite d'Alceste (124). (89-95).

L'orbite et l'éphéméride pour l'opposition de 1875 sont calculées à l'aide de six lieux normaux déduits des observations de la planète, faites d'août à décembre 1873.

Marth (*A.*). — Éphéméride des cinq satellites intérieurs de Saturne pour les mois de juin à octobre 1874. (97-105).

Zenker (*W.*). — Sur quelques points de la théorie des comètes. (103-118).

Vogel (*H.-C.*). — Mélanges d'analyse spectrale. (113-125).

Le Dr Vogel propose l'adoption d'une nouvelle série de types pour le spectre des étoiles; il se fonde pour cela sur la relation qui doit exister entre la température de l'atmosphère des étoiles et la nature de leur spectre formé d'un plus ou moins grand nombre de lignes. Il fait ensuite connaître quelques observations sur le spectre des étoiles rouges.

Schönfeld (*E.*). — Éphémérides pour l'observation des étoiles variables du type d'Algol. (131-139).

D'Arrest. — Observations sur la position et le spectre de la comète de Coggia (1874, III). (137-140).

Copeland (*Ralph.*). — Positions des étoiles pour l'observation des déclinaisons de Junon pendant son opposition de 1874. (149-155).

Rogers (*W.-A.*). — Éléments elliptiques de Félicitas (109). (161-165).

Les éléments sont déduits des oppositions de 1869 et 1873.

Schulhof (*L.*). — Éléments elliptiques de la comète de Coggia (1874, III). (167-171).

Ces éléments sont déduits de l'ensemble des observations de l'astre, faites en Europe.

Borrelly (*A.*). — Découverte de la comète 1874, IV. (173-174).

La comète a été découverte à Marseille le 26 juillet.

Watson (*J.-C.*). — Éléments et éphéméride de Æthra (132). (187-191).

Les calculs sont faits d'après les observations du 13 juin au 14 juillet 1874

Seidel (*L.*). — Sur le calcul de la véritable valeur d'inconnues entre lesquelles existent plusieurs équations. (193-211).

Spörer. — Observations des taches et des protubérances solaires en 1872. (217-223).

Coggia. — Découverte de la comète 1874, V à l'Observatoire de Marseille, le 19 août 1874. (222).

Knorre (*V.*). — Observations d'étoiles de comparaison et de planètes faites à l'Observatoire de Berlin. (225-263).

D'Arrest. — Découvertes de nouvelles étoiles dont les spectres appartiennent aux types III et IV du P. Secchi. (263-269).

Groneman (*H.-J.-H.*). — Hypothèse sur la lumière des aurores polaires. (273-307).

Galle (*J.-G.*). — Résumé des observations faites sur Flora pendant son opposition de 1873, en vue de déterminer la parallaxe solaire. (315-321).

Le Dr Galle remarque que, quoiqu'il y ait dans les observations qu'il a reçues des stations de l'hémisphère sud des discordances plus grandes que celles qui se rencontrent dans les observations de l'hémisphère nord, on peut cependant, en

éliminant celles où les erreurs paraissent dues à des circonstances expérimentales, les faire entrer en ligne de compte. Un premier calcul de l'ensemble des observations lui a donné

$$\varpi = 8'', 858,$$

chiffre peu différent de celui de Newcomb, de Le Verrier, de Foucault et de Powalky.

Holetschek (*J.*). — Orbite définitive de la comète 1871, I. (323-331).

Safford (*J.-H.*). — Détermination de l'orbite d'Alcmène (82). (331-337).

Le calcul a porté sur l'ensemble des neuf oppositions observées de 1864 à 1873.

Konkoly (*N. v.*). — Observations spectroscopiques des étoiles filantes du mois d'août. (337).

Le noyau donne un spectre continu s'étendant à la portion du spectre qui répond à la couleur du météore. La traînée donne les lignes brillantes du sodium, du magnésium, du strontium ou du lithium.

Abbe (*Cleveland*). — Observations sur la chevelure de la comète de Coggia. (353-367).

D'Arrest. — Nouvelles étoiles dont les spectres appartiennent aux types III et IV du P. Secchi. (369-375).

Bruhns (*H.*). — Remarques sur le calcul de la hauteur d'une étoile filante d'après des observations correspondantes. (379-380).

Tome LXXV, n°s 2017-2040; 1875.

Observations des petites planètes, faites en 1873 à Kremsmünster. (3-7).

Bredikhine (*T.*). — Positions de la comète 1874, III, d'après les observations faites à Moscou du 11 mai en juillet. (9-13).

Fearnley (*C.*). — Position des étoiles de comparaison de la comète de Coggia. (11-15).

Schulhof (*L.*). — Éléments et éphéméride de (139). (13-14).

Vogel (*H.-C.*). — Note sur le spectre des comètes de Winnecke et de Coggia et sur les changements de forme de la tête de cette dernière. (17-35).

Le Dr Vogel fait connaître ses propres observations, qui s'étendent du 6 mai au

22 juin, et discute ensuite les différentes observations faites à l'étranger sur les mêmes comètes. La conclusion est que toutes les comètes ont un spectre formé des trois mêmes bandes lumineuses dont les longueurs d'onde sont 554, 512 et 469.

Luther (*Rob.*). — Éphéméride pour l'opposition de Clymène (104) en 1874. (35-36).

Holetschek (*J.*). — Observations méridiennes de petites planètes et de comètes faites en 1874 à l'Observatoire de Vienne (35-39).

Luther (*Rob.*). — Observations de petites planètes faites en 1874 à l'Observatoire de Düsseldorf. (39-40).

Hill (*G.-W.*). — Sur une inégalité à longue période produite dans le mouvement d'Hestia par l'action de la Terre. (41-45).

L'existence de cette inégalité, que M. Hill a calculée jusqu'aux termes de premier ordre, résulte de la grande excentricité de l'orbite de la planète et de ce que la durée de sa révolution diffère peu de quatre ans; elle a pour expression

$$\int n\,dt = 75'',869 \sin(4g - g' + 109^\circ 37' 10''),$$

et peut s'élever à 125 secondes.

Tebbutt (*J.*). — Observations de la comète de Coggia faites à Windsor (N.-S.-Wales), du 6 au 26 août 1874. (51-52).

Watson (*J.-C.*). — Découverte de la planète (139). (53-54).

La planète a été découverte à Peking, où M. Watson s'était rendu, pour observer le passage de Vénus, le 10 octobre 1874.

Holetschek (*J.*). — Éléments et éphéméride de la comète découverte à Marseille le 6 décembre 1874, par M. Borrelly. (53-56).

Koch. — Éléments et éphéméride de la même comète. (55-56).

Kowalczyk. — Observations méridiennes de petites planètes faites en 1874 à Varsovie. (59-62).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de taches solaires faites à Athènes en 1874. (65-70).

Henry (*P.*). — Découverte de la planète (141). (71).

La planète a été découverte le 13 janvier 1875.

Jordan (*W.*). — Note sur le développement le plus court des fonctions en série convergente des puissances. (73-77).

Bruhns (*C.*). — Observations de planètes et de comètes faites en 1874 à l'Observatoire de Leipzig. (81-105).

Palisa (*J.*). — Observations de petites planètes, faites en 1874 à l'Observatoire de la Marine, à Pola. (105-109).

Stone (*Ormond*). — Méthode pour la correction de l'orbite d'une planète. (107-110).

Par des approximations successives, M. Stone arrive rapidement à des éléments qui représentent les observations plus exactement qu'elles ne le sont par une orbite circulaire.

Palisa (*J.*). — Découverte de la planète (140). (109).

Planète découverte à Pola le 28 janvier 1875.

Stockwell (*J.-N.*). — Sur la théorie du mouvement de la Lune. (113-147).

Le Mémoire de M. Stockwell a pour but l'étude des différences qui existent entre celles des équations de Plana et de Delaunay qui se rapportent aux inégalités à courtes périodes.

Gericke (*H.*). — Observations de petites planètes, faites en 1874 au micromètre circulaire de Leipzig. (145-146).

Doberck (*W.*). — Éléments de μ^2 Bouvier. (147-153).

Zenker (*W.*). — Note sur la théorie de Doppler. (151-154).

Todd (*D.-P.*). — Observations des phénomènes des satellites de Jupiter, faites en 1874 à l'Observatoire de Amherst College, Massachusets (U.-S.). (155-158).

Schenzel (*G.*). — Observation du passage de Vénus, faite à Klausenburg. (165-169).

Strasser (*G.*). — Observations de planètes, faites en 1873 à l'Observatoire de Kremsmünster. (169-174).

Tebbutt (*J.*). — Observation du passage de Vénus à Windsor (N.-S.-Wales). (173-177).

Tempel (*W.*). — Notes sur l'apparence de la comète de Coggia d'après les observations faites à Florence. (177-191).

Palisa (*J.*). — Découverte de la planète (143). (189-190).

La planète a été découverte le 23 février 1875.

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — Observations méridiennes de planètes, faites en 1873, à l'Observatoire de Leyde. (193-203).

Schiaparelli (*J.-V.*). — Observations de la comète périodique de Winnecke (1819, III), faites à l'Observatoire de Brera. (201-204).

Doberck (*W.*). — Éléments hyperboliques de la comète 1845, I. (205-209).

Le calcul des éléments est fondé sur cinq positions normales comprises entre le 11 janvier et le 7 mars 1845.

Asten (*E. v.*). — Éphéméride de la comète d'Encke pour 1875. (209-221).

Luther (*R.*). — Observations de petites planètes, faites en 1874 à l'Observatoire de Düsseldorf. (219-222).

Renan (*H.*). — Éléments et éphéméride de Lumen (141). (221-222).

Strasser. — Observations de petites planètes, faites en 1874 à Kremsmünster. (223-224).

Schmidt (*J.-H.-J.*). — Observations d'étoiles variables faites à Athènes en 1873-1874. (225-235).

Rogers (*W.-A*). — Nouveaux éléments et éphéméride de Brunhilda (123) pour 1875. (241-247).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations des comètes de Winnecke et de Coggia, faites en 1874, à Kiel. (247-248).

D'Arrest. — Catalogue d'étoiles dont le spectre est des types III et IV du P. Secchi. (249-255).

Galle (*J.-G.*). — Discussion des observations faites sur Flora, en 1873, en vue de déterminer la parallaxe du Soleil. (257-271).

La discussion définitive des observations faites dans l'un et l'autre hémisphère donne au Dr Galle

$$\varpi = 8'', 879,$$

avec une erreur probable de $\pm 0'', 0396$.

Knorre (*V.*). — Éléments et éphéméride de la planète (143). (259-270).

Schjellerup. — Note sur la théorie de la Lune, publiée par M. Stockwell. (273-279).

Plummer (*J.-J.*). — Observations de la comète de Coggia, faites à Orwell Park. (277-283).

BERICHTE ÜBER DIE VERHANDLUNGEN DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG; Mathematisch-physische Classe ([1]).

Tome XXV; 1873.

Zöllner (*F.*). — Sur la température et la constitution physique du Soleil. 2e Mémoire. (158-194).

Voir *Bulletin*, t. V, p. 199.

Zöllner (*F.*). — Sur l'état d'agrégation des taches solaires. (505-522).

Baltzer (*R.*). — Remarques mathématiques. (523-537).

Vogel (*H.-C.*). — Sur un spectroscope pour l'observation des étoiles de faible éclat, et sur quelques observations faites avec cet instrument. (538-561, 1 pl.).

Scheibner (*W.*). — Sur les valeurs moyennes. Extrait d'une lettre à M. Fechner. (562-567).

Scheibner (*W.*). — Sur quelques théorèmes généraux relatifs à la convergence. (568-572).

L'auteur démontre qu'une série peut être différentiée dans l'intérieur du cercle de convergence. Il donne un exemple des résultats absurdes auxquels on peut être conduit en s'appuyant sans précautions sur des égalités où entrent des fonctions multiformes.

Tome XXVI; 1874.

Zöllner (*F.*). — Sur un spectroscope oculaire simple pour les étoiles. (24-25).

Fuchs (*Fr.*). — Essai de détermination de la tension totale et de la marche de la tension à l'extrémité libre de la spirale secondaire dérivée. (56-92).

Börnstein (*R.*). — Sur le rapport entre le magnétisme temporaire et la force magnétisante, et ses relations avec l'action mutuelle des particules métalliques. (93-111).

Zöllner (*F.*). — Sur une expérience électrodynamique. (114-119).

([1]) Voir *Bulletin*, t. I (2e Série), 2e Partie, p. 52.

Neumann (*C.*). — Sur la constante *k* de Helmholtz. (132-152).

Hankel (*W.*). — Sur les propriétés thermo-électriques du spath calcaire, du béryl, de l'idocrase et de l'apophyllite. (465-472).

MONATSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN (¹).

Année 1876.

Websky. — Sur la relation des angles entre quatre faces cristallines d'une même zone, et sur celle des angles entre quatre arêtes d'une même face. (4-21).

Buff. — Comment se comportent les rayons de chaleur obscure vis-à-vis de l'hydrogène et de l'air. (89).

Zincken dit *Sommer.* — Sur la représentation exacte de la réfraction d'un rayon par un système de lentilles : position des foyers, des points principaux et des points de croisement. (123-128).

Wernicke. — Sur la détermination des constantes de l'absorption de la lumière dans l'argent métallique. (128-147).

Helmholtz (*H.*). — Compte rendu des expériences sur l'action électromagnétique de la convection électrique, faites par M. *Henry A. Rowland*, à Baltimore. (211-216).

Helmholtz (*H.*). — Compte rendu des expériences de M. le Dr *E. Root*, de Boston, concernant la pénétration du platine par les gaz électrolytiques. (217-220).

Riess. — Sur les peignes neutres de la machine de Holtz. (224-241).

Goldstein. — Communications préliminaires sur les décharges électriques dans les gaz raréfiés. (279-295).

Riess. — Sur la production d'électricité par le frottement de glissement. (301-315).

(¹) Voir *Bulletin*, I, 187; IV, 200; VI, 40; VII, 131; X, 285.

Schering (*E*). — Généralisation du critérium de Gauss concernant le caractère de résidu quadratique d'un nombre par rapport à un autre. (330-331).

Kronecker (*L.*). — Remarques au sujet de la Note précédente. (331-341).

Holtz. — Sur la décharge électrique dans des isolateurs fixes. (486-501).

Holtz. — Sur les conducteurs auxiliaires des machines à influences simples et composées. (501-509).

Borchardt (*C.-W.*). — Sur la moyenne arithmétique et géométrique de quatre éléments. (611-621).

Weierstrass. — Démonstration d'un théorème fondamental de la théorie des fonctions périodiques de plusieurs variables. (680-693).

Frölich. — Sur la chaleur céleste, la température de l'espace et la température moyenne de l'atmosphère. (825-830).

NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE, rédigée par E. CATALAN, professeur à l'Université de Liége, avec la collaboration de MM. MANSION, LAISANT, BROCARD, NEUBERG et ÉDOUARD LUCAS (¹).

Tome II; 1876.

Neuberg (*J.*). — Sur les polygones circonscrits à une conique. (1-9, 34-41 et 65-70).

Résumé des travaux de Darboux et de Weyr sur ce sujet. — I. Sur les coordonnées (ρ, ρ_1) de Darboux. — II. Théorème de Poncelet. — III. Involution d'un degré supérieur au second.

Le Paige. — Note sur l'*Essai pour les coniques*. (9-13).

L'Essai de Pascal contient des propositions équivalentes au théorème de Carnot et à celui de Chasles sur le rapport anharmonique de cinq points d'une conique.

(¹) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 217; t. X, p. 146. Paraît tous les mois, en livraisons de deux feuilles. Prix d'abonnement : 10 francs pour la Belgique, 12 francs pour les pays appartenant à l'Union postale.

Lucas (*É.*). — De la trisection de l'angle, au moyen du compas. (14-15).

Trisection de l'angle au moyen d'une figure décrite sur un cylindre de révolution, par un compas à branches courbes.

Mansion (*P.*). — Sur la théorie des transformations linéaires. (15-22).

Résumé de Salmon et de Chasles. — I. Propriété fondamentale.

Laisant. — Sur un problème relatif aux courbes planes. (23-24).

L'enveloppe de la droite qui joint les pieds des coordonnées rectangulaires d'une courbe quelconque est telle que la droite qui joint deux points correspondants sur l'enveloppe et la courbe primitive, et la tangente à celle-ci sont également inclinées sur les axes, mais en sens contraire.

Charlier. — Sur les nombres polyédraux. (24-29).

Considérons un polyèdre ayant S sommets, A arêtes, F faces, dont f' sont des polygones de p' côtés, f'' des polygones de p'' côtés, etc.; supposons qu'un angle solide ait G faces, g' de p' côtés, g'' de p'' côtés, etc. Le nombre polyédral de n correspondant est $n + (S-2)\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\Sigma(f-g)(p-2)$. Baltzer (*Elemente der Mathem.*, 3. Aufl., p. 156) calcule mal ce nombre. Applications.

Catalan (*E.*). Sur un Mémoire de Libri. (30-34).

Méthode de Libri pour résoudre les congruences du premier degré. Théorème erroné énoncé par Libri.

Mansion (*P.*). — Sur la théorie des transformations linéaires (Suite). (41-49).

II. Irréversibilité des transformations linéaires.

De Tilly. — Sur les asymptotes des courbes algébriques. (49-53).

Critique du théorème de M. Catalan : « Dans toute courbe algébrique, le nombre des points situés à l'infini sur la courbe et sur une asymptote quelconque est nécessairement pair ». Ce théorème ne peut se démontrer que si l'on suppose que les points à l'infini d'une courbe proviennent exclusivement de l'éloignement progressif et illimité de tous les points réels d'intersection de la courbe avec deux sécantes parallèles à l'asymptote, situées l'une d'un côté de celle-ci, l'autre de l'autre. Or cette supposition est en contradiction avec la convention, qu'une droite rencontre une courbe d'ordre n en n points réels ou imaginaires, à une distance finie ou infinie.

Hermite (*Ch.*). — Sur une formule de M. Delaunay. (54-55).

La formule

$$PD^mQ = D^mPQ - m_1 D^{m-1}P'Q + m_2 D^{m-2}P''Q + \ldots + (-1)^m P^{(m)}Q$$

se démontre aisément, comme on sait, en posant $P = e^{px}$, $Q = e^{qx}$.

Lucas (*É.*). — Note sur le triangle arithmétique du Pascal et sur la série de Lamé. (70-75).

Formules nouvelles sur les combinaisons. Formule de Janni. Série de Lamé : propriétés nouvelles très-remarquables.

Catalan (*E.*). — Note sur un lieu géométrique. (75-82).

Solutions des questions suivantes : « Déterminer le lieu des points de contact d'une conique donnée dont les foyers se meuvent avec des droites données, avec les tangentes parallèles à l'une des droites données. Trouver une courbe telle que la longueur MN de la normale en M soit à la distance entre le pied N de cette droite et un point fixe F dans un rapport donné. » Cette dernière question conduit à de curieuses équations différentielles.

Busschop (*P.*). — Problèmes de Géométrie. (83-84).

Décomposer un carré en huit parties, de manière que, étant convenablement assemblées, elles constituent deux carrés, doubles l'un de l'autre, ou trois carrés qui soient entre eux comme les nombres 2, 3, 4.

Lucas (*É.*). — Sur un problème d'Euler, relatif aux carrés magiques. (97-101).

Lucas (*É.*). — Sur la théorie des nombres. (101-102).

Mansion (*P.*). — Sur une formule analogue à celle de Leibnitz. (103-105).

Cette formule est due à M. Drussel. Soit $u = (x+a)^{-1}$, $v = (x+b)^{-1}$. On a

$$D^n (uv)^{-1} = (-1)^n \frac{1.2.3\ldots n}{(uv)^{n+1}} \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{u - v}.$$

On en déduit aisément la valeur des dérivées successives de arc tang x et, par suite, le développement de cette fonction en série, même pour $x = 1$.

Brocard (*H.*). — Questions de Géométrie. (105-108).

Intersection d'une droite avec une hyperbole équilatère donnée par ses asymptotes et un point. Limite du rapport du vide au plein dans un triangle équilatéral que l'on cherche à remplir avec des cercles égaux. Les six plus courtes distances des quatre hauteurs d'un tétraèdre sont parallèles aux arêtes et n'ont que trois plus courtes distances non nulles; celles-ci sont parallèles aux plus courtes distances des arêtes opposées.

Even et *Mansion* (*P.*). — Démonstration d'un théorème de Géométrie (109-110).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Biographie de Jean Wilson. (110-114).

Notice [redacted] *of Paradoxes*, p. 132-133), complétée par [redacted] Bibliothèque de Cambridge. Wilson, né en [redacted] les sciences pour le barreau; il a sur- [redacted] gistrat et juriconsulte.

Brocard (*H.*). — Notes sur divers articles de la *Nouvelle Correspondance*. (115-117).

Mansion (*P.*). — Les compas composés de Peaucellier, Hart et Kempe. (129-136).

Brocard (*H.*). — Note sur diverses propriétés de l'ellipsoïde et de l'ellipse. (136-143).

Démonstrations élémentaires de deux théorèmes : « Le lieu du sommet d'un trièdre trirectangle circonscrit à un ellipsoïde est une sphère concentrique ; le lieu du sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes sont tangentes à un ellipsoïde est un ellipsoïde concentrique au premier et dont les axes ont même direction. » Conséquences nombreuses.

Retsin (*F.*). — Construction de l'hyperbole. (143).

Mansion (*P.*). — Sur les carrés magiques. (161-164 ; 193-201).

Résumé, avec quelques additions, de la consciencieuse Notice historique de M. S. Günther, dans ses *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenchaften* (Leipzig, Teubner, 1876, p. 188-270).

Construction des carrés magiques par enceintes, après avoir rendu la somme des éléments de chaque ligne nulle, en retranchant de chaque élément un nombre convenable. De plus, après cette opération, on double la valeur de chaque élément nouveau, pour éviter les fractions.

Ghysens (*E.*). — Sur la construction des normales à quelques courbes et à quelques surfaces. (165-173).

Étude des relations qui existent entre les normales de deux courbes (ou surfaces) rapportées à des coordonnées polaires, et dont les rayons vecteurs de même direction sont fonctions l'un de l'autre.

Mansion (*P.*). — Sur deux formules relatives à la théorie des courbes planes. (173-175).

Démonstration, d'après M. Green (*Zeuthens Tidsskrift*, 1875, p. 188-189), des formules $\rho\, dp = r dr$, $d\sigma = r\, dt$, dont la dernière est due à M. Catalan ; r, ρ, dt sont le rayon vecteur, le rayon de courbure et l'angle de contingence d'une courbe; p et σ le rayon vecteur et l'arc de sa polaire, par rapport à l'origine.

H. B. — Note sur la méthode d'approximation des parties proportionnelles. (176-177).

Solution de la question 325, t. XV, 1re série, des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Catalan (*E.*). — Quelques théorèmes sur la courbure des lignes. (178).

Formules diverses, parmi lesquelles on distingue celle-ci : « Les rayons de courbure

A, B, C des projections d'une courbe L sur trois plans rectangulaires sont tels que l'on a

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\sin^2\alpha}{A^2} + \frac{\sin^2\beta}{B^2} + \frac{\sin^2\gamma}{C^2},$$

ρ, α, β, γ étant le rayon de courbure de L, et les angles avec les axes de la tangente en L, au point considéré. »

Catalan (*E.*). — Sur un théorème d'Arithmétique. (179-180).

Solution du problème : « Trouver des nombres impairs consécutifs dont la somme soit s. Conséquences quand s est une puissance exacte. »

Lucas (*Éd.*). — Sur l'emploi du calcul symbolique dans la théorie des séries récurrentes. (201-206).

Étude de la série de Lamé, ou plutôt de Léonard de Pise. Remarque sur les formules symboliques, en général.

Neuberg (*J.*). — Sur quelques articles de la *Nouvelle Correspondance mathématique*. (207-209).

Remarques sur l'article de M. Brocard relatif à l'ellipsoïde (p. 136).

Lucas (*Éd.*). — Principes de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique. (225-232, 257-265, 289-296).

Appelons *distance circulaire* d'un point à un cercle le rapport de la puissance du point relativement au cercle au diamètre du cercle. Considérons un cercle fixe ayant O pour centre et R pour rayon, que nous appellerons *cercle radical;* désignons par x, y, z les distances ou coordonnées circulaires du point du plan, par rapport à trois cercles X, Y, X, orthogonaux au cercle O. L'équation d'un cercle, que nous appellerons *cycle*, orthogonal à O, sera de la forme $lx + my + nz = 0$, et celle d'un cercle quelconque de la forme $lx + my + nz + k = 0$. Un point à l'intérieur ou à l'extérieur de O est complétement déterminé par x, y, z. Ces coordonnées permettent d'étudier de la manière la plus naturelle les questions relatives à la théorie de l'inversion par rayons vecteurs réciproques, comme M. Lucas le montre dans son Mémoire. L'équation homogène du second degré en x, y, z, en particulier, représente une quartique bicirculaire (ou une cubique circulaire, si elle passe par O), et l'étude de cette courbe se fait comme celle d'une conique en coordonnées trilinéaires. MM. Lie et Darboux ont déjà fait usage de coordonnées analogues à celles de M. Lucas.

Mansion (*P.*). — Démonstration de la loi de réciprocité des résidus quadratiques. (233-239, 266-272).

Cette démonstration ne s'appuie que sur les propriétés élémentaires des nombres, et est formée de la réunion de théorèmes connus. Voici l'ordre suivi : lemme de Gauss; théorème de Fermat; critérium d'Euler; lemme de Zeller (*Berliner Monatsbericht*, 1872); historique, d'après Kronecker.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une propriété de la fonction $e^{\sqrt{x}}$. (240-243).

La dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de $e^{\sqrt{x}}$ est égale à son intégrale $n^{\text{ième}}$, à une puissance près de $4x$.

XY + Z + X, XY + Z, XZ + Y, YZ + X sont des carrés d

Boset. — Théorèmes de Géométrie. (273).

Démonstration de la relation entre le rayon R du cercl de côté a, b, c, et les rayons r, α, β, γ des cercles inscrit de $a^2 = (\alpha - r)(\beta + \gamma)$ et $\alpha + \beta + \gamma = 4R + z$.

Laisant (A.). — Sur une question paradoxal

Brocard (H.). — Note sur un lieu géométriqu

Solution très-simple d'une question traitée, page 75, par

Le Paige (C.). — Remarques sur la Note de 280).

Le Paige (C.). — Sur l'enveloppe d'un cylin (296-300).

Le cylindre a un rayon constant; l'axe rencontre la constants avec la tangente, la normale, la binormale à veloppe est une surface réglée, gauche en général, et une

Le Paige (C.). — Sur une équation aux différ 302).

L'étude de l'équation $xy'' + ky' - y = 0$ conduit à celle rences finies $\varphi(p, q) = (p - q + 2)\varphi(p, q - 1) + \varphi(p -$ grale, si $\varphi(p, 1) = 1$, $\varphi(0, 1) = 1$, la relation

$$2^{q-1}\varphi(p, q)\Gamma(q)\Gamma(p - q + 2) = \Gamma($$

Tchebychef (P.). — Sur la généralisation d'une talan. (301-306).

M. Catalan a remarqué que

$$\log 2 = \lim\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n}\right) = \lim\left(\frac{1}{n+1} +\right.$$

Mansion (*P.*). — Sur deux questions d'Analyse infinitésimale. (307-309).

L'élimination de α entre

$$F_1(x,y)\varphi_1(\alpha)+F_2(x,y)\varphi_2(\alpha)=0 \quad \text{et} \quad F_1\varphi_1'(\alpha)+F_2\varphi_2'(\alpha)=0$$

donne l'équation d'un lieu passant par les points communs aux courbes du système $F_1\varphi_1+F_2\varphi_2=0$, non leur enveloppe. La série

$$\text{arc tang}\, x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots,$$

où x est positif et <1, diffère de $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots$ d'une quantité égale à une fraction de $1-x$. Donc on peut en conclure la série de Leibnitz pour $\frac{1}{4}\pi$.

Brocard (*H.*). — Notes sur divers articles de la *Nouvelle Correspondance*. (310-314).

Mansion (*P.*). — Sur les courbes unicursales, considérées comme des cissoïdes. (321-328).

Historique. Résultats trouvés par MM. Zahradník, Niewenglowski et Fouret. L'équation

$$a_0y^n+a_1y^{n-1}x+\ldots+a_nx^n=b_1y^{n-1}+b_2y^{n-2}x+\ldots+b_nx^{n-1}$$

d'une courbe unicursale qui a, à l'origine, un point multiple d'ordre $n-1$, peut s'écrire

$$y=tx,\quad x=\frac{A_1}{t-t_1}+\frac{A_2}{t-t_2}+\ldots+\frac{A_n}{t-t_n},$$

ou

$$y=tx,\quad x=\frac{A_1'}{(t-t_1)^p}+\frac{A_2'}{(t-t_1)^{p-1}}+\ldots.$$

L'interprétation géométrique du premier système donne la généralisation suivante du théorème de M. Fouret : « Le rayon vecteur d'une courbe d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n-1$ peut être regardé comme la somme des rayons vecteurs de courbes d'ordres m, p, ..., g, ayant à l'origine des points multiples d'ordres $m-1$, $p-1$, ..., $g-1$, et pour asymptotes celles de la courbe donnée. » Le second système permet de modifier le théorème de M. Fouret, dans les cas d'exception (¹).

Lucas (*Éd.*). — Sur le calcul symbolique des nombres de Bernoulli. (328-338).

Soit

$$\Delta fx = f(x+1)-fx = Ax^a+Bx^{a-1}+\ldots+Lx^0.$$

Faisons $x=1, 2, 3, \ldots, x-1$, et écrivons symboliquement S^m pour

$$S_m = 1^m+2^m+\ldots=(x-1)^m.$$



...e la remarque qui fait la base de cet ... (P. M.)

On aura

$$f(x) - f(1) = \Delta f(S) = AS_m + BS_{m-1} + \ldots + LS_1.$$

L'auteur déduit de cette formule symbolique une foule de relation nouvelles entre les nombres de Bernoulli. L'article est suivi d'une N teur sur l'une de ces relations nouvelles les plus remarquables, savoi

$$\frac{B+n+2}{n+1}\,\frac{B+n+3}{n+2}\cdots\frac{B+2n}{2n-1} = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots -\right.$$

où, chose curieuse, on ne peut pas supposer $n = \infty$.

Gelin. — Cas remarquable d'inégalité de deux triangles

Deux triangles dont les côtés sont respectivement a, aq, aq^2, et q étant différent de l'unité et compris entre $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ et $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ quoique ayant deux côtés égaux et trois angles égaux.

Laisant (A.). — Remarque sur un théorème d'Arit (341-342).

Le nombre $1 + 2^x + 4^x$ est un multiple de 7, si $x \pm 1$ est un multi

Catalan (E.). — Sur la transformation des équations.

Démonstration du théorème de Jerrard, en partie d'après l'*Algèbre* Serret.

Mansion (P.). — Sur de prétendues questions paradoxa 372).

Défense de la terminologie relative aux points circulaires à l'infini à n dimensions.

Brocard (H.). — Roulettes de coniques. (373-384).

Lieu du foyer d'une conique qui roule sans glisser sur une droite.

Lucas (Éd.). — Sur l'emploi dans la Géométrie d'u principe des signes. (384-394).

Conventions diverses pour fixer le sens des directions positives de le plan ou dans l'espace. Ces conventions permettent de distinguer a divers angles formés par deux droites, leurs bissectrices intérieures,

Correspondance. (55, 87, 120, 146, 182, 213, 247, 349, 391).

Sur les carrés magiques (P. S.). — Sur une enveloppe. — Sur le th bri. — Sur la théorie des nombres. — Sur les asymptotes des courb (*Niewenglowski*). — Sur le même sujet et sur la méthode de Libri p des congruences du premier degré (*De Tilly*).

QUESTIONS PROPOSÉES. (62, 94, 127, 159, 189, 221, 254, 255, 285, 319, 366, 401).

QUESTIONS RÉSOLUES. (59, 89, 124, 153, 184, 216, 248, 282, 315, 355, 392).

EXTRAITS ANALYTIQUES. (85, 118, 143, 180, 209).

P. M.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (¹).

Tome II; 1873-1874.

Halphen. — Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre (IIIᵉ Partie). (11-33).

Voir *Bulletin*, t. VII, p. 169 et 172.

I. Des systèmes de coniques dans l'espace. — II. Droites-coniques dans les complexes de l'espace. — III. Coniques communes à deux complexes. — IV. Détermination du nombre des surfaces du second ordre qui satisfont à des conditions données.

Halphen. — Recherches de Géométrie à *n* dimensions. (34-52).

Saltel (*L.*). — Sur la détermination des caractéristiques dans les courbes de degré supérieur. (52-54).

Saint-Germain (*de*). — Sur la durée des oscillations du pendule composé. (54-56).

Halphen. — Sur le déplacement d'un solide invariable. (56-62).

Saint-Germain (*de*). — Du facteur constant dans l'expression de $\Theta(x)$ en produit illimité. (62-63).

Saltel (*L.*). — Sur le plan osculateur et sur la sphère osculatrice. (64).

Halphen. — Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques. (69-72).

Fouret. — Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes,

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. [redacted]

Tome III; 1874-1875.

Halphen. — Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier. (76-92).

Fouret (G.). — Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré. (93-95).

Saltel (L.). — Sur la génération des cycliques et cyclides. (95-101).

Problèmes préliminaires. — Théorèmes sur les cycliques planes. — Théorèmes sur les cycliques sphériques. — Théorèmes sur les cyclides du quatrième ordre. — Seconde Note sur la génération des cycliques. — Sur les foyers des cycliques.

Laguerre. — Sur différentes formes que l'on peut donner à l'intégrale de l'équation d'Euler. (101-103).

Tchebychef (P.). — Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions. (103).

Jordan (C.). — Essai sur la Géométrie à n dimensions. (103-174).

Laguerre. — Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques. (174-181).

Tome IV; 1875-1876.

Sancery (L.). — De la répartition des nombres entre les diviseurs de $\varphi(M)$, lorsque M est une puissance d'un nombre premier impair, ou le double d'une telle puissance. (17-29).

Halphen. — Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes. (29-41).

Brocard (H.). — Sur la détermination d'une courbe par une propriété de ses tangentes. (42-44).

Picquet (H.). — Sur une surface remarquable du huitième degré. (45-59).

Halphen. — Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré. (59-85).

Perrin. — Note sur la division mécanique de l'angle. (85-87).

Cahen. — Ombre portée par un tore sur lui même. (87-88).

Cahen. — Note sur l'épure du conoïde. (88-90).

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE.

Tome XV (2ᵉ série); 1876, 2ᵉ semestre ([1]).

Resal (*H.*). — Note sur la détermination des centres de gravité du volume du tronc de prisme droit à base triangulaire. (289-292).

Faure. — Théorie des indices. (292-317, 339-354, 451-464, 481-496, 529-545).

Aubert. — Solution de la question proposée au Concours général de Mathématiques élémentaires (1875). (318-321).

Resal. — Construction de la tangente en un point de la quadratrice. (337-339).

Mathieu (*J.-J.-A.*). — Quelques propriétés des coniques inscrites ou circonscrites au quadrilatère. (354-359).

Lucas (*Éd.*). — Solution d'un problème de Behà-Eddin sur l'Analyse indéterminée. (359-365).

Behà-Eddin est un auteur arabe qui vécut de 1547 à 1622. Le problème posé par lui à la fin de son Traité de Calcul, et dont il est question dans cet article, est le suivant :

Résoudre en nombres rationnels les deux équations simultanées

$$x^2 + x + 2 = u^2, \quad x^2 - x - 2 = v^2.$$

M. Lucas ramène la question à la recherche, en nombres entiers pour les côtés, d'un triangle rectangle tel, que l'aire du carré de l'hypoténuse, augmentée de 32 fois l'aire du triangle, soit égale à un carré parfait.

Cela le conduit à une solution complète, qui paraît être obtenue pour la première fois. On connaissait la solution $x = 17, y = -16$ depuis longtemps, et M. Genocchi avait donné depuis la solution $x = 34, y = 15$.

On peut consulter sur ce problème assez curieux : *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1ʳᵉ série, t. V, 1846, p. 323. — GENOCCHI : *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano, pubblicati da B. Boncompagni. Note analitiche.* Rome, 1855.

Cauchy. — Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques. (385-416, 433-451).

Ce Mémoire est emprunté aux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. La rédaction nous apprend qu'elle l'a reproduit sur la demande de plusieurs professeurs. Nous ne pouvons que les féliciter de cette heureuse initiative. Le Mé-

([1]) Voir *Bulletin*, I, 157, 159; II, 75; IV, 40; VI, 178; VIII, 25; IX, 173; X, 32; XI, 120.

moire dont il s'agit est publié dans un Recueil assez répandu pour qu'il ne soit pas utile d'en donner ici une analyse; rappelons seulement que la méthode du grand géomètre consiste essentiellement dans l'usage des fonctions symétriques.

Il est permis de profiter de l'occasion que nous offre cette réimpression pour exprimer une fois de plus le regret que les Œuvres de Cauchy ne soient pas encore coordonnées et publiées. Il est triste de penser que la plupart de ses admirables travaux sont dispersés dans des recueils épars, dont quelques-uns sont devenus d'une extrême rareté. En attendant cette publication nécessaire, les journaux de Mathématiques font une œuvre utile et rendent un véritable service aux jeunes géomètres en reproduisant quelques-uns des travaux de Cauchy, comme l'a fait le *Bulletin* l'année dernière, et comme viennent de le faire les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Zolotareff (*G.*). — Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes. (416-422).

L'auteur s'est proposé une addition au Mémoire de Legendre *Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes*. Legendre a donné deux équations linéaires entre les projections de l'attraction exercée sur un point intérieur. M. Zolotareff démontre une troisième relation, dans laquelle figure la surface d'un autre ellipsoïde.

Zolotareff (*G.*). — Sur la série de Lagrange. (422-423).

Brassinne (*E.*). — Centre de gravité du tronc de prisme triangulaire oblique. (465-466).

Lucas (*É.*). — Sur la résolution du système des équations $x^2 - 6y^2 = u^2$, $x^2 + 6y^2 = v^2$ en nombres entiers. (466-470).

M. Lucas donne deux tableaux de formules qui fournissent la solution complète de ce problème; cela conduit également à trouver trois carrés formant une progression arithmétique dont la raison soit la surface d'un carré.

Lucas (*É.*). — Sur les rapports qui existent entre le triangle arithmétique de Pascal et les nombres de Bernoulli. (497-499).

Cette Note est consacrée à l'examen de quelques conséquences de la formule symbolique

$$x^n = S^n - (S - 1)^n,$$

S^n désignant la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des x premiers nombres entiers.

On peut consulter sur le même sujet les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 4 septembre 1876).

Liguine. — Note sur l'origine de l'idée de la Cinématique. (499-501).

S'appuyant sur un passage d'Euler, l'auteur affirme qu'on peut faire remonter au moins jusqu'à ce grand géomètre l'idée d'étudier certaines propriétés du mouvement indépendamment de ses causes; mais, quant au projet de création d'une branche de la Mécanique, fondé sur cette idée, il en revendique énergiquement la priorité en faveur de Wronski.

Lucas (*É.*). — Questions de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique. (501-503).

Gambey. — Solution de la question d'Analyse proposée au Concours d'agrégation de 1875. (503-507).

Astor. — Problème sur l'ellipse. (507-511).

Ces propriétés sont obtenues comme conséquences du théorème suivant, qui prête à de nombreux corollaires : *Lorsque quatre droites sont telles que trois quelconques d'entre elles ne concourent pas, il est permis d'admettre que leurs équations ont été préparées de manière à donner l'identité*

$$A + B + C + D = 0.$$

A, B, C, D sont, comme on le comprend, les premiers membres des équations des droites.

Parmi les propriétés énoncées par l'auteur, citons seulement celle-ci, relative aux coniques circonscrites au quadrilatère :

Le lieu des pôles d'une droite fixe est une conique passant par neuf points, savoir : les centres des trois systèmes de cordes communes, et les conjuguées harmoniques, relativement aux sommets des points d'intersection de la droite avec chacune des six cordes.

Correspondance. — (326-328, 374-376, 473-528). A. L.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

Tome LXXXIII; juillet-décembre 1876.

N° 1; 3 juillet.

Du Moncel (*Th.*). — 3ᵉ Note sur les transmissions électriques à travers le sol. (17).

Ledieu (*A.*). — Examen de nouvelles méthodes pour la recherche de la position du navire à la mer. (*Suite*). (23).

Voir *Comptes rendus*, 19 juin 1876. — *Bulletin*, t. XII, 2ᵉ Partie, p. 49.

Secchi (le P. *A.*). — Nouvelle série d'observations sur les protubérances et les taches solaires. (26).

Cornu (*A.*). — Études de Photographie astronomique. (43).


([redacted] Partie, p. 25.

N° 2; 10 juillet.

Bazin. — Expériences de mesurage de vitesses, faites à Roorkee (Inde anglaise), par M. *Allan Cunningham.* (139).

Mouton. — Sur la différence de potentiel que présentent, après la rupture du courant inducteur, les extrémités isolées d'une bobine ouverte d'induction. (142).

Fonvielle (*W. de*). — Explication de l'impressionnabilité des faces noires du radiomètre à l'aide de la théorie de l'émission, d'après *J.-B. Biot.* (148).

N° 3; 17 juillet.

Du Moncel (*Th.*). — 4e Note sur les transmissions électriques à travers le sol. (182).

Ledieu (*A.*). — Examen des nouvelles méthodes proposées pour la recherche de la position du navire en mer. (*Suite*). (188).

Lippmann (*G.*). — Sur la mesure de la résistance électrique des liquides au moyen de l'électromètre capillaire. (192).

Smith (*J.-L.*). — Sur un nouveau pendule compensateur. (202).

Henry (*Paul*). — Découverte de la planète (164) à l'Observatoire de Paris. (216).

Henry (*Paul* et *Prosper*). — Observations de la planète (164), faites à l'équatorial du jardin. (216).

Stephan (*E.*). — Observation de la planète (164) (*Paul Henry*), faites à l'Observatoire de Marseille. (216).

Renou (*E.*). — Sur une colonne verticale, vue au-dessus du Soleil. (243).

N° 4; 24 juillet.

Becquerel (*Ed.*). — Sur l'observation de la partie infra-rouge du spectre solaire, au moyen des effets de phosphorescence. (249).

Saint-Venant (*de*). — 2e Note sur la réduction des démonstrations à leur forme la plus simple et la plus directe. (256).

Hirn. — Réponse à la critique de M. *Ledieu* (*Compte rendu* du 10 juillet). (264).

Gouy. — Recherches photométriques sur les flammes colorées. (269).

Gaiffe (*A.*). — Note sur le radiomètre. (272).

Alvergniat frères. — Sur les radiomètres à lamelles formées de différentes matières. (273).

Salet (*G.*). — Sur la cause du mouvement dans le radiomètre. (274).

Marey. — Inscription photographique des indications de l'électromètre de Lippmann. (278).

N° 5; 31 juillet.

Du Moncel (*Th.*). — 5e Note sur les transmissions électriques à travers le sol. (307).

Wischnegradski. — Sur la théorie générale des régulateurs (318).

Alvergniat frères. — Des radiomètres de Crookes à lamelles formées d'un métal et de mica non noirci. (323).

Stephan (*E.*). — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (328).

N° 6; 7 août.

Ledieu (*A.*). — Réponse à la dernière Communication de M. *Hirn*. (384).

Fonvielle (*W. de*). — Sur les radiomètres d'intensité. (385).

N° 7; 14 août.

Rolland. — Sur la théorie dynamique des régulateurs. (418).

Henry (*Joseph*). — Découverte de la planète (165), par M. Peters. (440).

Gruey. — Observations des Perséides, faites à l'Observatoire de Clermont-Ferrand, les 10 et 11 août 1876. (440).

Fasci (*A.*). — Résumé des règles pratiques de la nouvelle navigation. (442).

Villarceau (*Y.*). — Observations relatives à la Communication précédente. (444).

Jeannel (*J.*). — Influence des vibrations sonores sur le radiomètre. (445).

Tatin (*V.*). — Expériences sur la reproduction mécanique du vol de l'oiseau. (457).

N° 8; 21 août.

Le Verrier. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. *G.-B. Airy*), et à l'Observatoire de Paris, pendant le second trimestre de l'année 1876. (463).

Chasles (*M.*). — Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconques, dans lesquels on considère des couples de segments rectilignes faisant une longueur constante. — Exemples de la variété de solutions différentes que fournit, dans chaque question, le principe de correspondance. (467).

Henry (*Paul*) et *Henry* (*Prosper*). — Observations de la planète (166) Peters, faites à l'équatorial du Jardin de l'Observatoire de Paris. (481).

Bruhns (*C.*). — Observations de la planète (165), faites à Leipzig. (482).

Henry (*Joseph*). — Découverte de la planète (166), par M. *Peters*. (482).

Chapelas. — Observations des étoiles filantes pendant les nuits des 9, 10 et 11 août 1876. (491).

N° 9; 28 août.

Chasles (*M.*). — Théorèmes relatifs à des couples de segments faisant une longueur constante. (495).

Du Moncel (*Th.*). — 6e Note sur les transmissions électriques à travers le sol. (501).

Leveau (*G.*). — Sur la comète périodique de d'Arrest. (50

Wolf (*R*.). — Lettre à M. Le Verrier. (510).

Relativement à une tache ronde sur le Soleil, vue par M. Weber, à l

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de la planète ([illegible]). — de quelques étoiles variables. (511).

Boë (*Ad. de*). — Étoiles voisines de la Polaire. (511).

Faye. — Remarques accompagnant la présentation de méros des *Astronomische Mittheilungen* de M. *R. Wo*

N° 10; 4 septembre.

Chasles (*M*.). — Nouveaux théorèmes relatifs aux coupl ments faisant une longueur constante. (519).

Léauté (*H*.). — Représentation des fonctions elliptiqu mière espèce à l'aide de biquadratiques gauches. (527

Saltel (*L*.). — Rectification à une Communication p sur la détermination, par le principe de corresponda tique, de l'ordre d'un lieu géométrique défini par des algébriques. (529).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de la planète ([illegible]). (5

Henry (*Joseph*). — Découverte de la planète ([illegible]), par (537).

Halphen. — Sur les caractéristiques des systèmes de (537).

Lucas (*É*.). — Théorie des nombres de Bernoulli et d'Eu

N° 11; 11 septembre.

Le Verrier. — Note sur les planètes intra-mercurielles.

Renan (*H*.). — Sur l'orbite de la planète (127). (567).

Perrotin. — Observation de l'éclipse partielle de Lune tembre 1876, faite à l'Observatoire de Toulouse. (57

Crookes (*W*.). — Note sur le radiomètre. (572).

N° 12; 18 septembre.

Le Verrier. — Examen des observations qu'on a présentées, à diverses époques, comme pouvant appartenir aux passages d'une planète intra-mercurielle devant le disque du Soleil. (583).

Chasles (*M.*). — Théorèmes relatifs à des systèmes de trois segments ayant un produit constant. (589).

Villarceau (*Y.*). — Note sur la période de l'exponentielle e^x. (594).

Fouret (*G.*). — Formule symbolique donnant le degré du lieu des points dont les distances à des courbes algébriques vérifient une relation donnée. (605).

Saltel (*L.*). — Détermination, par la méthode de correspondance analytique, du degré de la courbe ou surface enveloppe d'une courbe ou d'une surface donnée. (608).

N° 13; 25 septembre.

Le Verrier. — Examen des observations qu'on a présentées, à diverses époques, comme appartenant aux passages d'une planète intra-mercurielle. Discussion et conclusions. (621).

Favé (le général). — Conséquences vraisemblables de la Théorie mécanique de la chaleur. (625).

Spottiswoode (*W.*). — Sur le contact d'une courbe avec un faisceau de courbes doublement infini. (627).

Fouret (*G.*). — Du nombre des branches de courbes d'un système (μ, ν), qui coupent une courbe algébrique donnée, sous un angle donné, ou dont les bissectrices aient une direction donnée. (633).

N° 14; 2 octobre.

Chasles (*M.*). — Rectification d'une erreur qui entache des théorèmes sur les systèmes de deux ou trois segments faisant un produit constant. (641).

Le Verrier. — Les planètes intra-mercurielles. (647).

Janssen (*J.*). — Note sur les passages des corp
intra-mercuriels sur le Soleil. (650).

Mouchot (*A.*). — Application industrielle de la
(655).

Henry (*J.*). — Découverte de la planète ([illegible]). (65

Henry (*Pr.*). — Découverte de la planète ([illegible]). (65

Bossert (*J.*). — Éléments et éphéméride de la
(660).

N° 15; 9 octobre.

Halphen. — Sur les ordres et les classes de certai
triques. (705).

N° 16; 16 octobre.

Le Verrier. — Les planètes intra-mercurielles. (7

Simon (*Ch.*). — Sur le rapport des deux chaleurs
gaz. (726).

Laroche. — Note sur la vitesse de propagation des

N° 17; 23 octobre.

Chasles (*M.*). — Théorèmes relatifs à des systèm
ments formant une longueur constante. (757).

Abbadie (*A. d'*). — Rapport sur les travaux de M
nier, lieutenant de vaisseau. (772).

Siemens (*C.-W.*). — De la détermination de la
mer au moyen du bathomètre et sans emploi de l
(780).

Halphen. — Sur une proposition générale de la
ques. (791).

Fouret (*G.*). — Intégration géométrique de l'équ
vées partielles

$$L(px + qy - z) - Mp - Nq + R =$$

ans laquelle L, M, N et R désignent des fonctions linéaires de , *y*, *z*. (794).

quet de la Grye. — Sur les effets des tourbillons observés dans s cours d'eau. (797).

rcadier (E.). — Sur les lois du mouvement vibratoire des diaasons. (800).

N° 18; 30 octobre.

d. — Lettre à M. *Le Verrier* sur une observation faite par tark le 9 octobre 1819, et représentée par la formule donnée ar M. *Le Verrier* pour la nouvelle planète intra-mercurielle. 809).

et (J.-L.) et *Sarasin (Ed.).* — Sur la polarisation rotatoire du uartz. (818).

rcadier (E.). — Sur les lois du mouvement vibratoire des diaasons. (822).

N° 19; 6 novembre.

unier (Stan.). — Observation d'un bolide dans la soirée du novembre 1876. (862).

N° 20; 13 novembre.

asles (M.). — Théorèmes relatifs à des systèmes de trois segnents faisant une longueur constante. (867).

serand (F.). — Suite des observations des satellites de Jupiter, aites à l'Observatoire de Toulouse. (875).

ton de la Goupillière. — Recherche de la brachistochrone d'un orps pesant, eu égard aux résistances passives. (884).

lphen. — Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et le surfaces du second ordre. (886).

let d'Aoust. — Observations relatives à la théorie générale des rombes. (890).

ye. — Remarques au sujet de la Communication précédente. 892).

Saltel (*L.*). — Détermination, par la méthode de analytique, de l'ordre de la surface enveloppe d' l'équation renferme *n* paramètres liés entre eu $n-2$ relations. (894).

Gaugain (*J.-M.*). — Influence de la températur tion. (896).

N° 21; 20 novembre.

Le Verrier. — Observations méridiennes des p faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises Royal, M. *G.-B. Airy*), et à l'Observatoire de P 3e trimestre de l'année 1876. (923).

Le Verrier. — Tables de la planète Uranus, fond paraison de la théorie avec les observations. (92

Secchi (le P.). — Sur les quantités de pluie tomb dant cinquante années, de 1825 à 1874. (940).

Secchi (le P.). — Organisation d'un nouvel Observ Cavo; observations météorologiques dans les en (941).

André (*Ch.*). — Lettre au sujet du phénomène de adressée à M. le Président de la Commission Vénus. (946).

Graeff. — Sur une série d'expériences relatives à l eaux, faites au réservoir du Furens (948).

Salet (*G.*). — Sur le mouvement gazeux dans (968).

Fonvielle (*W. de*). — Expériences sur le radio (970).

Bouquet de la Grye. — Note sur les figures qui des liquides superposés, quand on leur imprime de rotation. (998).

Faye. — Remarques au sujet de la Communicati (1000).

Gruey. — Observations des étoiles filantes penda 12, 13, 14 novembre 1876, à Clermont-Ferrand.

N° 22; 27 novembre.

Secchi (le P.). — Sur divers travaux d'Hydraulique, exécutés par les anciens aux environs de Rome (1008).

Secchi (le P.). — Sur une chute de grêle remarquable, observée à Grotta-Ferrata. (1009).

Reitlinger (*Edm.*) et *d'Urbanitzky* (*Alf.*). — Note sur une nouvelle répulsion électrique et son application à la théorie des comètes. (1014).

Van der Willigen (*V.-S.-M.*). — De la force portative des aimants en fer à cheval. (1017).

Astier. — Sur une question de Balistique. (1033).

Jordan (*C.*). — Sur la détermination des groupes formés d'un nombre fini de substitutions linéaires. (1035).

Darboux (*G.*). — Sur l'application des méthodes de la Physique mathématique à l'étude des corps terminés par des cyclides. (1037).

Mannheim (*A.*). — Construction, pour un point de la courbe d'intersection de deux surfaces, du centre de la sphère osculatrice de cette courbe. (1040).

Picart (*A.*). — Explication des actions à distance; gravitation, actions électriques. (1042).

N° 23; 4 décembre.

Faye. — Sur une Note du P. *Secchi,* relativement à la formation de la grêle. (1067).

Matthey (*G.*). — Règle en platine iridié de l'Association Géodésique internationale. (1090).

Sainte-Claire Deville (*H.*), *Tresca, Dumas.* — Observations relatives à la Communication précédente. (1091).

Schmidt (*J.*). — Observations d'une étoile nouvelle, dans la constellation du Cygne. (1097).



Le Verrier. — Remarques relatives à l'étoile découverte par M. *Schmidt*. (1098).

Henry (*Paul* et *Pr.*). — Observations de la planète (⑯) Zélia, découverte à l'Observatoire de Paris le 28 septembre 1876. (1099).

Darboux (*G.*). — Sur l'application des méthodes de la Physique mathématique à l'étude des corps terminés par des cyclides. (1099).

Aymonnet. — Nouvelle méthode pour étudier les spectres calorifiques. (1102).

N° 24; 11 décembre.

Chasles (*M.*). — Théorèmes relatifs à des couples de segments faisant une longueur constante, pris l'un sur une tangente d'une courbe, et l'autre sur une normale d'une autre courbe, les deux étant d'ordre et de classe quelconques. (1123).

Boussinesq (*J.*). — Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans menés par un même point d'un corps. (1168).

Allégret. — Note sur l'intégration de l'équation

$$(x\,dy - y\,dx)(a + bx + cy) - dy(a' + b'x + c'y) + dx(a'' + b''x + c''y) = 0.$$

(1171).

Cornu (*A.*). — Sur le spectre de l'étoile nouvelle de la constellation du Cygne. (1172).

Redier (*A.*). — Note sur la correction des variations de marche des pendules astronomiques, provenant des différences de pression atmosphérique. (1174).

Crookes (*W.*). — Note sur la théorie du radiomètre. (1175).

N° 25; 18 décembre.

Bertrand (*J.*). — Note sur l'intégration des équations différentielles totales. (1191).

Chasles (*M.*). — Théorèmes concernant les couples de segments

pris l'un sur une tangente d'une courbe et l'autre sur une oblique d'une autre courbe, et faisant ensemble une longueur constante, les courbes étant d'ordre et de classe quelconques. (1195).

Tisserand (*F.*). — Sur les déplacements séculaires du plan de l'orbite du huitième satellite de Saturne (Japhet). (1201).

Appell. — Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre. (1209).

Cailletet (*L.*). — Manomètre destiné à mesurer les hautes pressions. (1211).

Belléguic. — Sur la carène de moindre résistance. (1216).

Schmidt (*J.*). — Calcul de trois observations de la nouvelle étoile du Cygne. (1228).

Huggins (*W.*). — Note préliminaire sur les photographies des spectres stellaires. (1229).

Van de Sande Bakhuyzen. — Observations relatives à l'explication du phénomène de la goutte noire, au moment du contact extérieur de Vénus et du Soleil. (1230).

Crookes (*W.*). — Deuxième Note sur la théorie du radiomètre. (1232).

Bourbouze. — Sur une disposition qui permet de reproduire, à l'aide de la sirène, l'expérience de Foucault (arrêt du disque tournant sous l'action d'un électro-aimant). (1235).

N° 26; 27 décembre.

Tisserand (*F.*). — Sur les déplacements séculaires de l'orbite du huitième satellite de Saturne (Japhet). (1266).

Secchi (le P.). — Recherches sur la vitesse du vent, faites à l'Observatoire du Collége Romain. (1270).

Perrier (*F.*). — Nouvelle mesure de la méridienne de France. (1277).

Darboux (*G.*). — Étude sur la réduction d'un système de forces, de grandeurs et de directions constantes, agissant en des points déterminés d'[redacted] quand ce corps change d'orientation dans l'[redacted]

Lucas (*Éd.*). — Nouveaux théorèmes d'Arithmétique supérieure. (1286).

Proth (*F.*). — Énoncés de divers théorèmes sur les nombres. (1288).

Crookes (*W.*). — Troisième Note sur la théorie du radiomètre. (1289).

Guerout (*Aug.*). — Recherches sur le coefficient d'écoulement capillaire. (1291).

Chapelas. — Sur un maximum d'étoiles filantes déjà signalé, pendant le mois de décembre.

Tome LXXXIV; janvier-juin 1877.

N° 1; 3 janvier.

Secchi (le P.). — Observations relatives à une réclamation présentée récemment par M. *Faye*, au sujet des tourbillons qui se produisent dans l'atmosphère. (18).

Faye. — Réponse aux observations précédentes. (19).

Marie (*Max.*). — Les périodes cycliques ou logarithmiques de la quadratrice d'une courbe algébrique du degré m sont les produits par $2\pi\sqrt{-1}$ des racines d'une équation algébrique de degré m, qu'on peut toujours obtenir et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ceux de l'équation de la courbe proposée. (27).

Bertin et *Garbe.* — Sur la cause du mouvement dans le radiomètre. (30).

Villari (*E.*). — De l'écoulement du mercure par des tubes capillaires. (33).

Montenat. — Sur une expérience analogue à celle des flammes chantantes. (33).

N° 2; 8 janvier.

Chasles (*M.*). — Théorèmes relatifs à des séries de triangles de même périmètre, satisfaisant à quatre autres conditions. (55).

Phillips. — Rapport sur un Mémoire de M. *Haton de la Goupillière*, intitulé : « Recherches de la brachistochrone d'un corps pesant, eu égard aux résistances passives ». (72).

Cailletet (*L.*). — Sur la construction des manomètres à air libre, destinés à mesurer les hautes pressions. (82).

N° 3; 15 janvier.

Secchi (le P.). — Étude spectroscopique de la nouvelle étoile signalée par M. Schmidt. (107).

Angot (*A.*). — Sur l'application de la Photographie à l'observation du passage de Vénus. (109).

Trépied (*Ch.*). — Sur la détermination simultanée des constantes de l'aberration et de la parallaxe annuelles. (118).

Marie (*Max.*). — Sur les relations qui existent nécessairement entre les périodes de la quadratrice de la courbe algébrique la plus générale de degré *m*, et, à plus forte raison, d'une courbe particulière dans son degré. (120).

Fonvielle (*W. de*). — Les phénomènes du radiomètre expliqués à l'aide de la pyro-électricité. (122).

N° 4; 22 janvier.

Becquerel. — Mémoire sur les actions électrocapillaires, dans lequel on traite : 1° de la dépolarisation des électrodes, ainsi que des effets électriques produits au contact de la peau et de divers liquides; 2° des rapports entre les forces électromotrices, les quantités de chaleur dégagées pendant leur production et les pouvoirs diffusifs. (145).

Tisserand (*F.*). — Observations des éclipses des satellites de Jupiter, faites à l'Observatoire de Toulouse. (165).

Borchardt (*C.-W.*). — Sur la moyenne arithmético-géométrique entre quatre éléments. (180).

Laguerre. — Sur les normales que l'on peut mener d'un point donné à une conique. (181).

Mignon et *Rouart*. — Note relative à un appareil manométrique, à propos d'une Communication récente de M. *Cailletet*. (183).

N° 5 ; 29 janvier.

Resal (*H.*). — Note sur la stabilité des voûtes. (203).

Fizeau. — Rapport sur un Mémoire de M. *Henri Becquerel*, intitulé : « Recherches expérimentales sur la polarisation rotatoire magnétique ». (211).

Laguerre. — Sur la développée de l'ellipse. (224).

Marie (*Max.*). — Sur les deux théorèmes de Clebsch, relatifs aux courbes quarrables par les fonctions elliptiques ou par les fonctions circulaires. (227).

Picard. — Sur les surfaces réglées dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire. (229).

Gouy. — Recherches sur les spectres des métaux à la base des flammes. (231).

N° 6 ; 5 février

Sylvester (*J.*). — Sur les invariants fondamentaux de la forme binaire du huitième degré. (240).

N° 7 ; 12 février.

Le Verrier. — Découvertes de trois petites planètes (170), (171) et (172) et d'une comète, faites à Toulouse et à Marseille. (283).

Desains (*P.*). — Recherches sur les spectres calorifiques. (285).

Secchi (le P.). — Sur un nouveau catalogue d'étoiles colorées et sur le spectre de l'étoile de Schmidt. (290).

Angot (*A.*). — Sur l'application de la Photographie à l'observation du passage de Vénus. (294).

Sarrau (*E.*). — Formules pratiques des vitesses et des pressions dans les armes. (297).

Darboux (*G.*). — Sur une classe de systèmes orthogonaux, comprenant comme cas particulier les systèmes isothermes. (298).

N° 8; 19 février.

Le Verrier. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal, M. *G.-B. Airy*), et à l'Observatoire de Paris, pendant le 4ᵉ trimestre de l'année 1876. (315).

Boileau (*P.*). — Propriétés communes aux canaux, aux tuyaux de conduites et aux rivières à régime uniforme. (326).

Romilly (*F. de*). — Sur le jet d'air dans l'eau. (330).

Gasparis (*A. de*). — Sur le problème de Kepler. (333).

Borrelly. — Observations de la comète découverte par lui. (336).

Darboux (*G.*). — Sur les systèmes orthogonaux comprenant une famille de surfaces du second degré. (336).

Martin (*Ad.*). — Mémoire sur les méthodes employées pour la détermination des courbures des objectifs astronomiques, accompagné de Tables propres à en abréger le calcul. (336).

Govi (*G.*). — Sur un moyen de faire varier la mise au foyer d'un microscope, sans toucher ni à l'instrument, ni aux objets, et sans altérer la direction de la ligne de visée. (341).

Fayel. — Nouveau procédé de photomicrographie. (343).

Neyreneuf. — Sur le microscope et la chambre noire. (344).

Boussinesq (*J.*). — Sur la conciliation de la liberté morale avec le déterminisme scientifique. (362).

N° 9; 26 février.

Le Verrier. — Sur le passage possible d'une petite planète sur le disque du Soleil, le 22 mars 1877. (367).

Le Verrier. — Présentation du tome XIII de la partie des *Mémoires* des *Annales de l'Observatoire de Paris.* (368).

Romilly (*F. de*). — Sur les effets du jet d'air dans l'eau et sur la suspension de l'eau dans l'air. (373).

Darboux (*G.*). — Détermination des lignes de courbure d'une

classe de surfaces, et en particulier des surfaces tétraéd[...]
Lamé. (382).

Aoust (l'abbé). — Intégrales des courbes dont les dévelop[...]
par le plan et les développées par le plan sont égales ent[...]
(385).

Crookes (*W.*). — Quatrième Note sur la théorie du radi[...]
(388).

N° 10; 5 mars.

Saint-Venant (*de*). — Accord des lois de la Mécanique [...]
liberté de l'homme dans son action avec la matière. (41[...]

Secchi (le P.). — Observations des protubérances solaires p[...]
le second trimestre de 1876; rotations LXIX à LXXV. ([...]

Secchi (le P.). — Observations du spectre de la comète Br[...]
(427).

Rouché (*E.*). — Sur les lignes asymptotiques d'une surf[...]
quatrième degré. (434).

Fouret (*G.*). — Démonstration, par le principe de correspo[...]
d'un théorème sur le contact des surfaces d'un implexe av[...]
surface algébrique. (436).

Lucas (*Éd.*). — Sur l'extension du théorème de Fermat g[...]
lisé, et du *Canon arithmeticus*. (439).

Levy (*Maurice*). — Sur la Théorie mécanique de la c[...]
(442).

Soucaze. — Observation d'un parhélie, le 5 février 1877. [...]

Abbadie (*A. d'*). — Présentation d'une brochure du P. B[...]
intitulée : « Riassunto delle osservazioni microsismiche ».[...]

N° 11; 12 mars.

Chasles (*M.*). — Théorèmes relatifs à des séries de triang[...]
périmètres, qui ont un côté de grandeur constante et s[...]
à trois autres conditions diverses. (471).

Kéricuff (*de*). — Sur l'aberration annuelle et la parallaxe a[...]
des étoiles. (489).

Levy (*Maurice*). — Application d'un théorème comprenant les deux principes de la Théorie mécanique de la chaleur. (491).

Wolf (*R.*). — Sur la périodicité des taches solaires. (494).

Crova (*A.*). — Mesure de l'intensité calorifique des radiations solaires reçues à la surface du sol. (495).

N° 12; 19 mars.

Sylvester (*J.*). — Sur les invariants fondamentaux de la forme binaire du huitième degré. (532).

Appell. — Propositions d'Algèbre et de Géométrie déduites de la considération des racines cubiques de l'unité. (540).

Serret (*P.*). — Sur la courbure des surfaces. (543).

Ventéjols. — Sur un problème comprenant la théorie de l'élimination. (546).

Plateau (*F.*). — De la suspension de l'eau dans un vase fermé inférieurement par un tissu à larges mailles. (549).

Olivier (*J.*). — Sur un fait singulier de production de chaleur. (550).

N° 13; 26 mars.

Tisserand (*F.*). — Observations des satellites de Saturne, faites à l'Observatoire de Toulouse en 1876, avec le grand télescope Foucault. (589).

Hirn (*G.-A.*). — Sur un théorème relatif à la détente des vapeurs sans travail externe. (592).

Levy (*Maurice*). — Sur la théorie des plaques élastiques planes. (596).

Terquem (*A.*). — Sur la théorie des machines frigorifiques. (602).

Croullebois. — Sur la réflexion de la lumière polarisée. (604).

N° 14; 2 avril.

Chasles (*M.*). — Triangles isopérimètres ayant un côté de longueur constante et satisfaisant à trois autres conditions. (627).

N° 15; 9 avril.

N° 16; 15 avril.

Stephan (*E.*). — Observation d'une nouvelle comète à Marseille. (759).

Darboux (*G.*). — Recherche de la loi que doit suivre une force centrale pour que la trajectoire qu'elle détermine soit toujours une conique. (760).

Pépin (le P.). — Sur les lois de réciprocité dans la théorie des résidus de puissances. (762).

Niewenglowski (*B.*). — Sur les rayons de courbure des podaires successives d'une courbe plane. (765).

Bourgois. — Du roulis en eau calme. (768).

N° 17; 23 avril.

Prix des Sciences mathématiques, proposés pour 1877, 1878, 1879, 1880 et 1883.

Grand prix des Sciences mathématiques (1877). — Application de la théorie des transcendantes elliptiques ou abéliennes à l'étude des courbes algébriques.

Grand prix des Sciences mathématiques (1878). — Étude de l'élasticité des corps cristallisés, au double point de vue expérimental et théorique.

Grand prix des Sciences mathématiques (1878). — On sait que le grand axe de l'orbite qu'une planète décrit autour du Soleil n'est affecté d'aucune inégalité séculaire de l'ordre des deux premières puissances des masses perturbatrices. Examiner s'il existe dans la valeur de ce grand axe des inégalités séculaires de l'ordre du cube des masses et, dans le cas où ces inégalités ne se détruiraient pas rigoureusement, donner le moyen d'en calculer la somme au moins approximativement.

Prix Poncelet. — Décerné à l'auteur de l'ouvrage le plus utile aux progrès des Sciences mathématiques pures et appliquées.

Prix Montyon. — Mécanique.

Prix Plumey. — Décerné à l'auteur du perfectionnement le plus important relatif à la construction ou à la théorie de plusieurs mac[illegible] m[illegible]rices ou autres.

[illegible] génieurs des Ponts et Chaussées

propre au service de la traction sur

Prix Bordin (1878). — Question dé

Prix Lalande. — Astronomie.

Prix Damoiseau (1877). — Question

Prix Vaillant (1877). — Étude des
théorie mathématique de leurs pert
raison de cette théorie avec l'observ

Prix Valz (1877). — Décerné à l'aut
rapportant à la région du plan invar

N° 18; 30 a

Favé. — Conséquences vraisemblable
de la chaleur. Explication de l'état s

Wolf (*C.*). — Observations des com
(Swift-Borrelly). (929).

Denza (le P. *F.*). — Sur quelques ob
(931).

Mannheim (*A.*). — Sur les surfaces
principaux sont fonctions l'un de l'a

Darboux (*G.*). — Recherche de la lo
centrale pour que la trajectoire qu'
une conique. (936).

Halphen. — Sur les lois de Kepler. S

N° 19; 7 mai.

Chasles (*M.*). — Deux lois générales des courbes géométriques. (971).

Hermite (*Ch.*). — Études de M. *Sylvester* sur la théorie algébrique des formes. (974).

Resal (*H.*). — Note à propos des Communications de M. le général *Favé* sur la Théorie de la chaleur. (975).

Mouchez. — Sur la détermination de la différence de longitude entre Paris et Berlin. (977).

Villarceau (*Y.*). — Rapport sur les travaux géodésiques et topographiques exécutés en Algérie par M. *Roudaire.* (1002).

Rouyaux. — Formes réduites pratiques du développement de Taylor. (1014).

André (*D.*). — Intégration des équations différentielles linéaires à coefficients quelconques, avec ou sans second membre. (1018).

Ventosa (*V.*). — Taches solaires observées à Madrid en avril 1877. (1020).

Gazan. — Observations sur la Communication faite à l'Académie, le 16 avril 1877, par M. *Janssen,* et relative à la formation subite d'une tache très-importante dans le Soleil. (1021).

Macé (*J.*). — Recherches sur la double réfraction accidentelle. (1024).

Rolland (*L.*). — Étude sur la résistance intérieure des éléments thermo-électriques. (1026).

N° 20; 14 mai.

Chasles (*M.*). — Triangles isopérimètres ayant un côté de grandeur constante et un sommet en un point fixe (1051).

Janssen (*J.*). — Réponse à une Note de M. *Gazan,* présentée dans la séance précédente. (1055).

Desains (*P.*). — De l'action rotatoire du quartz sur le plan de polarisation des rayons calorifiques obscurs. (1056).

Villarceau (*Y.*). — Présentation des feuilles tirées de son Ouvrage sur la « Nouvelle Navigation », fait en collaboration avec M. *de Magnac*. (1065).

Pujet (*A.*). — Exposition nouvelle et généralisation de la méthode de Gauss pour calculer approximativement une intégrale définie. (1071).

Brault. — Nouvelles cartes météorologiques de l'Atlantique sud donnant à la fois la direction et l'intensité des vents. (1073).

Tacchini (*P.*). — Sur les taches solaires. (1079).

Crookes (*W.*). — Note sur l'othéoscope (nouvelle disposition du radiomètre). (1081).

Guignet (*E.*). — Transformation directe du travail mécanique en électricité. (1084).

N° 21; 21 mai.

Le Verrier. — Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Paris pendant le 1er trimestre de l'année 1877. (1107).

Sylvester (*J.*). — Sur une méthode algébrique pour obtenir l'ensemble des invariants et des covariants fondamentaux d'une forme binaire et d'une combinaison quelconque de formes binaires. (1113).

Rozé (C.). — Sur une transmission de mouvement. (1148).

Crookes (*W.*). — Sur quelques nouveaux modèles de radiomètres. (1156).

N° 22; 28 mai.

Janssen (*J.*). — Réponse à la Note de M. *Tacchini* (séance du 14 mai). (1182).

Mouchez. — Observations relatives à l'Ouvrage présenté par M. *Y. Villarceau* sous le titre de : « Nouvelle navigation ». (1207).

Sylvester (*J*). — Sur une méthode algébrique pour obtenir des invariants et des covariants fondamentaux d'une forme binaire et d'une combinaison quelconque de formes binaires. (1211).

Caligny (*A. de*). — Description des manœuvres nouvelles exécutées sur l'appareil d'épargne construit à l'écluse de l'Aubois. (1213).

Bjerknes (*C.-A*). — Aperçu historique sur la théorie du mouvement d'un ou de plusieurs corps, de formes constantes ou variables, dans un fluide incompressible ; sur les forces apparentes qui en résultent, et sur les expériences qui s'y rattachent. (1222).

Callandreau (*O.*). — Sur la formule de quadrature de Gauss. (1225).

N° 23; 4 juin.

Villarceau (*Y.*). — Réponse préliminaire aux observations présentées par M. *Mouchez*, au sujet de l'Ouvrage concernant la « Nouvelle Navigation », dont les 35 premières feuilles ont été déposées sur le Bureau, dans la séance du 14 mai. (1251).

Sylvester (*J.*) — Sur le vrai nombre des covariants élémentaires d'un système de deux formes quadratiques binaires. (1285).

Secchi (le P.). — Sur le spectre de la comète de Winnecke. (1289).

Bjerknes (*C.-A.*). — Remarques historiques sur la théorie du mouvement d'un ou de plusieurs corps, de formes constantes ou variables, dans un fluide incompressible ; sur les forces apparentes qui en résultent et sur les expériences qui s'y rattachent. (1309).

Perrier (*F.*). — Étude comparative des observations de jour et de nuit, faites par MM. *F. Perrier* et *L. Bassot*. (1312).

N° 24; 11 juin.

Mouchez. — Deuxième Note relative à la « Nouvelle Navigation » de M. *Y. Villarceau*. (1352).

Sylvester (*J.*). — Théorie pour trouver le nombre des covariants et des contrevariants d'ordre et de degré donnés, linéairement indépendants, d'un système quelconque de formes simultanées contenant un nombre quelconque de variables. (1359).

Mannheim (*A.*). — Sur le déplacement infiniment petit d'un dièdre de grandeur invariable. (1373).

Bjerknes (*G.-A.*). — Aperçu historique sur la théorie du mouvement d'un ou de plusieurs corps, de formes constantes ou variables, dans un fluide incompressible ; sur les forces apparentes qui en résultent et sur les expériences qui s'y rattachent. (1375).

Appell. — Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires. (1378).

Perrier (*F.*). — Étude comparative des observations de jour et de nuit. (1380).

Bertot (*H.*). — Sur la détermination du zénith du navire, ou point observé à la mer, au moyen des droites de hauteur ; insuffisance du zénith, ou lieu du navire dit *le plus probable* ; détermination d'un point plus rapproché du zénith vrai. (1383).

Gramme. — Recherche sur l'emploi des machines magnéto-électriques à courants continus. (1386).

N° 25 ; 18 juin.

Villarceau (*Y.*). — Réponse aux observations de M. *Mouchez*. (1421).

Mouchez. — Sur l'ouvrage de M. *Y. Villarceau* portant pour titre : « Nouvelle Navigation ». (1425).

Sylvester (*J.*). — Théorie pour trouver le nombre des covariants et de contrevariants d'ordre et de degré donnés, linéairement indépendants, d'un système quelconque de formes simultanées, contenant un nombre quelconque de variables. (1427).

Secchi (le P.). — Sur l'état actuel de l'atmosphère solaire. (1430).

Du Moncel (*Th.*). — Sur les électro-aimants à rondelles de fer. (1434).

Bjerknes (*C.-A*). — Aperçu historique sur la théorie du mouvement d'un ou de plusieurs corps, de formes constantes ou variables, dans un fluide incompressible ; sur les forces apparentes qui en résultent et sur les expériences qui s'y rattachent. (1446).

an (*C.*). — Détermination des groupes formés d'un nombre i de substitutions linéaires. (1446).

hini (*P.*). — Sur les éruptions métalliques solaires observées Palerme depuis 1871 jusqu'en avril 1877. (1448).

N° 26; 25 juin.

rceau (*Y.*). — Réponse aux observations de M. *Mouchez* ite). (1475).

nes (*C.-A.*). — Remarques historiques sur la théorie du uvement d'un ou de plusieurs corps, de formes constantes ou iables, dans un fluide incompressible; sur les forces appa- ites qui en résultent et sur les expériences qui s'y rattachent. 493).

ch (*R.*). — Nouvelle méthode pour l'élimination des fonctions itraires. (1496).

hini (*P.*). — Sur une tache solaire observée pendant le mois juin 1877. (1500).

NAL DES ACTUAIRES FRANÇAIS [1].

court article a été déjà consacré, dans le *Bulletin*, à cette utile publication. Arithmétique sociale et les questions de statistique qui s'y rapportent sont des ts d'étude qui offrent de très-sérieuses difficultés, à en juger par les efforts que géomètres ont dû tenter pour en résoudre les points délicats. Leur véritable ée ne paraît pas avoir été saisie en France autant qu'elle le méritait. Il n'en est de même en Angleterre, où les questions actuaires ont pris naissance et sont rande faveur.

s travaux des Actuaires anglais ont puissamment contribué au progrès de l'étude questions relatives aux assurances sur la vie et autres applications des Mathé- ques aux finances. Le *Journal des Actuaires francais*, organe du Cercle des Ac- es, a pour but de répandre le goût de ces intéressantes recherches, et il ite, à ce titre, de prendre place parmi les recueils mathématiques les plus utiles. s croyons devoir le signaler à l'attention des personnes qui étudient les ques- s suivantes : Arithmétique sociale; Statistique, base de l'institution des rentes ères et des assurances; principes, théorie et applications du Calcul des proba- és; établissement des Tables de mortalité; fonctionnement et direction des Com- ies d'assurances, mécanisme des emprunts, des amortissements et des grandes ations financières; application de l'Analyse aux questions de Statistique, etc.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. III, p. 169, l'annonce de cette publication périodique.

Tome I; 1872.

Simon (*Ch.*). — **Exposition élémentaire des principes du Calcul des probabilités sur lesquels repose la détermination du prix des opérations viagères.** (11-22).

Dans les deux premiers articles que renferme le tome Ier, l'auteur établit la nécessité de ramener à des règles simples les principes du Calcul des probabilités, en écartant, pour le moment, toutes les discussions philosophiques qui divisent encore les meilleurs esprits, et qui d'ailleurs exigent, pour être bien comprises, une longue étude préliminaire.

Cet intéressant exposé débute par quelques définitions essentielles, très-clairement exprimées. Ces définitions se rapportent aux sujets suivants : Du hasard. De la probabilité. Règle des paris. Règle des partis. Objet et division du Calcul des probabilités.

Le second article traite des probabilités *a priori*. L'auteur donne divers exemples tirés du jeu de l'ancienne loterie de France, ou des jeux de cartes et de dés. L'analyse du jeu de *franc-carreau*, généralisation d'un problème résolu par Laplace, a fourni à M. E. Barbier le sujet d'une application très-curieuse du Calcul des probabilités.

Une courbe fermée, de périmètre L, étant projetée sur un plancher divisé en bandes parallèles, d'une largeur commune a, la probabilité pour que la courbe rencontre une des lignes du plancher est $\frac{L}{\pi a}$.

L'auteur définit ensuite les principes des probabilités composées et de la probabilité totale, dont il résume l'historique en l'accompagnant d'exemples simples.

Charlon (*H.*). — Des emprunts publics. (23-51 et 147-189).

Le tome I renferme également les deux premiers articles de cet utile travail destiné à donner aux financiers le moyen de résoudre avec exactitude les nombreux problèmes que soulèvent aujourd'hui les transactions relatives aux emprunts publics.

Les principales divisions de cet exposé sont les suivantes : Intérêt simple et composé. Rentes perpétuelles et limitées. Emprunts remboursables par des rentes. Applications numériques.

Emprunts par obligations. Définitions diverses. Tableaux d'amortissement. Applications numériques.

Achard (*M.-A.*). — Calcul approché des annuités viagères. (52-71).

M. Woolhouse a publié en 1869, dans le *Journal de la Société des Actuaires* de Londres, un travail remarquable sur les annuités viagères et les assurances sur la vie. La voie par laquelle il est parvenu à ses élégantes formules est simple et uniforme. M. Woolhouse lui donne le nom de *méthode continue*. L'objet du présent article est d'en indiquer brièvement la nature, avant de passer à des applications qui pourront seules en faire saisir complétement l'esprit.

Charlon (*H.*). — Notes sur les parités des valeurs. (72-73 et 190-195).

Maas (*E.*). — Des Tables de mortalité construites en Angleterre d'après les expériences des Compagnies d'assurances sur la vie. (74-88).

Maas (*E.*). — Du calcul des tarifs et des réserves des Compagnies d'assurances sur la vie en Angleterre et en France (97-119).

Dormoy (*E.*). — Théorie mathématique des jeux de hasard. (120-146 et 232-257).

Après avoir établi la définition mathématique du hasard, l'auteur étudie en détail les conditions diverses du jeu de baccarat, ce qui lui donne le sujet de deux longs articles résumés dans des règles pratiques ou des tableaux.

Achard (*M.-A.*). — Calcul des assurances de survie. (258-266).

Exposé et discussion des formules qui résument les travaux de MM. Woolhouse, W. Sutton et Makeham, sur les assurances de survie, à propos d'une formule inexacte donnée par M. Reboul.

Marchand (*J.*). — Recherche sur la méthode à adopter pour la discussion des éléments de la Statistique. (267-273 et 393-409).

Achard (*M.-A*). — Nouvelle méthode pour calculer le prix des obligations émises par les Compagnies de chemins de fer. (278-286).

Laurent (*H.*). — Considérations sur le théorème de Bernoulli. (287-307).

Le célèbre théorème énoncé par Bernoulli dans son *Ars conjectandi*, ouvrage posthume (1713), revient à dire que, dans un nombre d'épreuves répétées indéfiniment, les événements dont les probabilités restent constantes se reproduisent des nombres de fois proportionnels à leurs probabilités respectives.

L'énoncé de Bernoulli, plus précis, a reçu, ainsi que sa démonstration, diverses modifications de forme de la part de plusieurs géomètres profonds, Laplace, Poisson, Cauchy, Binet, MM. J. Serret, Liouville, Bienaymé et Mayet.

L'auteur du présent article reprend cette théorie délicate et fondamentale, en évitant l'emploi des séries divergentes, auxquelles Laplace et Poisson avaient eu recours.

Anonyme. — Application du Calcul des probabilités à la vérification des répartitions (308-312).

Catalan (*E.*). — Nouvelle formule d'intérêt composé. (439-441).

La relation $A = a(1+r)^n$, conséquence nécessaire de l'intérêt proportionnel au temps, conduit à des résultats presque absurdes. Cela tient à ce que l'on fait des applications de cette formule à des durées qui dépassent trop notablement celles de la vie humaine ou même des familles ou associations ordinaires.

Il est donc rationnel de remplacer cette formule par une autre qui satisfasse aux conditions suivantes :

1° Que, pour de petites valeurs de n, l'intérêt soit à peu près proportionnel à n;

2° Que, n augmentant indéfiniment, A tende vers une limite assez restreinte, inférieure, par exemple, à $10a$.

L'auteur propose alors une formule assez simple, qu'il a réduite en Tables pour en faciliter les applications pratiques.

Laurent (*H.*). — **Sur la méthode à suivre dans la construction des Tables de la mortalité.** (442-448).

Le but que se propose l'auteur de cet article est de montrer comment les Compagnies d'assurances pourraient procéder pour se procurer de bonnes Tables de mortalité à l'aide des documents qu'elles ont accumulés depuis leur fondation.

Tome II; 1873.

Dormoy (*E.*). — Théorie mathématique des jeux de hasard. (*Suite*). (38-57).

Application des principes des probabilités aux jeux suivants : baccarat tournant, baccarat avec banque, lansquenet, roulette et jeux de Bourse.

Marchand (*J.*). — Recherche sur la méthode à adopter pour la discussion des éléments de la Statistique. (58-78 et 251-263).

Ces deux articles sont consacrés au développement des considérations théoriques qui servent de base à ce travail.

Laurent (*H.*). — Détermination des pleins qu'un assureur peut garder sur les risques qu'il garantit. (79-90 et 161-165).

Les personnes qui s'adressent aux Compagnies d'assurances désirent surtout y rencontrer la sécurité, et il résulte immédiatement de cette considération que la spéculation ne peut avoir aucune part dans la gestion de leurs affaires; ce que l'on appelle le *hasard* a ses lois auxquelles les Compagnies doivent obéir, sous peine de se compromettre et d'entraîner dans leur ruine le public qui s'adresse à elles.

L'auteur se propose, dans ce Mémoire, d'étudier les règles auxquelles doivent se soumettre les Compagnies pour fonctionner dans de bonnes conditions.

Charlon (*H.*). — Des emprunts publics (*Suite*). (129-140 et 341-350).

Dans ces deux articles, l'auteur étudie les rentes dont les termes varient en progression géométrique et en progression arithmétique, ainsi que les emprunts correspondants, remboursables par des rentes dont les termes forment une progression géométrique ou une progression arithmétique.

Pochet (*L.*). — Le jeu de l'horloge. (147-152).

Le Calcul des probabilités, appliqué au *jeu de l'horloge*, démontre que, lorsque

le nombre des cartes dépasse cinq ou six, la probabilité de gagner est de $1 - \frac{1}{e}$ ou 0,625. Ce jeu favorise donc le banquier.

Pochet (*L.*). — Géométrie des jeux de bourse. (153-160).

Achard (*M.-A.*). — Calcul des assurances mixtes. (200-210).

Lefèvre (*H.*). — Physiologie et mécanique sociales. (211-250 et 351-388).

Description plus spéciale des jeux de bourse, appuyée d'indications graphiques.

Lecocq (Dr *H.*). — Des annuités variables en fonctions du temps. (269-289 et 389-407).

L'auteur de ce travail s'est proposé d'étudier de près, sur des données renfermées dans une circulaire de la Société générale Algérienne, les conditions mathématiques de fonctionnement de cette Société. A ce sujet, il indique et établit avec détails les diverses formules classiques relatives aux annuités, aux rentes viagères et autres annuités variant suivant une loi algébrique entière. Des applications numériques servent de vérification à plusieurs d'entre elles.

Dormoy (*E.*). — Théorie mathématique des paris de courses. (301-340).

Cohen (*J.*). — Considérations sur les annuités viagères variables. (408-418).

Tome III; 1874.

De Kertanguy (*E.*). — Table de la mortalité parmi les assurés en cas de décès, déduite de l'expérience de la Compagnie d'assurances générales sur la vie. (5-24 et 259-272).

Dormoy (*E.*). — Théorie mathématique des paris de courses. (*Suite* et *fin* de l'article précédent). (25-82).

Charlon (*H.*). — Des emprunts publics. (*Fin*). (83-92).

Lefèvre (*H.*). — Physiologie et mécanique sociales. (*Fin*). (93-118).

Dormoy (*E.*). — Curiosités mathématiques. (169-176).

Nouvel exemple de l'absurdité des conséquences extrêmes de la formule de l'intérêt composé.

L'auteur établit et vérifie aisément qu'un centime, placé à intérêts composés, depuis Adam jusqu'à notre époque, soit pendant 6000 ans, représenterait aujourd'hui, en or pur, une valeur véritablement fantastique : prendre un cylindre droit

ayant pour base l'orbite terrestre, et pour hauteur le chemin parcouru par la lumière en 6000 ans; puis donner à chacun des habitants présents et passés de la Terre, depuis 6000 ans, autant de ces cylindres qu'il y a de gouttes d'eau dans la mer!

« Les résultats qui précèdent sont purement théoriques; car tout le monde comprendra que le placement d'un capital à intérêts composés n'a pas par lui-même la vertu de donner naissance aux capitaux prodigieux auxquels conduit le calcul mathématique. Au point de vue économique, on peut se demander ce qui serait arrivé si, depuis une époque très-reculée, une Société, qui ne se serait jamais liquidée, avait continué à placer à intérêts composés une somme quelconque, augmentée de ses intérêts annuels. »

C'est ce que l'auteur examine, et, après une courte discussion de l'impossibilité absolue de cette épreuve, il en conclut que « cette accumulation, par la capitalisation des intérêts, de toutes les richesses de la terre, entre les mains d'une Société unique, n'aurait pas changé sensiblement la face du monde. Les mêmes industries y prospéreraient de la même manière; le taux d'intérêt perçu par la Société centrale y serait descendu bientôt jusqu'à zéro. Son droit de propriété serait devenu nominal, et ne lui aurait bientôt rien rapporté, de même qu'il n'aurait rien coûté aux véritables travailleurs, restés seuls maîtres des produits légitimes de leurs industries. »

Achard (*M.-A.*). — Recherche du taux de l'intérêt dans le calcul des annuités certaines. (188-204).

La recherche du taux de l'intérêt, quand on connaît la valeur actuelle d'une annuité de 1 franc, ainsi que le nombre de ses termes, est une des questions qui se posent le plus fréquemment dans le calcul des *parités*. Baily en a donné une solution approximative, mais dont l'exactitude décroît rapidement lorsque le nombre des termes de l'annuité augmente. L'auteur de ce travail s'est proposé d'éviter ces divers inconvénients.

Lecocq (Dr *H.*). — Des annuités variables en fonction du temps. (*Fin*). (219-234).

Dormoy (*E.*). — Théorie mathématique des assurances sur la vie. (283-299 et 432-461)

Ce travail débute par le rappel des principes du Calcul des probabilités; puis un second article est consacré à l'exposé détaillé de la théorie des *écarts* (écart probable, coefficient de divergence). Il se termine par une série de données et d'applications spéciales.

Marchand (*J.*). — Recherche sur la méthode à adopter pour la discussion des éléments de la Statistique (*Suite*). (307-325).

Kosteweg (*A.-J.*). — Réflexions, calculs et solutions particulières à propos d'un problème du Calcul de probabilité sur les votes. (326-346).

Ce problème est le suivant :

Un nombre ks de votants, dont a se prononcent pour OUI, b pour NON $(a+b=k$

est divisé en k sections égales; quelle est la probabilité qu'il y aura dans n sections une majorité pour OUI, dans m pour NON $(m + n = k)$?

L'auteur en donne une solution algébrique générale, puis des solutions numériques dans le cas où ks n'est pas très-grand, ou lorsque s est très-grand. Solution particulière pour deux bureaux. Solution numérique pour deux sections.

Tome IV; 1875.

Curie (*P.*). — Des assurances sur la vie dans la classe ouvrière. (5-15).

Kertanguy (*E. de*). — Tables de mortalité parmi les assurés en cas de décès, déduite de l'expérience de la Compagnie d'assurances sur la vie. (*Fin*). (16-35).

Maas (*E.*). — Des Tables d'annuités viagères et d'assurances d'après l'expérience anglaise. (36-61).

Dormoy (*E.*). — Curiosités mathématiques : Treize à table. (62-65).

Achard (*A.*). — Nouveau procédé pour déterminer le taux dans le calcul des annuités certaines différées. (66-69).

Achard (*A*). — Influence des taxes qui frappent les obligations sur leur prix d'après un taux d'intérêt déterminé. (70-74).

Fontaneau (*E.*). — Principes de chrématistique. (75-83 et 151-172).

Laurent (*H.*). — Démonstration simple du principe de M. Ménier. (84-87).

Curie (*P.*). — De l'assurance en cas de décès sur des têtes de malades. (97-106).

Dormoy (*E.*). — Théorie mathématique des assurances sur la vie. (107-150, 242-266 et 290-380).

2e *Partie :* Tables de mortalité. — *Chap. IV.* Considérations générales. — *Chap. V.* — Tables de mortalité sur des têtes choisies. — *Chap. VI.* Tables de mortalité dressées sur des groupes de populations. — *Chap. VII.* Courbes et équations de mortalité. — *Chap. VIII.* Assimilation des obligations amortissables à un groupe de population. — *Chap. IX.* Calcul des primes.

Charlon (*H.*). — Définition de l'emprunt de la ville de Paris en 1875. (173-174).

Fontaneau (*E.*). — De la valeur. (175-199 et 267-277).

Maas (*E.*). — De l'actuaire et de l'avantage des études mathématiques pour l'aspirant actuaire. (211-230).

Jaÿ (*Aimé*). — L'emprunt par bons accumulatifs. (231-241).

Tome V; 1876.

Jaÿ (*Aimé*). — Du change et des arbitrages (5-28).

§ I. De la lettre de change. — § II. Du change. — § III. Des causes qui influent sur les variations du change. — § IV. Des cotes. — § V. Des arbitrages. — § VI. Arbitrages des fonds publics. — § VII. Arbitrages des matières d'or et d'argent. — § VIII. De la façon dont s'effectuent en pratique les arbitrages et des usages de place.

Dormoy (*E.*). — Théorie mathématique des assurances sur la vie. (*Suite*). (29-69, 267-240 et 387-473).

Chap. IX (*suite*). Calcul des primes. — *Chap. X.* Réserves.

Fontaneau (*E.*). — Chrématistique. (70-96 et 341-365).

Développements et applications.

Cohen (*Jules*). — Des rentes de survie payables par fractions d'année. (97-112).

Jaÿ (*Aimé*). — Étude sur l'organisation et le fonctionnement des Compagnies d'assurances contre l'incendie dans les États-Unis de l'Amérique du Nord. (117-228).

Kertanguy (*E. de*). — La Table de mortalité de Deparcieux et les tarifs de rentes viagères de la caisse de la vieillesse. (229-266).

Laurent (*H.*). — Note sur la facilité des erreurs d'observation. (474-479).

H. B.

ANNALES DES MINES, ou Recueil de Mémoires sur l'exploitation des mines et sur les Sciences et les arts qui s'y rattachent, rédigées par les Ingénieurs des Mines, et publiées par autorisation du Ministre des Travaux publics. — Paris, Dunod.

Les *Annales des Mines* forment un Recueil bimensuel fondé sur les mêmes principes que les *Annales des Ponts et Chaussées,* analysées déjà dans le *Bulletin* (¹). Ainsi elles renferment des Mémoires sur l'exploitation des mines et sur les sciences, les arts et la législatiou qui s'y rapportent. La rédaction de ce journal est confiée au corps des ingénieurs des Mines, et la publication est faite sous la direction du Ministre des Travaux publics.

Chaque année se compose de six livraisons formant deux volumes distincts pour la partie scientifique et technique, et un troisième volume pour la partie administrative (lois, décrèts, arrêtés, circulaires, état du personnel, etc.).

Chaque volume relatif à la partie technique renferme un *Bulletin* consacré aux questions d'industrie minière tant en France qu'à l'étranger. Les divers numéros des *Annales des Mines* sont accompagnés, le plus souvent, de cartes et de planches tirées hors texte.

La publication des *Annales des Mines* a commencé en 1816. Elle était alors la continuation du *Journal des Mines,* fondé en 1795. A partir de 1832, elle a été suivie régulièrement sous la forme que nous venons d'indiquer.

Les volumes parus de 1816 à 1831 sont au nombre de vingt-deux, et forment les deux premières séries. Les volumes parus de 1832 à 1871 constituent quatre autres séries.

Aujourd'hui, la septième série est en cours de publication. Les recherches de Mathématiques pures et appliquées y tiennent, comme dans les précédentes, une assez large place, et, à ce titre, les *Annales des Mines* nous ont paru mériter une mention spéciale dans le *Bulletin.*

Les cinquième et sixième séries renferment des Notices de M. Phillips sur la théorie du spiral réglant, sur le réglage et le fonctionnement des chronomètres, sur la résistance des matériaux, sur la théorie de la coulisse de Stephenson, etc., et de M. Resal, sur de nombreuses questions de Mécanique théorique et expérimentale, sur la théorie des machines à vapeur et de leurs divers organes, sur la théorie de l'élasticité, etc.

Notre attention se portera plus particulièrement sur les volumes de la dernière série, commencée en 1872.

Pour donner à cette analyse ainsi délimitée toute la précision possible, nous avons tenu à extraire des différents Mémoires examinés les passages qui permettent d'en indiquer nettement le sujet et d'en résumer les points principaux.

Tome I; 1872, 1er semestre.

Worms de Romilly. — Sur divers systèmes de régulateurs à force centrifuge. (36-64; 1 pl.).

Un régulateur à force centifuge, du modèle généralement adopté, est toujours

(¹) Voir *Bulletin*, t. XI, p. 259.

calculé pour marcher avec une vitesse ω_1, lorsque l'inclinaison des bras sur l'axe est φ_1; ω et φ dépendent l'un de l'autre d'après la relation $\omega = F(\varphi)$. Si, pour les valeurs considérées de φ et ω, l'expression $\frac{d\omega}{d\varphi}$ est nulle, la tangente au point $\omega_1\varphi_1$ sera horizontale; si $\frac{d^2\omega}{d\varphi^2}$ est aussi nulle, la courbe présentera, en outre, un point d'inflexion. A mesure qu'un plus grand nombre de dérivées seront nulles pour les valeurs de ω_1, φ_1, le régulateur se rapprochera de la solution rigoureuse pour laquelle la vitesse d'équilibre serait indépendante de l'inclinaison des bras; la durée de ses révolutions sera de plus en plus constante pour toutes ses positions; en un mot, le régulateur tendra à devenir *isochrone*.

Dans les régulateurs les plus employés, on ne cherche à satisfaire qu'à la relation $\frac{d\omega}{d\varphi} = 0$; quand la dérivée seconde est aussi nulle, le régulateur présente, au point de vue pratique, tous les avantages d'une solution rigoureuse, et il est inutile de chercher une plus grande exactitude.

L'auteur discute les conditions auxquelles s'obtient l'isochronisme dans les régulateurs proposés par MM. Foucault, de Bange et Roland. Il étudie ensuite la sensibilité des régulateurs, et en applique les conclusions au régulateur Porter, très-employé aux États-Unis.

Le Mémoire se termine par la discussion détaillée du régulateur complet, ou à hélice, de M. Foucault.

Resal (*H.*). — Sur les effets mécaniques du marteau-pilon à ressort, dit *américain*. (72-90; 1 pl.).

La pièce élastique qui relie la tête de ce marteau à la bielle motrice est un ressort demi-circulaire à plusieurs lames étagées à l'intérieur et dont le diamètre est horizontal.

L'auteur établit et discute les équations du mouvement du marteau entre deux chocs consécutifs, puis les effets du choc, avec application numérique.

Enfin, en suivant la méthode de M. Phillips, l'auteur indique les conditions de l'équilibre d'élasticité d'un ressort circulaire à lames intérieures étagées, et applique aux formules trouvées les données numériques de la machine considérée.

Resal (*H.*) — Mémoire sur les volants des machines à vapeur à détente et à condensation. (249-270; 1 pl.).

L'auteur établit la théorie des volants des machines à vapeur, en faisant abstraction, suivant la remarque de Poncelet, des résistances passives, en considérant la contre-pression comme nulle et en admettant la loi de Mariotte pour la détente de la vapeur.

La détermination du volant est ensuite soumise à deux séries d'approximations; puis l'auteur étudie les conditions de résistance de ces organes et les effets que leurs bras éprouvent lorsque la vitesse angulaire varie durant le fonctionnement de la machine.

Tome II; 1872, 2e semestre.

Resal (H.). — Du mouvement vibratoire d'une lame circulaire à section constante. (226-232; 1 pl.).

Le Mémoire précédent renfermait une application d'une équation différentielle linéaire, indiquée dès 1859 par l'auteur, à propos des tensions élastiques développées par le serrage des bandages des roues du matériel des chemins de fer. Dans le présent Mémoire, l'auteur se propose de faire usage de l'équation dont il s'agit pour arriver aux équations aux différentielles partielles du mouvement vibratoire d'une lame circulaire élastique d'une section uniforme. Il vérifie et démontre sur les équations obtenues qu'une vibration longitudinale ne peut se produire sans donner lieu à des vibrations transversales, et *vice versa*.

Dormoy (E.). — Relation qui existe entre les inclinaisons des diverses branches d'une même couche de houille. (233-254; 1 pl.).

Applications numériques des formules de la Trigonométrie sphérique.

Resal (H.). — Théorie du régulateur Larivière. (259-265; 1 pl.).

L'organe essentiel de ce régulateur est une pompe à air à double effet, mise en mouvement par l'arbre de la machine. Aux extrémités du corps de pompe se trouvent deux clapets d'aspiration et de refoulement dans l'atmosphère.

La théorie complète de cet appareil conduirait à des calculs très-compliqués. On les simplifie notablement en admettant certaines hypothèses que les faits justifient assez bien.

Gruner (L.). — Notice sur les appareils à air chaud. (305-331, 3 pl.).

Résumé des moyens divers à l'aide desquels les températures élevées (500 à 800 degrés C.) ont pu être réalisées pour échauffer l'air dirigé dans les hauts-fourneaux par les machines soufflantes.

Tome III; 1873, 1er semestre.

Ce volume ne renferme pas de Mémoire sur des sujets mathématiques.

Tome IV; 1873, 2e semestre.

Peslin. — Sur la ténacité de l'acier. (345-358, 1 pl.).

Deux méthodes sont employées pour déterminer les éléments qui caractérisent l'élasticité des métaux : ce sont la traction directe et la flexion transversale. Les chiffres obtenus par les deux méthodes ont été généralement assez concordants; toutefois des divergences notables ont été reconnues depuis longtemps pour certains métaux, par exemple pour la fonte. L'auteur se propose d'appeler l'attention sur les anomalies de même nature que présente l'acier.

Tome V; 1875, 1er semestre.

Resal (*H.*). — **Du profil rationnel des segments de p[illegible] machines à vapeur.** (38-50, 1 pl.).

Étude théorique des formes des segments ou bagues [illegible] piston du modèle dit *suédois*, généralement adopté.

Forme d'égale résistance. Application numérique. [illegible]

L'auteur arrive à cette conclusion que, pour qu'un [illegible] exerce sur le cylindre, par unité de surface, une pression [illegible] sphère.

Roger (*E.*). — **Mémoire sur les coordonnées curvilignes [illegible] (110-168).**

« Ce sont précisément les systèmes de coordonnées », dit M. Lamé, [illegible] sent les phases ou les étapes de la Science. Sans l'invention [illegible] l'Algèbre serait peut-être encore au point où Diophante [illegible] laissée, et nous n'aurions ni le Calcul infinitésimal, ni la [illegible] l'introduction des coordonnées sphériques, la Mécanique [illegible] impossible. Sans les coordonnées elliptiques, d'illustres [illegible] soudre plusieurs questions importantes de cette théorie, qui [illegible] et le règne de ce troisième genre de coordonnées spéciales [illegible] Mais, quand il aura transformé ou complété toutes les [illegible] leste, il faudra s'occuper sérieusement de la Physique mathématique [illegible] nique terrestre. Alors viendra nécessairement le règne des [illegible] quelconques, qui pourront seules aborder les nouvelles questions [illegible] ralité ».

Le Mémoire de M. E. Roger est une sorte de monographie des [illegible] lignes, avec application de ces coordonnées à diverses questions [illegible] Physique mathématique. Nous allons en donner un résumé, avec les [illegible] plus importantes.

Systèmes *unicursifs*, caractérisés par la liaison bien définie [illegible] valeurs réelles des variables x, y, z et un système unique de valeurs [illegible] nouvelles variables λ, μ, ν.

La condition d'*unicursivité* est qu'un certain déterminant D [illegible]

Définition des parallélépipèdes élémentaires. Éléments linéaires; leur [illegible] mutuelle. Condition d'orthogonalité. Élément de volume

$$dU = \left[\frac{dx}{d\lambda}\left(\frac{dy}{d\mu}\frac{dz}{d\nu} - \frac{dz}{d\mu}\frac{dy}{d\nu}\right) + \frac{dy}{d\lambda}\left(\frac{dz}{d\mu}\frac{dx}{d\nu} - \frac{dx}{d\mu}\frac{dz}{d\nu}\right) + \frac{dz}{d\lambda}\left(\frac{dx}{d\mu}\frac{dy}{d\nu} - \frac{dy}{d\mu}\frac{dx}{d\nu} \ldots\right.\right.$$

ou, plus simplement,

$$dU = D\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Coordonnées planisphériques. Formules de transformation.

Élément de volume en coordonnées planisphériques :

$$dU = \lambda \frac{dz}{d\nu}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Démonstration géométrique de cette formule.

Élément superficiel $d\sigma$ en coordonnées planisphériques :

$$d\sigma = \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 - 2\frac{z}{\lambda}\frac{dz}{d\lambda} + \frac{\left(\frac{dz}{d\mu}\right)^2}{\lambda^2 - z^2}} \cdot d\lambda\, d\mu.$$

Les éléments superficiels des surfaces de révolution et de la sphère s'obtiennent respectivement en faisant, dans cette formule, $\frac{dz}{d\mu} = 0$ et la quantité sous le radical égale à l'unité. Dans ce dernier cas, on a

$$d\sigma = \lambda\, d\lambda\, d\mu.$$

Cette formule, ne dépendant pas du diamètre, convient aussi à l'élément superficiel du plan.

Élément superficiel de la sphère en coordonnées planisphériques obliques.

Élément superficiel du cylindre en coordonnées planisphériques :

$$d\sigma = \frac{ax\lambda\, d\lambda\, d\mu}{y(a-z)\sin\mu\cos\mu + (a\cos\theta - y\sin\theta)\cos^2\mu},$$

a étant le rayon du cylindre, θ l'angle de l'axe Mz du système avec la normale à l'origine.

Équation d'une surface de n coordonnées planisphériques.

Élément superficiel d'une surface quelconque en coordonnées planisphériques.

Élément superficiel en coordonnées curvipolaires. La formule à laquelle parvient l'auteur donne immédiatement la démonstration du théorème suivant, énoncé par Gauss : *Si une surface continue et inextensible vient à être déformée d'une manière arbitraire, le produit des rayons de courbure principaux en un point quelconque demeure invariable.*

Définition des surfaces d'égale attraction. Lignes d'égale attraction ; sur le plan ; sur la sphère ; sur le cylindre.

Attraction d'une portion de surface sur un élément de cette surface. Cas général. Cas de la sphère. Cas du cylindre.

Action réciproque de deux portions d'une surface cylindrique séparées par un plan normal à l'axe ou par un plan parallèle à l'axe. Attraction réciproque de deux parties d'une surface sphérique. Attraction réciproque de deux surfaces de révolution.

Action exercée sur un point matériel par les éléments de volume situés de part et d'autre d'un plan passant par ce point.

Action exercée par un point d'une surface par les éléments de volume situés de part et d'autre de cette surface.

Action exercée par une sphère sur un point placé à sa surface :

$$R = \pi \int_0^D \Psi(\lambda)\lambda^2 d\lambda - \frac{\pi}{D^2}\int_0^D \varphi(\lambda)\lambda^4 d\lambda,$$

$\Psi(\lambda)$ étant la loi de l'attraction, D le diamètre de la sphère.

L'auteur étudie ensuite l'action exercée sur une file de molécules normale à un plan par les molécules voisines :

$$R = 2\pi \int_0^{\lambda_0} \varphi(\lambda)\lambda^2 d\lambda,$$

$\varphi(\lambda)$ étant une modification de la fonction qui exprime la loi d'attraction.

Action exercée sur une file de molécules normale à une surface par les molécules voisines :

$$R = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) \int_0^{\lambda_1} \varphi(\lambda)\lambda^3 d\lambda,$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)$ étant la courbure moyenne. La méthode d'analyse qui a conduit Laplace à la découverte de cette formule (¹) est sujette à des objections graves, qui ont été exposées, à des points de vue différents, par Gauss (²) et Poisson (³). L'emploi de coordonnées curvilignes permet d'éviter ces objections, ainsi que de très-longues complications analytiques.

Worms de Romilly. — Sur les procédés d'extraction des minerais dans les mines. (169-216, 1 pl.).

L'auteur étudie les conditions théoriques d'installation et de fonctionnement des câbles d'extraction des bennes dans les différents cas suivants : câbles à section constante, à section variable d'une manière continue, à section variable d'une manière discontinue.

Influence du rayon des bobines. Conditions de bonne marche des machines d'extraction, dans le cas de câbles à section constante, de section variable et d'épaisseur constante, de section variable et d'épaisseur variable d'une manière continue.

On a encore employé d'autres moyens pour élever les charges de minerais, ou bien on refoule de l'air comprimé sous la cage, renfermée dans un tube où elle agit comme piston, ou bien on raréfie l'air au-dessus de la cage placée dans les mêmes conditions. Ce dernier procédé constitue le système atmosphérique. L'auteur les étudie tous deux en détail.

Ledoux (Ch.). — Descriptions raisonnées de quelques chemins de fer à voie étroite. (328-480, 6 pl.).

Dans un premier Article, l'auteur décrit les conditions d'établissement et d'exploitation du chemin de fer d'Ergastiria, province de l'Attique (Grèce). Il les compare à celles d'autres chemins de fer à voie étroite, en particulier à celles de Moktà-el-Hadid, près de Bône.

La seconde Partie est consacrée à la description du chemin de fer de Moktà-el-Hadid. Enfin, dans une troisième Partie, on trouve la description des chemins de fer de Saint-Léon (Sardaigne), de Rochebelle et de Cessons et Trébian (Gard).

Levy (Maurice). — Sur la stabilité des cloches de gazomètres sous l'action du vent. (481-492, 1 pl.).

Étude théorique d'une question importante à résoudre et réputée difficile à réaliser.

(¹) *Mécanique céleste*, t. IV : *Théorie de l'action capillaire*.
(²) *Mémoires de Göttingue*, t. VII, 1830.
(³) *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, 1831.

Tome VI, 1874, 2e semestre.

Achard (*A.*). — De la transformation et de la distribution des forces motrices, à grandes distances, au moyen de câbles métalliques. (131-175, 1 pl.).

Beaucoup de câbles métalliques sont employés aujourd'hui aux transmissions générales de force. C'est sur leur usage que reposent de véritables distributions de force motrice qui ont été établies dans ces dernières années.

L'auteur indique et développe la théorie de la transmission funiculaire dans les cas où les deux axes sont situés sur le même niveau ou à des niveaux différents.

Achard (*A.*). — De la transmission et de la distribution des forces motrices, à grande distance, au moyen de l'air comprimé ou de l'eau sous pression. (301-344; 1 pl.).

Applications des théories et des formules de la Thermodynamique et de l'Hydraulique au fonctionnement des machines fondées sur l'emploi de l'air comprimé comme mode de transmission de la force motrice. Dans ces machines, la compression de l'air à température aussi constante que possible est nécessaire pour remplir deux buts essentiels : la disponibilité du travail emmagasiné dans l'air et le bon fonctionnement de l'appareil. Pour l'opérer, il faut faire intervenir l'action de l'eau, afin que celle-ci absorbe une quantité de chaleur équivalente au travail de la compression.

La discussion de toutes ces conditions théoriques conduit à une étude intéressante, dont l'utilité est clairement démontrée par les belles applications qui ont été faites de ces machines au percement du Mont-Cenis et du Saint-Gothard.

Tome VII, 1875, 1er semestre.

Roger (*E.*). — Mémoire sur les coordonnées curvilignes. *IIe Partie.* (92-145).

Ainsi que l'auteur l'annonçait dans un premier Mémoire (t. V), les formules relatives aux coordonnées curvilignes devaient être appliquées à l'étude des phénomènes capillaires et permettre la démonstration des lois de ces phénomènes sous une forme plus simple. Les coordonnées curvilignes se prètent parfaitement à l'étude de cette partie de la Physique mathématique, et le Mémoire dont il s'agit en offre une intéressante application.

L'auteur rappelle d'abord l'énoncé des lois de Newton relatives à l'adhésion des plaques et à l'élévation de l'eau dans les tubes de petit diamètre. Il démontre ces lois comme conséquence des formules établies précédemment. La première approximation étant représentée par la relation $h\mathrm{D} = \mathrm{K}$, il résulte des expériences faites par Simon (de Metz), sur des tubes capillaires de très-petit diamètre, que la loi de Newton est assez exactement représentée par la relation $h\mathrm{D} = \mathrm{K} + \frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{D}^2}$. Avant de passer à la discussion de cette formule, l'auteur démontre que, si l'angle à la paroi

lorsque le diamètre D devient égal au rayon d'attractio

Laplace a proposé de représenter la loi des attractio nentielle telle que $c^{-Q\lambda}$, avec $L.c = 1$, et Q étant un tr ne peut être acceptée que lorsqu'on considère le prod invariable. Il en est de même de la loi $\frac{c^{-Q\lambda}}{\lambda^2}$.

Soit maintenant

$$\Pi(\lambda) = \frac{i}{\lambda^2} + \varphi(\lambda),$$

on peut remplacer $\frac{i}{\lambda^2}$ par $ic^{-Q\lambda}\lambda^{-p}$ sans troubler l'accord d'observation. La fonction complémentaire $\varphi(\lambda)$ peut ê à $c^{-Q\lambda}$ ou à $\frac{c^{-Q\lambda}}{\lambda^2}$.

Il serait facile d'imaginer une infinité d'autres lois d vraisemblables *a priori;* une discussion plus étendue s térêt.

Étude des conditions de stabilité de l'équilibre. Équ nisque, donnée d'abord par Thomas Young, puis par La

$$h = H\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right).$$

Restrictions essentielles que comporte cette équation. de cette relation :

$$V = \pi DH \cos\theta, \quad V = 2H \cos\theta,$$

θ étant l'angle que la ligne de plus grande pente fait au ticale.

Lames parallèles verticales; expériences de Wertheim a superposée à du mercure.

Intégration de l'équation différentielle du ménisque, verticale :

$$dx = -\sqrt{\frac{H}{2}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - \sin\theta}} d\theta.$$

Lames verticales juxtaposées, formant entre elles un angle dièdre très-aigu à arête verticale. Le niveau du liquide s'élève suivant une hyperbole équilatère.

Tubes coniques. Théorie de Laplace; objections qu'elle soulève.

En désignant par V l'inclinaison de l'axe du cône, 2α la longueur de la goutte, a la distance de son centre au sommet du cône, ϖ l'angle de la génératrice et de l'axe du cône, on a, d'après l'auteur, pour l'équation d'équilibre,

$$\sin V = \frac{2 H \cos \lambda}{(a^2 - \alpha^2) \sin \varpi},$$

θ étant l'angle, supposé partout identique, que chaque ménisque fait avec la paroi.

Lames inclinées, formant entre elles un angle dièdre très-aigu, à arête horizontale. On a

$$\sin V = \frac{H \cos \theta}{a^2 \tang \varpi}.$$

Les applications des coordonnées curvilignes se bornent à ces exemples. L'auteur recherche ensuite la cause probable des attractions capillaires. A cet effet, il établit d'abord théoriquement la loi d'après laquelle l'intensité des impulsions transmises, à partir d'un centre, à travers un milieu résistant ou absorbant, doit varier avec la distance à ce centre. On trouve ainsi

$$i = \frac{i_0}{\lambda^2}, \quad \text{ou} \quad i = \frac{i_0 c^{-Q\lambda}}{\lambda^2},$$

selon que le milieu traversé n'oppose pas de résistance, ou bien résiste à l'émission des fluides. Si le centre d'émission est à l'infini, on a

$$i' = i c^{-Q l}.$$

Dans ces formules, λ est le rayon de la sphère d'activité, i' l'intensité à la distance $\lambda + l$.

Coexistence possible de forces attractives et répulsives.

Origine des forces capillaires. Dans un liquide, il ne se produit de changement d'état que sur la surface libre. Les forces capillaires sembleraient donc devoir être attribuées à la vaporisation. Ce qui les distingue de la gravitation, c'est que la sphère d'activité est infiniment petite dans un cas, indéfiniment étendue dans l'autre. L'attraction capillaire n'intéresse que les surfaces en présence; la gravitation, au contraire, dépend des masses.

L'auteur termine cette savante étude par quelques réflexions sur le principe cartésien de l'inertie, que nous croyons devoir résumer dans leurs conclusions les plus importantes. Si l'on considère, avec Lamé, les forces spéciales de cohésion, d'affinité, de calorique, etc., comme des hypothèses de coordination, le changement de figure ou le changement d'état, est la loi universelle des corps, les atomes étant seuls indestructibles.

« C'est à Descartes que l'on doit d'avoir mis en évidence les différences essentielles qui séparent l'esprit, seul principe spontanément actif et conscient, de la matière inconsciente et inerte. Cette distinction, trop négligée peut-être aujourd'hui, est le fondement même du spiritualisme; dès lors, toutes les questions où le principe de l'inertie est en jeu prennent, au point de vue philosophique, une importance extrême, et l'on comprend les efforts tentés par Descartes, Euler et d'autres encore, pour expliquer, en les rattachant à des causes pu[illegible] [illegible]énomènes naturels dont l'Astronomie d'une part, la P[illegible] [illegible]t dé-

montré les lois, et pour éliminer de la Mécanique céleste ou terrestre une multitude de forces mystérieuses qui, en faisant revivre les *qualités occultes* invoquées autrefois, dissimulent les lacunes de la Science et en retardent les progrès » (¹).

Achard (*A.*). — De la transmission et de la distribution des forces motrices, à grandes distances, au moyen de l'air comprimé ou de l'eau sous pression. (146-168).

Cette deuxième Partie du Mémoire commencé dans le tome VI est plus spécialement relative à l'emploi de l'eau sous pression, dont on a fait une belle application au service des docks de Marseille. Influence et calcul des pertes de charge et de force vive.

Mallard (*E.*). — De la vitesse avec laquelle se propage l'inflammation dans un mélange d'air et de grisou, et de la théorie des lampes de sûreté. (355-381; 1 pl.).

Soient t la température d'inflammation, T la température de combustion, V la vitesse d'inflammation, p et S le périmètre et la section du tube supposé rempli du mélange gazeux, γ, c et α des coefficients dépendant du pouvoir refroidissant du tube, de la facilité de propagation de la chaleur dans le mélange gazeux et de la nature de celui-ci, l'auteur arrive à la formule

$$V = \alpha\sqrt{\frac{c}{\gamma}}\sqrt{\frac{p}{s}}\,\frac{T-t}{t-\theta},$$

θ étant la température initiale.

Cette formule explique aisément ce fait particulier, constaté par M. Bunsen, qu'un mélange, inexplosible à l'air libre, peut s'enflammer en vase clos.

Description des expériences faites à l'Ecole des Mineurs de Saint-Etienne, sur la vitesse d'inflammation de mélanges d'air et de grisou. Résultats expérimentaux.

Remarques sur quelques-uns des phénomènes présentés par les coups de grisou. Circonstances de l'inflammation et de l'explosion.

Théorie des lampes de sûreté, fondée sur les expériences précédentes. Il résulte de cette théorie, ainsi que de divers essais, qu'il suffit que la flamme du grisou soit projetée sur une toile métallique avec une vitesse de 2 à 3 mètres par seconde pour qu'il y ait à redouter que la flamme traverse la toile métallique.

Comparaison des lampes Davy et Mueseler.

Tome VIII; 1875, 2ᵉ semestre.

Peslin (*H.*). — Sur les principes de la théorie mathématique de l'élasticité. (130-153; 1 pl.).

Étude de diverses simplifications que l'on peut apporter aux quatre premières Leçons de Lamé sur la théorie mathématique de l'élasticité.

(¹) Voir, pour une autre application des coordonnées curvilignes à la théorie de l'élasticité, le *Bulletin*, t. VI, p. 214 et suiv.

Étude des forces qui déforment une sphère suivant un ellipsoïde et un cube suivant un parallélépipède. Formules générales de Lamé.

L'incertitude règne toujours sur la relation entre les deux coefficients d'élasticité λ et μ d'un solide homogène et d'élasticité constante.

Navier, Poisson et Cauchy sont arrivés au résultat $\lambda = \mu$. Les physiciens qui ont soumis la question au contrôle de l'expérience ont trouvé, soit $\lambda = \mu$ (Cagniard-Latour, Kirchhoff, Cornu), soit $\lambda = 2\mu$ (Wertheim); mais ils n'ont guère expérimenté que sur des corps durs, tels que le verre et l'acier. Dans certains corps, comme le caoutchouc, μ peut varier dans de très-fortes proportions, tandis que λ n'éprouve pas de variation sensible.

L'auteur reprend ensuite les réflexions par lesquelles Lamé termine ses Leçons sur l'élasticité, et les complète par l'énoncé de diverses remarques faites par M. H. Sainte-Claire Deville, et qui semblent devoir ramener les questions de résistance élastique des solides à des questions de texture.

Achard (*A.*) — Description de quelques transmissions par câbles métalliques. (229-258; 9 pl.).

Application des formules des précédents articles à l'installation des câbles d'Oberusel (près de Francfort-sur-le-Mein), de Schaffouse, de Fribourg et de Bellegarde.

Tome IX; 1876, 1er semestre.

Resal (*H.*). — Notice sur la machine à détente variable de M. Sulzer. (221-231; 2 pl.).

Le constructeur s'est appliqué à réunir dans cette machine tous les dispositifs de détail les plus perfectionnés. Les conditions de fonctionnement de la détente sont mises en équation dans la présente Notice. Leur discussion n'offre d'ailleurs pas de difficulté.

H. B.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé par J. LIOUVILLE et continué par H. RESAL. — 3e Série (1).

Tome II; 1876.

Adams (*J.-C.*). — Explication des irrégularités observées dans le mouvement d'Uranus, fondée sur l'hypothèse des perturbations causées par une planète plus éloignée; comprenant une détermination de la masse, de l'orbite et de la position du corps perturbant. (5-32 et 69-86).

Extrait de l'Appendice du *Nautical Almanac* pour l'année 1851.

---

(1) Voir *Bulletin*, I, 91; II, 33; III, 88, 379; VI, 125; VIII, 17; IX, 121; XI, 155.

Mathieu (*É.*). — Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre. (33-68).

Ce Mémoire est consacré à l'étude du mouvement de l'axe de rotation de la Terre par rapport à la Terre elle-même, ou, si l'on veut, à l'étude du déplacement de ses pôles à sa surface.

Les formules de perturbation du mouvement de rotation d'un corps solide, qui n'est sollicité que par des forces perturbatrices, sont les mêmes que les formules de perturbation du mouvement d'une planète. M. Mathieu a expliqué cette coïncidence et l'a ramenée à un théorème général dans un précédent Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 1875, p. 183). Il suit de là que les deux principaux problèmes que l'on rencontre dans la Mécanique céleste, savoir la recherche du mouvement de translation des planètes et de leurs satellites, et celle de leur mouvement de rotation autour de leurs centres de gravité, peuvent être étudiés au moyen des mêmes formules. C'est une propriété qui n'avait pas échappé à Poisson, mais dont il n'a pas tiré tout le parti qu'il pouvait : elle est le point de départ du travail de M. Mathieu.

L'auteur est ainsi conduit à une nouvelle démonstration de l'invariabilité du jour sidéral, démonstration entièrement différente de celle de Poisson et qui, de plus, est exempte de l'hypothèse peu admissible de ce dernier, consistant à regarder les orbites du Soleil et de la Lune, qui troublent le mouvement de rotation de la Terre, comme circulaires et situées dans un même plan.

Halphen. — **Sur une série de courbes analogues aux développées. (87-144).**

Soient S une courbe plane algébrique et une conique C; soit S′ le lieu du point d'intersection de la polaire d'un point de S par rapport à C et de la tangente à S en ce même point : on déduira de S′, par la même transformation, une nouvelle courbe S″, puis de celle-ci une courbe S‴,...; une courbe quelconque $S^{(i)}$ de cette série correspondra point par point à la courbe S : or il arrivera toujours qu'en s'avançant suffisamment dans cette suite, aux singularités quelconques de S finiront par correspondre des singularités ordinaires de $S^{(i)}$. On obtiendra donc, par cette voie, une transformation uniforme qui changera une courbe ayant des singularités quelconques en une autre n'ayant plus que des singularités ordinaires (¹). Si, au lieu des deux courbes S, S′, on considère les deux courbes corrélatives Σ, Σ′, cette dernière comprendra, comme cas particulier, la développée de Σ : l'étude entreprise par M. Halphen se rattache donc à l'étude des développées successives d'une même courbe, dont il s'est déjà occupé dans un *Mémoire sur les points singuliers*, Mémoire qui doit être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Après avoir démontré que les courbes $S^{\prime n}$ n'ont plus que des singularités ordinaires, lorsque leur indice n est supérieur à une certaine limite i, M. Halphen détermine les degrés et les classes de ces courbes, et montre que ces nombres obéissent à une loi uniforme, quelle que soit la courbe primitive, lorsque n est plus grand que i; enfin, de l'étude d'un cas particulier, il déduit un théorème qu'il avait déjà obtenu dans le Mémoire cité précédemment, savoir que : *à partir d'un certain*

(¹) *Voir* à ce sujet deux Notes, une de M. Nöther (*Göttinger Nachrichten*, 1871), l'autre de M. Halphen (*Comptes rendus*, t. LXXX, p. 638).

rang, les degrés et les classes des développées successives d'une courbe algébrique plane quelconque forment deux progressions arithmétiques de même raison.

Laguerre. — Sur une surface de quatrième classe dont on peut déterminer les lignes de courbure. (145-154).

La surface dont il s'agit est définie comme il suit par M. Laguerre :

Soient S et *s* deux surfaces homofocales du second ordre, et P un de leurs plans principaux communs; par une droite D, prise arbitrairement dans le plan P, menons un plan touchant la surface S au point M et la surface *s* au point *m*. D'après un théorème connu, dû à M. Chasles, la droite M*m* est perpendiculaire à D : on peut donc par D mener un plan perpendiculaire à M*m*; appelons μ le point d'intersection de ces deux plans.

Lorsque D se déplace dans le plan P, le point μ décrit la surface Σ, objet des recherches de M. Laguerre. En particulier, ses lignes de courbure sont données par le théorème suivant : *Étant donnée, une conique quelconque* K *passant par les points d'intersection des coniques suivant lesquelles le plan* P *rencontre les surfaces* S *et* *s*, *si la droite* D *se déplace tangentiellement à* K, *le point* μ *correspondant décrit une ligne de courbure de* Σ.

Heine (E.). — Lettre adressée à M. Resal. (155-157).

Fuchs (L.). — Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite. (158-160).

Mathieu (É.). — Supplément au Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre. (161-164).

Resal (H.). — Note sur le mouvement du système de deux pendules simples, dont l'un est attaché à un point fixe, et l'autre à la masse qui termine le premier. (165-168).

Tisserand (F.). — Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes. (169-174).

Laplace a, le premier, démontré que les potentiels de deux ellipsoïdes homofocaux, relatifs à un même point extérieur, étaient entre eux comme les masses de ces ellipsoïdes. Le travail de M. Tisserand se rapporte à la démonstration de ce théorème, donnée par Lagrange en 1792 (*Œuvres*, t. V, p. 692). Soit V le potentiel de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

relatif au point (f, g, h), en sorte que

$$V=\int\int\int\frac{dx\,dy\,dz}{\Delta}=\int\int\int\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(f-x)^2+(g-y)^2+(h-z)^2}};$$

il faut démontrer que, relativement à l'ellipsoïde, V ne dépend que des différences a^2-b^2, b^2-c^2; posant

$$h=\rho\cos\lambda,\quad g=\rho\sin\lambda\sin\mu,\quad f=\rho\sin\lambda\cos\mu,$$

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\rho}+\frac{P_1}{\rho^2}+\frac{P_2}{\rho^3}+\frac{P_3}{\rho^4}+\ldots,$$

on aura

$$V = \frac{M}{\rho} + \frac{1}{\rho^3}\int P_2 dM + \frac{1}{\rho^5}\int P_4 dM + \ldots,$$

M désignant la masse de l'ellipsoïde. Lagrange a montré que les termes P_2, P_4, P_6 ne dépendaient, relativement à l'ellipsoïde, que des quantités $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$; M. Tisserand prouve qu'il en est ainsi pour le terme général P_{2i}, en sorte que la démonstration de Lagrange se trouve complétée.

Breton (de Champ) (P.) — **Explication d'un passage de la *Mécanique analytique* de Lagrange relatif à la composition des moments en Statique. (175-176).**

Jordan (C.). — **Mémoire sur les covariants des formes binaires. (177-232).**

M. Jordan a, comme on sait, démontré que *les covariants d'un système de fonctions binaires peuvent s'exprimer en fonctions entières d'un nombre limité de covariants indépendants.* L'analyse de M. Jordan montre bien qu'il existe une limite au nombre des covariants indépendants, mais il n'en donne pas immédiatement la valeur. La détermination de cette valeur fait l'objet principal du Mémoire dont il s'agit ici.

Il est divisé en huit Sections. Les quatre premières sont consacrées à rappeler et à établir un certain nombre de propriétés déjà connues, les principes de la notation symbolique, la forme symbolique des covariants, les identités à l'aide desquelles on peut transformer les unes dans les autres les diverses expressions symboliques d'un même covariant, la façon dont on peut introduire dans le calcul les symboles des covariants, la composition (*Ueberschiebung*) des covariants.

Dans la cinquième Section M. Jordan aborde l'étude des covariants du troisième degré et assigne leur forme canonique. C'est de ce premier résultat que découlent toutes les propositions établies dans la suite de son Mémoire.

Il montre dans la Section suivante comment tout covariant peut être décomposé en trois parties d'une forme déterminée, que l'auteur s'est attaché à mieux préciser que ne l'avait fait M. Jordan, à qui est due l'idée de cette décomposition; il parvient en particulier à exprimer la troisième partie en fonction entière de certains covariants indépendants, d'une forme très-simple, et dont le degré est compris entre des limites assez étroites (Section VII).

Revenant enfin dans la dernière Section à un covariant quelconque, M. Jordan établit, par des considérations nouvelles, ce théorème, d'où découle, comme corollaire, celui de M. Jordan : *Les covariants d'un système de formes* A, B, ..., *en nombre limité ou illimité, mais dont le degré ne surpasse pas une certaine limite, peuvent s'exprimer en fonction entière de covariants indépendants, dont l'ordre et le poids restent inférieurs à une certaine limite.*

Lemmi (E.). — Sur les cas d'exception au théorème des forces vives. Résumé et conséquences d'un Mémoire de M. Betti [1]. (140-158).

---

[1] Betti (E.) : *Sopra gli spazii d'un numero qualunque di dimenzioni.* (*Annali di Matematica pura ed applicata,* 2ᵉ série, t. IV, p. 140-158.)

Si x, y, z est un point mobile de masse m, se mouvant avec la vitesse v, à partir du point x_0, y_0, z_0, on a

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

en supposant que l'intensité de la force agissant sur le point ne dépende que de sa position. Si la valeur de l'intégrale ne dépend que des positions initiale et finale du point, le principe de la conservation de la force vive est vérifié; mais on a tort de regarder comme une condition suffisante, pour qu'il en soit ainsi, l'existence d'une fonction dont X, Y, Z sont les dérivées partielles. En effet, les fonctions X, Y, Z, qui représentent les composantes de forces émanant soit de points, soit de lignes, soit de surfaces, soit de solides, deviennent bien souvent, si ces forces, par exemple, agissent selon la loi de Newton, infinies ou discontinues dans ces points, lignes, surfaces ou solides; donc elles et leurs dérivées ne se conservent finies et continues que dans l'espace obtenu en excluant ces points, lignes, surfaces ou solides. L'intégrale

$$\int_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

dépendra ou ne dépendra pas du chemin que suit le point mobile entre ses deux positions extrêmes, suivant la nature de l'espace ainsi obtenu, suivant son degré de *connexion*. M. Betti, dans le Mémoire que résume M. Lemmi, est ainsi amené à étendre aux espaces à un nombre quelconque de dimensions la conception du degré de connexion introduite par Riemann pour les espaces à deux dimensions ou surfaces. De cette conception généralisée résulte une proposition générale sur les valeurs que peut prendre l'intégrale

$$\int \Sigma X\,dx.$$

Darboux (*G.*). — Lettre à M. Resal. (240).

Haton de la Goupillière. — Méthodes de transformations fondées sur la conservation d'une relation invariable entre les dérivées de même ordre. (241-256).

Désignons par y une fonction de la variable indépendante x; soit de même Y une fonction de la nouvelle variable indépendante X; y et x peuvent-ils être liés à X et Y de façon que la dérivée y' de y, par rapport à x, s'exprime uniquement au moyen de la dérivée Y' de Y par rapport à X, sans que les quantités X, Y entrent dans l'expression de y' en Y', et cela quelle que soit la relation sous-entendue de y à x?

Telle est la question dont s'occupe l'auteur. Il l'étend d'ailleurs aux dérivées $n^{\text{ièmes}}$, $y^{(n)}$ et $Y^{(n)}$.

Dans le cas des dérivées premières, la liaison est de la forme

$$x = MX + NY + P,$$
$$y = mX + nY + p,$$

M, N, P, m, n, p étant des constantes.

Dans le cas général, auquel le premier ordre fait exception, *il faut et il suffit, pour établir une relation fixe entre l'ancienne et la nouvelle dérivée d'ordre k, que l'ancienne variable indépendante soit fonction linéaire de la nouvelle, et que l'an-*

cienne variable fonction soit la somme d'une fonction linéaire de la nouvelle et d'un polynôme de degré k formé avec la nouvelle variable indépendante.

Halphen. — **Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace. (257-290 et 371-408).**

Soit $S = 0$ la courbe donnée; les points cherchés s'obtiendront par son intersection avec une certaine courbe $\Phi = 0$ dont l'équation est théoriquement facile à former. On se propose d'abord :

1° *De trouver le degré de la courbe* Φ;

2° *De trouver le nombre des points en tenant compte des singularités de la courbe* S.

C'est l'objet du § I. M. Halphen montre que les points cherchés sont situés sur une courbe algébrique de degré $\alpha(m-1)+\beta$, m étant le degré de la courbe S, et les coefficients α et β ne dépendent que de l'équation différentielle, celle-ci étant d'ailleurs supposée indépendante de la courbe S; il donne ensuite une règle pour calculer α et β, et prouve que, si la courbe ne présente que des *branches simples* (branches linéaires de M. Cayley), le nombre de points cherchés est $\alpha c + \beta m$, c et m étant la classe et le degré de la courbe; puis il enseigne à tenir compte des singularités de la courbe S.

Le § II est consacré à des applications, notamment à la démonstration de diverses formules établies par MM. de Jonquières, Cayley, Salmon, Zeuthen, et à l'établissement des deux théorèmes suivants :

A l'exception de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

il n'existe aucune équation différentielle algébrique du second ordre qui se reproduise elle-même par toute transformation homographique. Il n'existe aucune équation différentielle algébrique du troisième ordre jouissant de la même propriété.

Dans le § III, M. Halphen étend à l'espace la solution du problème qu'il s'est posé. Cette solution se présente immédiatement dans le cas où l'équation différentielle ou aux dérivées partielles reste inaltérée par toute transformation homographique. Dans le cas d'une telle équation $f = 0$ aux dérivées partielles, entre les fonctions y et les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, voici le résultat auquel parvient M. Halphen :

Le premier membre de l'équation, mise sous forme entière, est un invariant homogène des formes simultanées $U_2, U_3, \ldots$, *définies par la relation*

$$1.2.3\ldots i.\, U_i = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^i y,$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ *sont les variables de ces formes.*

Soient p *le poids de cet invariant et* δ *son poids.*

Les points d'une surface algébrique de degré m (*dans l'espace à* $k+1$ *dimensions*) *qui satisfont à la condition exprimée par l'équation* $f = 0$ *sont les intersections de cette surface avec une autre dont le degré est*

$$M = (p + \delta)m - (k + 2)p.$$

Darboux (G.). — Sur les développements en série des fonctions d'une variable. (291-312).

Ce Mémoire est consacré aux développements en série des fonctions d'une variable imaginaire; l'auteur donne, pour chaque développement, la forme du reste. Nous extrayons dans ce qui suit les principaux résultats de son travail; λ désignera constamment une *quantité imaginaire inconnue dont le module ne dépasse pas l'unité*.

On peut poser

$$f(z_1)-f(z_0)=\frac{\lambda(z_1-z_0)}{p(1-\theta)^{p-1}}f'[z_0+(1-\theta)(z_1-z_0)],$$

p étant un entier positif, θ étant réel, positif, <1. Pour $p=1$, on trouve une formule analogue à celle qui donne l'accroissement fini d'une fonction réelle.

On a

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(a+\theta h)$$
$$+\lambda\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1.2\ldots n.p}\varphi^{n+1}(a+\theta h).$$

Si, dans l'intégrale rectiligne

$$\int_a^x f(x)\varphi(x)dx,$$

on suppose les limites réelles, $f(x)$ positif et $\varphi(x)$ une fonction imaginaire quelconque, on a

$$\int_a^x f(x)\varphi(x)dx=\lambda\varphi(x_1)\int_a^x f(x)dx,$$

x_1 étant une valeur intermédiaire entre x et a.

Si $\varphi(t)$ désigne un polynôme du degré n, et $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{n-1}, \varphi^n$ les dérivées successives de ce polynôme, on aura

$$\varphi^n(0)[f(x+h)-f(x)]=h[\varphi^{n-1}(1)f'(x+h)-\varphi^{n-1}(0)f'(x)]$$
$$-h^2[\varphi^{n-2}(1)f''(x+h)-\varphi^{n-2}(0)f''(x)]+\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}h^n[\varphi(1)f^n(x+h)-\varphi(0)f^n(x)]+R_n,$$

où

$$R_n=(-1)^n h^{n+1}\int_0^1\varphi(t)f^{n+1}(x+ht)dt.$$

Cette formule est fondamentale pour les recherches de M. Darboux. En posant $\varphi(t)=(t-1)^n$, on retrouve la série de Taylor. En remplaçant n par $2n$, et en prenant

$$\varphi(t)=t^n(t-1)^n,$$

on a

$$f(x+h)-f(x)$$
$$=\frac{h}{2}[f'(x+h)+f'(x)]-\frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}\frac{h^2}{1.2}[f''(x+h)-f''(x)]+\ldots$$
$$+(-1)^{p-1}\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{2n(2n-1)\ldots(2n-p+1)}\frac{h^p}{1.2\ldots p}[f^p(x+h)+(-1)^{p-1}f^p(x)]+\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}[f^n(x+h)+(-1)^{n-1}f^n(x)]+R_{2n}.$$

où

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{\lambda h^{2n+1}}{2n+1} \frac{f^{2n+1}(x+\theta h)}{[(n+1)\ldots 2n]^2}.$$

Cette formule offre ceci d'intéressant qu'elle permet, en se servant des n premières dérivées, d'obtenir une approximation d'ordre $2n+1$.

La formule fondamentale contient $2n$ coefficients qui sont les dérivées de $\varphi(t)$ pour $t=0$, $t=1$, et il est possible, en profitant de l'indétermination du polynôme $\varphi(t)$, d'établir certaines relations entre ces coefficients ; par exemple, on peut rendre égales toutes les dérivées du polynôme pour $t=0$, $t=1$, sauf l'avant-dernière; le polynôme qui satisfait à cette condition est, à une constante près, celui qui donne la somme des puissances semblables des nombres naturels. M. Darboux est ainsi conduit naturellement à la formule célèbre de Maclaurin

$$\begin{aligned} hf'(x) &= f(x+h) - f(x) - \frac{h}{2}[f'(x+h) - f'(x)] \\ &+ \frac{B_1 h^2}{1.2}[f''(x+h) - f''(x)] + \ldots \\ &+ (-1)^n B_{2n-3} \frac{h^{2n-2}}{1.2\ldots 2n-2}[f^{2n-2}(x+h) - f^{2n-2}(x)] + R_{2n}, \end{aligned}$$

où B_1, B_3, B_5, ... sont les nombres de Bernoulli, et où le reste R_{2n} est donné par la formule

$$R_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{\lambda B_{2n-1} h^{2n+1}}{1.2\ldots 2n} f^{2n+1}(x+\theta h).$$

L'auteur remarque que cette formule de Maclaurin donne une formule de développement pour toute fonction impaire de x, formule qu'on obtient en remplaçant x par $-x$, h par $2x$.

Par un procédé semblable, l'auteur parvient à une formule due à Boole et analogue à celle de Maclaurin :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{2B_1(2^2-1)}{1.2} h [f'(x) + f'(x+h)] \\ &- \frac{2B_3(2^4-1)h^3}{1.2.3.4}[f'''(x) + f'''(x+h)] + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{2B_{2n-1}(2^{2n}-1)h^{2n-1}}{1.2.3\ldots 2n}[f^{2n-1}(x) + f^{2n-1}(x+h)] + R_{2n}, \end{aligned}$$

où

$$R_{2n} = \frac{(-1)^n \lambda h^{2n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+2)}[f^{2n+1}(x+\theta h) + f^{2n+1}(x+h-h\theta)].$$

En assujettissant le polynôme arbitraire de la formule fondamentale à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x+1) - r\varphi(x) = \frac{(1-r)x^n}{1.2\ldots n},$$

où r est une fraction positive, on est conduit au développement suivant :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= -a_1 h \left[f'(x+h) - \frac{1}{r} f'(x)\right] \\ &- a_2 \frac{h^2}{1.2}\left[f''(x+h) - \frac{1}{r} f''(x)\right] - \ldots \\ &- a_n \frac{h^n}{1.2\ldots n}\left[f^n(x+h) - \frac{1}{h} f^n(x)\right] + R_n. \end{aligned}$$

où

$$R_n = -\frac{1-r}{r}\frac{a_{n+1}h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(x+\theta h),$$

les a_n étant des fonctions rationnelles de r dont M. Darboux donne la détermination.

Enfin, comme dernière application, citons le développement suivant, qui converge plus rapidement que la série de Taylor :

$$f(x+h)-f(x) = \frac{h}{2}[f'(x+h)+f'(x)] - \frac{1.3}{(1.2)^2}\frac{h^2}{2^2}[f''(x+h)-f''(x)]+\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{(1.2.3\ldots n)^2}\frac{h^n}{2^n}[f^n(x+h)+(-1)^n f^n(x)]+R_n,$$
$$R_n = (-1)^n h^{n+1}\int_0^1 y_n(t)f^{n+1}(x+ht)\,dt;$$

$y_n(x)$ est un polynôme de degré n dont $y_{n-1}(x)$ est la dérivée et qui peut être défini par l'égalité

$$y_n(x) = \frac{1}{[1.2.3\ldots(n-2)]^2(n-1)n}x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Pépin (le P.). — Étude sur la théorie des résidus cubiques. (313-324).

L'auteur se propose de démontrer de la façon la plus simple possible les principaux théorèmes de la théorie des résidus cubiques, en particulier le théorème fondamental du Mémoire publié par Cauchy dans le *Bulletin de Férussac* (1829), et développé plus tard dans le tome XVII des *Mémoires de l'Académie des Sciences*.

Saint-Germain (*A. de*). — Des surfaces sur lesquelles un point peut se mouvoir suivant une certaine loi. (325-330).

Considérons un point matériel M, de masse égale à l'unité, sollicité par une force F dont les projections sur trois axes rectangulaires sont, u étant une fonction donnée de x, y, z,

$$X = \frac{du}{dx},\quad Y = \frac{du}{dy},\quad Z = \frac{du}{dz};$$

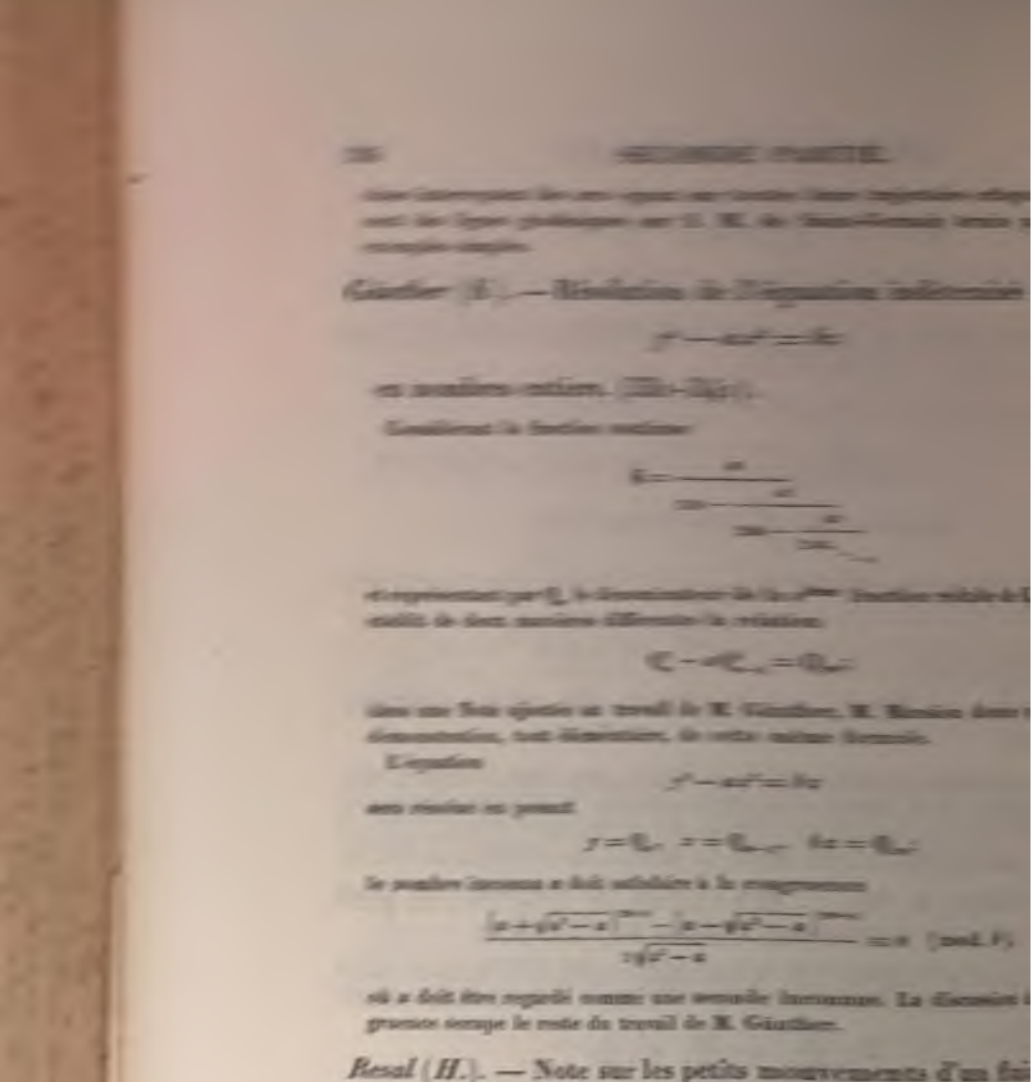
l'équation $u = \text{const.}$ représente une surface de niveau, dont l'intersection avec une surface quelconque S peut être appelée *ligne de niveau sur* S. M. de Saint-Germain se propose de déterminer cette dernière surface de manière que le point M, obligé de rester sur elle, et abandonné sans vitesse initiale à l'action de F, décrive toujours une trajectoire C orthogonale à toutes les lignes de niveau. Si, par exemple, M n'était sollicité que par la pesanteur, il devrait tomber sur la surface cherchée suivant une ligne de la plus grande pente.

Le problème dépend d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, admettant une intégrale première d'une forme simple, savoir

$$(X^2+Y^2+Z^2)\left[1-\frac{(pX+qY-Z)^2}{(1+p^2+q^2)(X^2+Y^2+Z^2)}\right] = \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction arbitraire de u.

Cette équation ne peut être elle-même intégrée généralement, mais elle est susceptible d'une interprétation géométrique; deux lignes de niveau infiniment voi-



où α doit être regardé comme une seconde inconnue. La discussion [illegible] gruence occupe le reste du travail de M. Günther.

Besal (H.). — **Note sur les petits mouvements d'un fl[illegible] pressible dans un tuyau élastique.** (342-344).

L'auteur démontre analytiquement un certain nombre de résult[illegible] périmentalement par M. Marey, et publiés en 1875 dans un Mém[illegible] *Mouvement des ondes liquides*, pour servir à la théorie du pouls.

Mathieu (Ém.). — **Mémoire sur le problème des tr[illegible] (345-370).**

On peut ramener le problème du mouvement de trois corps à cel[illegible] ment de corps fictifs, au nombre de deux seulement, et soumis à un[illegible] forces qui ne dépend que des distances r et r_1 de ces deux corps à un[illegible] pris pour origine des coordonnées. M. Mathieu étudie, en s'aidant [illegible] tions géométriques, le mouvement du plan P passant par les deux cor[illegible] le point O. Ce plan tourne à chaque instant autour d'une certaine dro[illegible] elle-même et décrivant un cône, autour duquel le plan P roule su[illegible]

problème sera résolu si l'on connaît le mouvement du plan P et le mouvement des deux points m, m_1 de ce plan.

M. Mathieu donne la vitesse instantanée de rotation autour de la droite L, puis le mouvement de la trace du plan P sur le plan invariable du système; il parvient à une expression remarquable de la force vive, déjà obtenue par Bour. Cette expression conduit à huit équations canoniques; l'une des intégrales est l'équation des forces vives; en les intégrant complétement, on obtiendra les distances des deux points mobiles à l'origine, les angles formés par les rayons vecteurs qui aboutissent en ces deux points avec la droite S d'intersection du plan P et du plan invariable. La position des points dans le plan P est ainsi déterminée; quant à ce plan, il est lui-même déterminé par l'angle qu'il fait avec le plan invariable et par le mouvement de la droite S sur le plan invariable. Ces quantités une fois connues, les formules de M. Mathieu permettent de calculer très-aisément les angles que les deux rayons vecteurs font avec la droite L, la vitesse angulaire de rotation du plan P autour de L, et enfin la vitesse avec laquelle cette même droite L se déplace sur le cône qu'elle décrit.

M. Mathieu est ensuite amené à rectifier une erreur commise par Bour dans le travail auquel nous avons déjà fait allusion (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, p. 37). Bour pensait que, pour obtenir toutes les équations du problème, il fallait ajouter aux huit équations canoniques et à l'équation des aires relative au plan invariable deux des intégrales des aires relatives à trois plans fixes de coordonnées rectangulaires. La méthode suivie par M. Mathieu montre qu'il n'y a pas lieu d'employer ces deux équations qui, d'ailleurs, sont, ainsi qu'il le prouve, renfermées dans les équations canoniques. Cette discussion le conduit au théorème suivant :

Si deux corps m et m_1 sont soumis à une fonction de forces qui ne dépend que de leurs distances à l'origine et de l'angle formé par ces deux distances, le théorème des aires a lieu à chaque instant par rapport à toute droite menée par l'origine dans le plan P qui passe par m et m_1 et cette origine, non-seulement pour l'ensemble des deux corps m et m_1, mais encore pour chacun de ces deux corps pris isolément.

Gyldén (*H.*). — Extrait d'une Lettre à M. Hermite, relative à l'application des fonctions elliptiques à la théorie des perturbations. (411-419) ([1]).

M. Gyldén complète d'abord, en rectifiant une faute de copie, une Note sur le même sujet, insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 26 avril 1875. Puis il reproduit, comme exemples de l'application de sa méthode, les résultats numériques obtenus par M. Asten pour les perturbations du périhélie de la comète d'Encke produites par Jupiter, et ceux obtenus par MM. Bäcklund et Bonsdorff pour les perturbations du périhélie de la même comète, dues à l'action de la Terre. Les formules ainsi obtenues sont très-convergentes. Elles renferment deux variables, dont l'une x correspond à la position de la planète, et l'autre ω à celle de la comète. Dans le premier cas, le développement est de la forme

$$\Sigma A_{ik} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\} \, 2ix \cos k\omega,$$

([1]) Une erreur de pagination a fait augmenter de 2 unités les numéros des pages qui suivent la page 408.

k variant de 1 à 5, i de zéro à 11. Pour les perturbations produites par la T
k varie de 1 à 4, i de zéro à 5.

Ces résultats sont fort intéressants en eux-mêmes. Hansen, dans le Mémoire ronné par l'Académie des Sciences de Paris, où il introduit pour la première la méthode de *partition*, donne une partie du calcul des perturbations prod par la Terre sur la comète d'Encke. Dans les développements analogues à que cite M. Gyldén, la variable de laquelle dépend la position de la Terr multipliée par des nombres qui s'élèveraient jusqu'à 50 et au delà si l'on co vait tous les termes utiles.

Mais la comparaison de deux développements cités par M. Gyldén met en dence un avantage bien important de sa méthode. On sait que cette méthode siste essentiellement à remplacer l'anomalie de la planète par une intégrale ellipt relative à un module convenable. Or il arrive que l'on peut choisir arbitraire ce module, du moins entre certaines limites, sans modifier notablement la co gence des développements. Dans les deux exemples donnés par M. Gyldén, pu adopter le même module, bien que les conditions fussent assez différentes.

Il nous sera permis, en sortant des limites de la Lettre dont nous ren compte ici, de dire que M. Gyldén, partant de cette remarque, a pu prépare Tables auxiliaires pour faciliter l'application de sa méthode. Parmi ces Table unes ont pour but de donner, pour la valeur de module employée par MM. A Bonsdorff et Bäcklund, les coefficients des développements de certaines fonc de am$x$ suivant le sinus et cosinus de multiples de x; les autres, de fac certaines intégrations nécessaires pour l'achèvement du calcul des perturbation

Laurent (*H.*). — Extrait d'une Lettre adressée à la rédacti (420). J. T.

THE MESSENGER OF MATHEMATICS, edited by W.-Allen WITWO C. TAYLOR, W.-J. LEWIS, R. PENDLEBURY, J.-W.-L. GLAISHER. London Cambridge, Macmillan and C° (¹).

Tome I; 1871-1872.

Stokes (*G.-G.*). — Explication d'un paradoxe dynamique. (1).

Cayley (*A.*). — Note sur la théorie des enveloppes. (3).

(¹) Ce Recueil fait suite au Recueil intitulé : *The Oxford, Cambridge and D Messenger of Mathematics, a Journal supported by junior Mathematical Students, conducted by a Board of Editors composed of Members of the three Universitie* Cambridge, Macmillan and C°. 5 vol. in-8, publiés chacun en 12 fascicules; 1862-1

La nouvelle série, qui a commencé à paraître en 1872, a conservé le même mod publication par livraisons mensuelles d'une feuille in-8. Prix, pour les souscripte 8 sh. 6 d. par an.

Outre les articles originaux dont nous donnons ici les titres, ce journal contient comptes rendus de Sociétés savantes et des Notices bibliographiques.

Cockle (sir *James*). — Exercices de Calcul intégral. (5-6).

Hopkinson (*J.*). — Impact d'une verge élastique (17).

Ferrers (*N.-M.*). — Note sur un paradoxe dynamique. (21).

Cayley (*A.*). — Note sur la démonstration donnée par Lagrange du théorème de Taylor. (22).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur l'histoire de la constante d'Euler. (25).

Genese (*R.-W.*). — Sur les maxima et les minima. (33).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\,dx$. (35).

Wilkinson (*M.-M.-U.*). — Note sur le théorème de Taylor. (36).

Cayley (*A.*). — Solutions de questions pour le prix Smith de 1871. (37, 71, 89).

Salmon (*G.*). — Sur les périodes des inverses des nombres premiers. (49).

Kempe (*A.-B.*) — Sur la résolution des équations par des moyens mécaniques. (51).

Hopkinson (*J.*). — Sur les tensions (*Stresses*) produites dans un disque élastique par une rotation rapide. (53).

Muir (*Thomas*). — Triangles homologues. — Contribution à la Géométrie de position. (55).

Pendlebury (*R.*), *Muir* (*Th.*), *Lamplugh* (*D.*), *Glaisher* (*J.-W.-L.*). — Notes mathématiques. (60).

Taylor (*C.*). — Propriété angulaire du cône circulaire droit. (67).

Townsend (*R.*). — Sur une propriété de la théorie des quadriques, analogue à une propriété connue de la théorie des coniques. (70).

Merrifield (*C.-W.*). — Sur certaines familles de surfaces. (81).

Cayley (*A.*). — Extrait d'une Lettre à M. *C.-W. Merrifield*. (87).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur un paradoxe dans les séries infinies. (97).

Russell (*W.-H.-L.*). — Note sur une élimination fonctionnelle. (102).

Genese (*R.-W.*). — Sur la trisection d'un angle. (103).

Genese (*R.-W.*). — Notes sur les coniques analytiques. (104).

Cayley (*A.*) — Nouvelle Note sur la démonstration donnée par Lagrange du théorème de Taylor. (105).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les intégrales

$$\int_0^\infty \sin(x^n)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \cos(x^n)\,dx.$$

(106).

Cayley (*A.*). — Sur une propriété de la surface gauche circonscrite à deux surfaces quadriques. (111).

Townsend (*R.*). — Sur la propriété analogue, dans la théorie des quadriques, à une propriété connue de la théorie des coniques, et sur les inverses de ces propriétés. (113).

Cayley (*A.*). — Sur la réciproque d'une certaine équation d'une conique. (120).

Taylor (*A.*). — La géométrie de l'hyperbole rectangle. (121).

Hopkinson (*J.*). — Sur l'élasticité imparfaite de verges parfaitement élastiques. (129).

Pendlebury (*R.*). — Sur les carrés des transcendantes. (131).

Wilkinson (*M.-M.-U.*) — Nouvelle Note sur le théorème de Taylor. (135).

Cayley (*A.*). — Nouvelle Note sur le théorème de Taylor. (133).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur certains théorèmes concernant les transcendantes logarithmiques. (138).

Cayley (*A.*). — Sur une identité en Trigonométrie sphérique. (145).

Genese (*R.-W.*). — La réciproque du théorème de Pascal. (146).

Routh (*E.-J.*). — Sur le retard d'une onde dans un cristal. (147).

Pendlebury (*R.*). — Note sur l'indicatrice. (148).

Muir (*Th.*). — Une équation de la géométrie des lignes droites. (150).

Taylor (*C.*). — Réciprocité ponctuelle. (152).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur la réduction des transcendantes fonctionnelles. (153).

Witworth (*W.-Allen*). — Questions de probabilité. (163).

Leclert (*Em.*). — Sur certains théorèmes relatifs à la géométrie des navires. (167).

Wilkinson (*M.-M.-U.*). — Deux problèmes du calcul des variations. (175).

Cayley (*A.*). — Sur une courbe quartique pénultième. (178).

Taylor (*C.*). — Démonstration de la proposition 8 du livre II d'Euclide. (181).

Curtis (*Arthur-Hill*). — Théorèmes relatifs au centre de pression. (182).

Tome II; 1872-1873.

Routh (*E.-J.*). — Coordonnées elliptiques appliquées aux moments d'inertie. (1).

Routh (*E.-J.*). — Sur le centre de pression d'un triangle et d'un quadrilatère. (5).

Cayley (*A.*). — Sur la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. (6).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur l'expression d'Abel pour

$$\varphi(x+yi)+\varphi(x-yi).$$

(12).

Cayley (*A.*). — Théorèmes correspondants à certaines relations symboliques. (17).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur le théorème de Fourier (sur l'intégrale double). (20).

Hopkinson (*J.*). — La théorie mathématique des battements de Tartini. (24).

Townsend (*R.*). — Sur une propriété de la sm[illegible]ide. (28).

Taylor (*C.*). — L'hyperbole rapportée à ses asymptotes. (30).

Townsend (*R.*). — Sur une propriété dans la théorie des coniques confocales et son analogue dans la théorie des quadriques confocales. (33).

Cayley (*A.*). — Sur la représentation d'une surface sphérique ou autre sur un plan : dissertation pour le prix Smith. (36).

Monro (*C.-J.*). — Sur le nombre des termes, d'après Baltzer, d'un déterminant dont une diagonale s'annule. (38).

Taylor (*C.*). — Le cône circulaire droit. (39).

Shanks (*W.*). — Sur les périodes des inverses des nombres premiers. (41).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Table des logarithmes des nombres à dix figures, par *Pineto*. (44).

Salmon (*G.*). — Sur les périodes des inverses des nombres premiers. (49).

Kempe (*A.-B.*). — Sur la résolution des équations par des moyens mécaniques. (51).

Hopkinson (*J.*). — Sur les tensions (*Stresses*) produites dans un disque élastique par une rotation rapide. (53).

Muir (*Thomas*). — Triangles homologues. Contribution à la Géométrie de position. (55-99).

Pendlebury (*R.*), *Muir* (*Th.*), *Lamplugh* (*D.*), *Glaisher* (*J.-W.-L.*). — Notes mathématiques. (60).

Hopkinson (*J.*). — Sur le Calcul des formules empiriques. (65).

Hermite (*C.*). — Sur l'élimination des fonctions arbitraires. (69).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur les intégrales définies. (71).

Witworth (*W.-A.*), *Salmon* (*G.*). — Notes mathématiques. (80).

Cayley (*A.*). — Sur le théorème de Listing. (81).

Taylor (*C.*). — Un système de coniques géométriques. (97).

Perigal (*H.*). — Sur les directions et les transformations géométriques. (103).

Forbes (*G.*). — Sur le théorème de Taylor. (106).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Notation proposée pour l'impression des exposants compliqués. (107).

Hall (*Asaph*). — Sur une détermination expérimentale de π. (113).

Frisby (*Edgar*). — Sur le calcul de π. (114).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Remarques sur le calcul de π. (119).

Cayley (*A.*). — Note sur les maxima de certaines fonctions factorielles. (129).

Freeman (*A.*). — Six relations thermodynamiques. (131).

Cayley (*A.*). — Problème et théorèmes hypothétiques concernant deux surfaces quadriques. (137).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les séries déduites des produits infinis. (138).

Taylor (*C.*). — Théorème sur la courbure conique. (142).

Cayley (*A.*). — Dissertations pour le prix Smith. (145-161).

Jenkins (*Morgan*). — Le cas douteux en Trigonométrie sphérique. (150).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Remarques sur certaines séries qui se trouvent dans l'article ci-dessus : « Sur les séries déduites de produits infinis ». (153).

Cayley (*A.*). — Sur une formule différentielle se rattachant à la théorie des coniques confocales. (157).

Sharpe (*H.-J.*). — Note sur la réflexion du son. (159).

Pendlebury (*R.*). — Sur une méthode pour trouver deux moyennes proportionnelles. (166).

Drach (*S.-M.*). — Règle générale facile pour remplir tous les carrés magiques. (169).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Identités arithmétiques. (177).

Cayley (*A.*). — Une identité relative aux transcendantes elliptiques. (179).

Johnson (*Wm.-Woolsey*). — Note sur les démonstrations du théorème de Taylor. (180).

Rawson (*Robert*). — Sur deux équations différentielles générales du second ordre et du $n^{ième}$ degré, déduites de l'équation linéaire connue. (185).

Drach (*S.-M.*). — Nouvelle Note sur les carrés magiques. (187).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Proposition d'Arithmétique. — Démonstration simple d'une propriété connue des nombres de Bernoulli. (188-190).

Tome III; 1873-1874.

Cayley (*A.*). — Dissertation pour le prix Smith. (1).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Démonstration géométrique de l'égalité

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots n)^2.$$

(5).

Drach (*S.-M.*). — Relations entre les angles des corps réguliers. — Tables de logarithmes et de facteurs. (6).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Remarques sur les Tables de logarithmes et de facteurs, en réponse aux propositions de M. *Drach*. (7).

Bushell (*W.-D.*). — Notes sur les angles conterminaux. (12).

Bierens de Haan (*D.*). — Sur la valeur de π à 35 décimales de Ludolff van Ceulen, et sur quelques-uns de ses ouvrages. (24).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur la quadrature du cercle, de 1580 à 1630. (27).

Muir (*Th.*). — Une propriété des polygones réguliers convexes et étoilés d'un même nombre de côtés, inscrits dans un cercle. (47).

Cayley (*A.*). — Problème : « Placer deux tétraèdres donnés en perspective, ou, ce qui est la même chose, les tétraèdres étant désignés par ABCD, A'B'C'D', les placer de telle sorte que les lignes AA', BB', CC', DD' se rencontrent en un point O ». (50).

Shanks (*W.*). — Sur les périodes des inverses des nombres premiers. (2e article). (52).

Holmes (*Jno.*). — Théorème de Trigonométrie. (56).

Scott (*R.-S.*). — Généralisation du théorème précédent. (57).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur la probabilité des erreurs des différents résultats des calculs, attribuables à l'incertitude de la dernière figure par suite de la suppression des suivantes. (59). — Sur la détermination expérimentale de la valeur de π par M. *Ambrose Smith*, au moyen de la théorie des probabilités. (161).

Cayley (*A.*). — Sur la résiduation par rapport à une courbe cubique. (62).

Wace (*H.*). — Sur le calcul des logarithmes. (66-92).

Hermite (*Ch.*). — Démonstration de l'irrationnalité de e^x, quand x est un entier. (98).

Hanlon.— Propositions pour la formation d'une Table étendue de logarithmes, et discussion à laquelle ce projet a donné lieu à Bradford. (100).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur une question de probabilités se rattachant à l'exécution des calculs en duplicata. (106).

Cockle (sir *James*). — Exercices de Calcul intégral. (108).

La Collection de modèles de surfaces réglées à South Kensington. (111).

Nanson (*E.-J.*). — Note sur l'Hydrodynamique. (120).

Hicks (*W.-M.*). — Étude géométrique de quelques propriétés des surfaces quadriques. (122).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Expression de tangnx en fraction continue. (137).

Nanson (*E.-J.*). — Sur l'impact des corps élastiques. (138).

Merrifield (*C.-W.*). — Les ovales de Descartes considérés comme projections des intersections des surfaces du second degré. (141).

Hall (*Asaph*). — Sur le mouvement d'un point vers un centre d'attraction où la force est infinie. (144).

Cayley (*A.*). — Addition au Mémoire précédent. (149).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Manière de traiter les proportions, discu-

Wilkinson (*M.-M.-U.*). — Analys
sur le calcul des variations. (184

Tome IV; 18

Muir (*Th.*). — Théorèmes sur le
question du nombre des chiffres
des nombres entiers. (1).

Cayley (*A.*).— Questions pour le
ques. (6).

Pendlebury (*R.*). — Deux ancien

Cockle (sir *James*). — Sur le sign

Johnson (*W.-W.*). — Note sur u

Cayley (*A.*). — Sur la projection
gauche de révolution. (17).

Merrifield (*C.-W.*). — Théorème

Hopkinson (*J.*). — Note sur l'impa

Cockle (sir *James*). — Exercices d

Garnett (*W.*). — Note sur un cy
l'électrophore. (28).

Cayley (*A.*). — Un problème de S

Everett (*J.-D.*). — Sur une nouve

ey (*A.*). — Sur une équation différentielle de la théorie des ıctions elliptiques. (69).

(*Harry*). — Sur le centre de gravité d'un trapèze. (70).

gal (*H.*). — Deux quadratures du cercle approchées. (71).

son (*W.-W.*). — La méthode des vitesses (*rates*) appliquée a Géométrie. (12).

ther (*R.-F.*). — Étude de l'équation $\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{P}{RR'} = 0$. (73).

sher (*J.-W.-L.*). — Sommation de termes choisis d'une rie. (74).

ley (*A.*). — Sur un problème du *Senate-House*. (75).

worth (*W.-A.*). — Formule pour obtenir une fraction de va- ur approchant d'une irrationnelle donnée. (79).

t (*H.*). — Sur certaines transformations de mouvement. (82).

worth (*W.-A.*). — Le polygone régulier dans l'espace. (88).

ley (*A.*). — Note sur un théorème de Jacobi pour la trans- rmation d'une intégrale double. (92).

isher (*J.-W.-L.*). — Démonstration de la formule

$$KE' + K'E - KK' = \tfrac{1}{2}\pi.$$

5).

t (*H.*) — Notes sur une formule trigonométrique. (97).

ker (*R.*). — Note sur une formule de Trigonométrie. (101).

is (*R.-F.*). — Note sur la Trigonométrie sphérique. (102).

gal (*H.*). — Dissections et transformations géométriques. ° II. (103).

rifield (*C.-W.*). — Démonstration élémentaire de la formule ui exprime l'absence de rotation moléculaire dans le mouve- ent d'un fluide. (105).

son (*R.*). — Sur une résolvante différentielle. (108).

ley (*A.*). — Sur une équation différentielle de la théorie des nctions elliptiques. (110).

Darwin (*George-H.*). — Sur une représentation mécanique de l'intégrale elliptique de seconde espèce. (113).

Hart (*H.*). — Sur certaines transformations de mouvement. (116).

Kempe (*A.-B.*). — Sur quelques nouveaux systèmes articulés. (121).

Hart (*H.*) — Illustration géométrique d'une solution d'une équation différentielle en fonctions elliptiques. (125).

Ritchie (*W.-I.*). — Propriété de la parabole. (127).

Lowry (*W.-L.*). — Note sur une formule de Géométrie analytique. (129).

Genese (*R.-W.*). — Sur le centre de gravité d'un trapèze. (129).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une identité. (130).

Lewis (*J.-N.*). — Notes astronomiques. (131).

Johnson (*W.-W.*). — Illustration géométrique de formes indéterminées, avec une Note sur la différentielle d'une fonction de deux variables. (132).

Taylor (*C.*). — Le cône circulaire droit. (145).

Merrifield (*C.-W.*). — Les ovales de Descartes considérés comme des intersections coniques. (148).

Cayley (*A.*). — Note sur un procédé d'intégration. (149).

Genese (*R.-W.*). — Évaluations géométriques. (154).

Cayley (*A.*). — Dissertation pour le prix Smith. Les Nombres de Bernoulli et leur image en Analyse. (157).

Mansion (*P.*). — Généralisation du théorème de Taylor. (161).

Taylor (*H.-M.*). — Sur l'enveloppe de la droite qui forme des cordes égales dans deux cercles donnés. (163).

Taylor (*H.-M.*). — Problème de Géométrie. (164).

Mansion (*P.*). — Note sur un langage analytique universel. (166).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur la formule

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

(168).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Démonstration de quelques théorèmes de M. Liouville sur les intégrales définies. (170).

Cayley (*A.*). — Théorème sur les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. (171).

Hart (*H.*). — Notes sur la courbure. (172).

Mansion (*P.*). — Nouvelle démonstration de la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires. (177).

Martin (*Artemas*). — Réduction de quelques intégrales aux formes elliptiques. (179).

Hart (*H.*). — Formules pour l'excès sphérique d'un quadrilatère inscrit dans un petit cercle, et pour le rayon dans un petit cercle circonscrit à un quadrilatère. (181).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Démonstration de la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x - \frac{a}{n}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx.$$

(186).

Cayley (*A.*). — Note sur la courbe cassinienne. (187).

Tucker (*R.*). — Trouver le *latus rectum* de la parabole. (189).

Genese (*R.-W.*). — Sur une formule d'Optique géométrique. (189).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur une intégrale. (190).

Allen (*A.-J.-C.*). — Équation du plan tangent à une surface du second degré. (191).

Tome V; 1875-1876.

Taylor (*H.-M.*). — Sur la génération d'une surface développable passant par deux courbes données. (1).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Théorème d'Arithmétique. (3).

Ferrers (*N.-M.*). — Décomposition de $x^n - 2\cos n\theta + \frac{1}{x^n}$ en facteurs. (6).

Cayley (*A.*). — Sur une expression de $1 \pm \sin(2p+1)u$ au moyen de $\sin u$. (7).

Darwin (*G.-H.*). — Sur les abordages en mer. (9).

Genese (*R.-W.*). — Notes sur les coordonnées polaires. (14).

Davis (*R.-F.*). — Solution graphique des équations quadratiques. (17).

Scott (*W.-H.*). — Démontrer que le nombre des combinaisons de n choses r à r est $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$. (18).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Notes sur la Thermodynamique. (19). — Trois théorèmes d'Arithmétique. (21).

Scott (*R.-F.*). — Sur certaines intégrales définies multiples. (22).

Cockle (Sir *J.*). — Sur les séries et sur les limites. (25).

Taylor (*H.-M.*). — Sur une certaine intégrale multiple. (29).

Rawson (*R.*). — Sur la généralisation des théorèmes de M. Liouville sur les intégrales définies. (30).

Mansion (*P.*). — Note sur une interprétation uniforme de trois formes analytiques différentes du théorème de Rolle. (34).

Hart (*H.*). — Sur la description mécanique du limaçon et le mouvement parallèle qu'on en déduit. (35).

Cayley (*A.*). — Coup d'œil sur la théorie des équations. (89).

Johnson (*W.-W.*). — Sur le mouvement *three-bar*. (50).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Théorèmes relatifs aux diviseurs d'un nombre. (52).

Tanner (*H.-W.-Lloyd*). — Sur la résolution des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (53-71).

Everett (*J.-D.*). — Sur une nouvelle méthode en Statique et en Cinématique. (3e *Partie*). (72-83).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Démonstration arithmétique de l'identité de Clausen. (83).

Hill (*E.*). — Maxima et minima, sans le théorème de Taylor. (84).

Cayley (*A.*). — Sur la formule d'intégration d'Aronhold. (88).

Mansion (*P.*). — Théorème d'Arithmétique. (90).

Tanner (*H.-W.-Ll.*). — Sur l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} + Z' = 0.$$

(153).

Mansion (*P.*). — Démonstration simple d'un théorème de Géom trie par les déterminants. (158). — Coordonnées trilinéaires d points circulaires à l'infini. (158). — Sur le quadrilatère com plet. (159).

Johnson (*W.-W.*). — Sur le quadrilatère en forme de cerf vola (*kite-shaped*). (159).

Colson (*C.-G.*) — Démonstration d'une proposition de Trigon métrie sphérique. (161).

Creenhill (*A.-G.*). — Résolution mécanique d'une équation cub que au moyen d'un quadrilatère articulé. (162).

Cayley (*A*). — Note sur l'article de M. *Martin*, intitulé : « Su les intégrales de quelques différentielles. » (163). — Théorèm de Trigonométrie. (164).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Théorèmes divers. (164).

Cayley (*A.*). — Note sur la démonstration du théorème d Clairaut. (166).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx$. (168).

Gray (*Peter*). — Valeurs numériques de certaines quantité (172).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Expression de $\Theta(x)$ sous forme d'inté grale définie. (173). — Notes sur certaines formules des *Funda menta nova* de Jacobi. (174).

Greenhill (*A.-G.*). — Représentation graphique des fonction elliptiques au moyen d'une tige élastique courbée. (180).

Hicks (*W.-M.*). — Méthode pratique pour modeler la surface d l'onde. (183).

Taylor (*H.-M.*). — Sur les lignes de courbure d'une surface (186).

Cayley (*A.*). — Théorème sur la partition des nombres. (188).

Taylor (*C.*). — Le cône circulaire droit. (189).

Johnson (*W.-W.*). — Note sur le quadrilatère articulé. (190).

Tome VI; 1876-1877.

Smith (*Henry-J.-Stephen*). — Notes sur les fractions continues. (1-14).

Ferrers (*N.-M.*). — Sur le théorème de Clairaut et la variation de la pesanteur à la surface de la Terre. (14).

Purser (*Frederick*). — Sur la seconde méthode de Laplace pour traiter le problème de Legendre. (18).

Cayley (*A.*). — Sur la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. (23).

Martin (*Art.*). — Réduction de quelques intégrales aux formes elliptiques. (28).

Cayley (*A.*). — Sur une équation différentielle de la théorie des fonctions elliptiques. (29).

Tanner (*H.-W.-L.*). — Exemples d'équations aux différentielles partielles du second ordre résolubles par différentiation (32-45).

Mansion (*P.*). — Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées. (45).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Expression des coefficients de Laplace, des nombres de Bernoulli et d'Euler, etc., sous forme de déterminants. (49-63).

Cayley (*A.*). — Sur une formule en q conduisant à une expression de E. (63).

Elliot (*E.-B.*). — Note sur une classe d'intégrales définies. (66).

Nanson (*E.-J.*). — Transformation d'une équation différentielle. (69).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur un produit continu numérique. (71).

Nanson (*E.-J.*). — Sur le nombre des constantes arbitraires dans

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, begründet von H.-C. Schumacher, herausgegeben von Prof. Dr C.-A.-F. Peters. Kiel (¹).

Tome LXXXVI, nos 2041-2064; 1875.

Hornstein (*C.*). — **Observations de petites planètes faites à Prague en 1874. (1-4).**

Ces observations ont été faites avec une nouvelle lunette équatoriale de 6 pouces d'ouverture, construite en 1870 par Steinheil, et placée, l'année suivante, à 38 mètres au-dessus du sol sur le sommet de la tour de l'Observatoire.

Hall (*A.*). — **Éphéméride de Terpsichore (81) pour l'opposition de 1876. (3-6).**

Galle (*J.-G.*). — **Note sur les observations de Flore en 1873. (5-8).**

Ces observations donnent pour la parallaxe solaire $\pi = 8'',873$.

Gruber (*Ludwig*). — **Éléments de Tolosa (138). (7-10).**

Bredikhine. — **Observations de la comète d'Encke, faites en 1875 à Moscou. (9-12).**

Galle (*J.-G.*). — Observations de la comète de Coggia (1874, III), faites à Breslau. (13-14).

Doberck (*W*). — Éléments de τ Ophiuchus. (13-16).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte des planètes (144) et (145), faites à Clinton les 5 et 6 juin 1875. (15-16).

Veltmann (*W.*). — Sur le mouvement de plusieurs points qui s'attirent suivant la loi de Newton. (17-30).

Ball (*R.-St.*). — Éléments rectifiés et éphéméride de Némésis (128) pour l'opposition de 1875. (29-32).

Borrelly. — Découverte de la planète (146) le 8 juin 1875. (31-32).

Marth (*A.*). — Éphéméride des satellites de Saturne en 1875. (33-54).

(¹) Voir *Bulletin*, I_1, 244.

D'Arrest. — Nouveau catalogue d'étoiles dont les spectres appartiennent aux types III et IV du P. Secchi. (53-60).

Ellery (*R.-J.*). — Observations de la Lune et d'étoiles de la Lune, faites en 1874 à Melbourne. (59-64).

Luther (*Rob.*). — Observations de petites planètes, faites en 1875 à Düsseldorf. (65-68).

Tempel (*W.*). — Note sur la nébuleuse de Mérope. (67-70).

Dembowski. — Changements survenus dans l'étoile triple 503 de South. (69-72).

Anderson (*F.*). — Éléments de Herta (135) et éphéméride pour l'opposition de 1875. (73-76).

Gericke (*Hugo*). — Observations de petites planètes, faites à Leipzig en 1875. (76-78).

Rümker. — Observations de planètes et de comètes, faites à Hambourg de 1872 à 1874. (81-114).

Rogers (*W.-A.*). — Notice nécrologique sur le professeur J. Winlock, Directeur de l'Observatoire de Harvard College. (113-118).

White (*E.-J.*). — Observations de la comète de Coggia, faites à Melbourne. (117-120).

Tebbutt (*J.*). — Observations de la comète de Coggia, faites à Windsor (N.-S.-Wales) en 1874. (119-122).

Schulhof (*L.*). — Découverte de la planète (147). (121-122).

Stephan (*E.*). — Éléments et éphéméride de (148). (123-124).

Doberck (*W.*). — Éléments de l'orbite de γ du Lion. (129-132).

Stockwell (*J.-N.*). — Réponse aux critiques du professeur Schjellerup sur sa théorie de la Lune. (131-138).

Krüss (*Hugo*). — Note sur les recherches dioptriques de Hansen. (137-144).

Winnecke. — Observations diverses, faites en 1874 et 1875 à l'Observatoire de l'Université de Strasbourg. (145-154).

Doberck (*W.*). — **Éléments de l'orbite de ζ du Verseau. (155-158).**

Bruhns (*C.*). — **Observations de planètes et de comètes faites en 1874 à l'Observatoire de Leipzig. (161-172).**

Wilson (*R.-W.*). — **Observations de Junon, faites en 1874 à l'Observatoire de Harvard College. (173-176).**

Baeyer. — **Note sur le calcul des erreurs et la compensation d'un nivellement géométrique. (177-188).**

Doberck (*W.*). — **Éléments de 36 Andromède Σ 73. (187-190).**

Ces éléments sont fondés sur les observations faites de 1830 à 1870, par Herschel, Smyth, Dawes, Struve, Mädler et Dembowski.

Schulhof (*L.*). — **Éléments et éphéméride de Protogenia (147). (189-190).**

Withe (*E.-J.*). — **Observations d'occultations d'étoiles et observations de la comète d'Encke, faites à Melbourne. (192-192).**

Les observations d'occultations d'étoiles s'étendent du 1er octobre au 18 janvier et seront ainsi utiles à comparer aux observations analogues faites en des points de longitude mal déterminée par les astronomes attachés aux expéditions du passage de Vénus.

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes, faites à l'équatorial de Leipzig en 1875. (193-200).

Plath (*C.-W.*). — Éléments et éphéméride de Lachesis (120) pour l'opposition de 1875. (119-204).

Spörer. — Observations de taches solaires et de protubérances, faites en 1873 à Potsdam. (204-208).

Becker (*E.*). — Observations d'étoiles de comparaison et observations de planètes et de comètes, faites en 1874 au grand cercle méridien de Berlin. (209-220).

Bruhns (*C.*). — Note sur la comète observée par M. Pogson en 1872. (219-224).

M. Bruhns conclut de ses calculs que la comète observée par M. N. Pogson à Madras, le 3 décembre 1872, est une comète nouvelle sans rapport avec la comète de Biela ou l'averse des étoiles filantes du 27 novembre de cette année.

Tebbutt (*J.*). — Observations de la comète d'Encke, faites en 1875 à Windsor (N.-S.-W). (223-224).

Knorre (*V.*). — Observations de comètes et de planètes, faites en 1873 et 1874 à l'équatorial de Berlin. (225-236).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Sur la variabilité de l'étoile nébuleuse *i* d'Orion. (235-238).

Knorre (*V.*). — Éléments et éphéméride de (141). (239-240).

Plath (*C.-W.*). — Éléments et éphéméride de Tolosa (138) pour l'opposition de 1875. (241-246).

Strasser (*G.*). — Observations de planètes, faites en 1875 à Kremsmünster. (249-254).

Stark (*J.-E.*). — Éphéméride pour l'opposition d'Hécate (100) en 1875-1876. (253-254).

Bossert (*J.*). — Éléments et éphéméride de (140). (255-256).

Zöllner (*F.*). — Mémoire sur la constitution physique des comètes, 1re Partie. (256-306).

Van de Sande-Bakhuyzen (*E.-F.*). — Observations de planètes et de comètes, faites de 1873 à 1874 à Leide. (307-320).

Davis (*C.-H.*). — Observations des satellites de Neptune, Uranus et Sirius, faites en 1875 à Washington.

Ces observations ont été faites par MM. Newcomb, Hall et Holden, à l'équatorial de 26 pouces (65 centimètres) d'ouverture.

Hall (*A.*). — Note sur la détermination de la masse de Mars par les observations de petites planètes. (327-334).

M. Hall a calculé, d'après des formules analogues à celles de la *Mécanique céleste*, les coefficients des perturbations périodiques que Mars produit dans la longitude des astéroïdes. D'après la grandeur de ceux de ces termes qui dépendent des premières puissances de l'excentricité, il trouve que Massalia, Echo, Béatrix et Peitho sont les planètes dans lesquelles ces perturbations sont les plus sensibles et dont les observations sont les plus propres à donner, par un calcul inverse, la grandeur de la masse de Mars.

Hall (*A.*). — Observations de Flore, faites à Washington pendant l'opposition de 1874. (333-336).

Watson. — Découverte de la planète (139), faite le 19 octobre à Ann-Arbor. (335-336).

Perrotin. — Découverte de la planète (149), faite à Toulouse le 21 septembre (335-336).

Burnham (*S.-W.*). — Catalogue de 90 nouvelles étoiles doubles. (337-350).

Starck (*J.-E.*). — Nouveaux éléments d'Hécate (100). (349-350).

Groneman (*H.-J.-H.*). — Nouvelles recherches sur la théorie des aurores polaires. (353-368).

Aguilar. — Observations méridiennes d'Uranus, de Neptune et des petites planètes, faites à l'Observatoire de Madrid en 1873. (369-378).

Doberck (*W.*). — Éléments de 44 du Bouvier (377-380).

Palisa (*J.*). — Découverte de la planète (151), faite à Pola le 1er novembre. (381-382).

Henry (*Paul*). — Découverte de la planète (152), faite à Paris le 2 novembre. (381-382).

Palisa (*J.*). — Découverte de la planète (153), faite à Pola le 2 novembre (381-382).

Henry (*Prosper*). — Découverte de la planète (154), faite à Paris le 6 novembre (381-382).

Palisa (*J.*). — Découverte de la planète (155), faite à Pola le 8 novembre (381-382).

Palisa (*J.*). — Observations de (136), (150), (151) et (153). (381-382).

Bruhns (*C.*). — Observations de (142) à Leipzig. (383-384).

Tome LXXXVII, nos 2065-2088; 1876.

Schönfeld (*E.*). — Sur les variations d'éclat des étoiles variables. (1-34).

Le Mémoire de M. Schönfeld est le résumé d'études poursuivies depuis 1865 et s'applique à 119 étoiles, pour chacune desquelles il fait connaître la période de variation et l'époque des derniers maxima ou minima.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations sur la grande comète de 1874. (33-48).

Ce sont des observations sur l'apparence physique de la comète et la direction de la Chevelure.

Palisa. — Découverte de la planète (158), faite à Pola le 22 novembre 1875. (47-48).

Vogel (*H.-C.*). — Sur la visibilité des satellites d'Uranus dans les lunettes de moyenne grandeur. (49-56).

Schiaparelli (*J.-V.*). — Note sur le principe de la moyenne arithmétique. (55-58).

Par des considérations fondées sur l'existence de conditions pratiquement inséparables de la nature des quantités obtenues par l'observation, le savant directeur de l'Observatoire de Brera démontre que la moyenne arithmétique donne le seul résultat plausible qu'on peut déduire d'un système d'observations ayant toutes le même poids, sans tenir compte de l'accord plus ou moins grand de chaque observation avec les autres. Lorsque la loi de probabilité des erreurs est la loi exprimée par la fonction exponentielle de Gauss, le résultat plausible est aussi le résultat le plus probable.

Hornstein (*C.*). — Observations des petites planètes faites à Prague en 1875. (57-60).

Tisserand. — Éclipses des satellites de Jupiter observées à Toulouse en 1874-1875. (59-64).

Bossert (*J.*). — Éléments et éphéméride de (152). (63-64).

Borrelly. — Découverte de (157), faite à Marseille le 1er décembre 1875. (63-64).

Rogers (*W.-A.*). — Ascensions droites des étoiles fondamentales observées, en 1872-1873, au cercle méridien de Harvard College. (65-86).

La liste publiée par M. Rogers comprend 373 étoiles, dont 148 ont une déclinaison nord plus grande que 60 degrés et dont 93 ont pu être observées à leurs deux culminations. Les observations employées à la formation du catalogue sont au nombre de 4000 environ et ont été obtenues de juin 1872 à décembre 1873.

Helmert. — Note sur la méthode indiquée par M. Galle, pour le calcul de la hauteur des aurores polaires (85-90).

Tebbutt (*J.*). — Observations des occultations des satellites de Jupiter en 1875. (91-92).

Luther (*Rob*). — Observations de petites planètes faites à Düsseldorf pendant le deuxième semestre de 1875. (91-94).

Stephan (*E.*). — Observations et éphéméride de la planète (157). (95-96).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations des étoiles variables U, W et X du Sagittaire, faites à Athènes de 1866 à 1875. (97-112).

Fabritius (*W.*). — Sur une méthode rigoureuse pour le calcul des positions des circumpolaires. (113-119).

Metzger (*E.*). — Mesure d'une base trigonométrique dans l'ouest de Java. (119-122).

Weiss (*E.*). — Note sur l'orbite de la comète de 1873, VII. (121-124).

M. Weiss cherche à identifier la comète découverte le 10 novembre 1873 par M. Coggia avec la première comète de 1818 observée autrefois par Pons à Marseille.

Helmert. — Note sur la nouvelle détermination de la vitesse de la lumière par M. Cornu. (123-126).

Erman (*A.*). — Variations séculaires des éléments magnétiques à Berlin. (125-128).

En comptant le temps à partir de 1800,0, les formules qui donnent l'inclinaison et la déclinaison sont

$$i = 66°33',776 + 0',020622(t - 104,60)^2,$$
$$\delta = 18° 5',89 - 0',068665(t - 1,9678)^2.$$

Ces deux formules représentent très-exactement les observations.

Knorre (*V.*). — Découverte de la planète (158), faite à Berlin le 4 janvier 1876. (127-128).

Fabritius (*W.*). — Note sur le calcul des positions des circumpolaires. (129-134).

Schiaparelli (*J.-V.*). — Observations et orbite de l'étoile double γ de la couronne australe. (133-136).

En utilisant les observations faites de 1834 à 1875, M. Schiaparelli trouve que la période de révolution est de 55^{ans},293 et que le satellite arrivera à son périastre en 1882,5.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations des taches solaires faites en 1875 à Athènes. (135-140).

Spörer. — Note sur la corrélation des facules et des protubérances en flammes. (141-144).

Stephan (*E.*). — Observations et éléments de (157) Déjanire. (143-144).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables faites à Athènes en 1875. (145-158).

Winnecke (*A.*). — Note sur l'occultation des Pléiades par la Lune. (159-160).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur les variations d'éclat de *u* d'Hercule. (161-166).

Outre une variation moyenne d'éclat, dont la période est d'environ dix jours, l'étoile considérée éprouve des variations infiniment plus rapides dont la période est d'environ $11^h 53^m$.

Metzger (*E.*). — Note sur les travaux de Géodésie astronomique faits dans les Indes hollandaises. (166-174).

Kühnert (*F.*) — Éléments et éphéméride de Hilda (153) pour l'opposition de février 1876. (173-176).

Henry (*Paul*). — Découverte de la planète (159), faite à Paris le 26 janvier 1876. (175-176).

Hall (*A.*). — Observations des satellites de Saturne, faites en 1875 à l'Observatoire de Washington. (177-190).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Mémoire sur les variations d'Algol. (193-206).

Par la discussion des observations faites depuis 1846, M. Schmidt trouve pour période $2^j\ 20^h 49^m$.

Dembowski. — Observations des étoiles doubles du catalogue de Dorpat. (205-208).

Lüroth (*J.*). — Note sur l'erreur probable d'un système d'inconnues déduites d'un système d'équations linéaires. (209-220).

Davis (Amiral *C.-H.*) — Observations de petites planètes faites en 1874 à Washington. (219-224).

Kowalczyk. — Orbite de la comète 1840, II. (225).

M. Kowalczyk a repris la discussion des 175 observations faites en Europe du

25 janvier au 25 mars, et cherché l'orbite qui représente le mieux leur ensemble les lieux normaux employés ont été au nombre de 10.

Dembowski. — Observations d'étoiles doubles du catalogue d Dorpat. (233-238).

Knorre (V.). — Découverte de la planète (100) faite à Berlin l 25 février 1876. (239-240).

Davis (Amiral C.-H.). — Note sur le compagnon de Procyon (241-246).

Depuis l'installation, en 1873, d'un équatorial de 26 pouces d'ouverture à l'Ob servatoire de Washington, MM. Newcomb et Holden ont étudié Procyon dans l but de découvrir le compagnon que la théorie avait indiqué à M. O. Struve; ni l'u ni l'autre n'ont réussi à observer le compagnon que le Directeur de Poulkova avai cru apercevoir le 19 mars 1873; mais ils ont pu en découvrir deux autres, qui s trouvent à une distance de 6 à 10 secondes de l'étoile principale.

Meyerstein (M.). — Note sur la construction de l'héliotrope d Gauss. (245-253).

Dembowski. — Observations des étoiles doubles du catalogue d Dorpat. (253-270).

Peters (C.-H.-F.). — Observations de la planète (100) faites à Clin-ton. (271-272).

Zöllner (F.). — Second Mémoire sur la constitution physique de comètes. (273-340).

Dembowski (St.). — Observations d'étoiles doubles. (339-348).

Stone (O.). — Observations de trois des satellites de Saturne faites en 1875 à l'Observatoire de Cincinnati. (347-350).

Klinkerfues (W.). — Note sur une lunette terrestre de nouvell construction. (349-352).

Palisa (J.). — Observations de planètes et de comètes faites e 1874 et 1875 à l'Observatoire de Pola. (353-360).

Lampe (E.). — Note sur les formules de Bessel pour le calcul d erreurs périodiques d'une vis. (359-366).

Gericke (H.). — Observations de petites planètes, faites en 18 à Leipzig. (365-368).

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes, faites en 1875 à Leipzig. (369-376).

Tebbutt (*J.*). — Occultations d'étoiles par la Lune, observées à Windsor (N.-S.-W.) en 1873, 1874 et 1875.

Franz (*J.*). — Comparaison des éphémérides d'étoiles du *Nautical Almanac* avec les observations faites en 1874 et 1875 à Neuchâtel.

Tome LXXXVIII, nos 2089-2112; 1876.

Moesta (*C.-W.*). — Comparaison des observations d'étoiles australes faites à Santiago avec les positions des catalogues de Johnson et de Taylor. (1-16).

Watson. — Découverte de la planète (161), faite à Ann-Arbor le 19 avril 1876. (15-16).

Becker (*E.*). — Observations de planètes, faites en 1875 à l'équatorial de Berlin. (17-32).

Henry (*Prosper*). — Découverte de la planète (162), faite à Paris le 21 avril 1876. (31-32).

Perrotin. — Découverte de la planète (163), faite à Toulouse le 26 avril 1876. (31-32).

Knorre (*V.*). — Observations de comètes et de planètes, faites en 1874 et 1875 à l'équatorial de Berlin. (33-44).

Doberck (*W.*). — Éléments de η Cassiopée. (45-48).

Schulhof (*L.*). — Observations de planètes, faites en 1875 à l'équatorial de Vienne. (49-62).

Stone (*E.-J.*). — Observations sur une Note de M. Schiaparelli, relative au principe de la moyenne arithmétique. (61-64).

C'est une réclamation de priorité relativement à un des axiomes employés par M. Schiaparelli dans sa démonstration donnée à la page 35 du tome LXXXVII des *Astronomische Nachrichten.*

Pechüle (*C.-F.*). — Sur une méthode de mesures héliométriques à effectuer pendant un passage de Vénus. (65-70).

Holetschek (*J.*). — Observations de planètes, faites en 1875 au cercle méridien de Vienne.

Strasser (*G.*). — Observations de planètes
méridien de Kremsmünster. (73-76).

Kirkwood (*D.*). — Note sur une relatior
entre les moyens mouvements des gross

Si n^{I}, n^{II}, n^{III}, n^{IV}, … représentent les mo
Vénus, etc., en une année julienne, on a, entre ces
tions suivantes :

$$13n^{I} + 93n^{II} - 98n^{III} - 238n^{IV} + 227n^{V} + 8$$
$$68n^{V} - 145n^{VI} - 219n^{VII} + 29$$

dans lesquelles la somme algébrique des coefficient

Fischer (*A.*). — Note sur la forme de la
de la longueur du pendule à seconde. (8

Par le calcul des variations qu'éprouve avec la lat
seconde, variation qui dépend de la grandeur de l'a
qu'il n'y a pas de contradiction entre la forme de la
désiques de méridiens et la forme conclue des obs
rences entre les longueurs théoriques et pratiques
attribuées à des effets d'attraction locale résultant
particulière du sol de certaines stations.

Jordan (*W.*). — Note sur la théorie de
(99-108).

Doberck (*W.*). — Éléments de ω du Lion

Le calcul est fondé sur les observations faites de

Krueger (*A.*). — Observations, à Helsin
de Vénus et de λ des Gémeaux. (111-11

Helmert. — Note sur l'exactitude de la
M. Peters pour le calcul de l'erreur
d'égale exactitude. (113-132).

Hall (*A.*). — Observations des satellites
Sirius, faites en 1875 et 1876 à l'équa
Washington. (131-138).

Spörer. — Sur la réfraction de la lumièr
Soleil. (139-142).

Luther (*R.*). — Éléments de Melete (56)
observations de 1861 à 1876. (141-142).

Luther (*R.*). — Observations de petites planètes, faites en 1876 à l'Observatoire de Düsseldorf. (143-144).

Marth (*A.*). — Éphémérides des satellites de Saturne pour l'année 1876. (145-178).

Lampe (*E.*) — Note sur la formule donnée par Bessel pour le calcul des observations micrométriques. (179-182).

Weiss (*E.*). — Note sur l'estime de la grandeur des astéroïdes. (181-184).

Holden (*F.-S.*) — Comparaison des observations du satellite de Neptune, faites à Washington, avec les Tables de M. Newcomb. (183-188).

Il résulte de cette comparaison que la masse de Neptune, supposée par M. Newcomb de $\frac{1}{19,380}$, devrait être un peu augmentée et portée à $\frac{1}{18,520}$.

Henry (*Paul*). — Découverte de la planète (161), faite à l'Observatoire de Paris le 12 juillet 1876. (189-190).

Oppenheim (*H.*). — Observations de planètes, faites au cercle méridien de Königsberg de 1871 à 1875. (193-200).

Doberck (*W.*). — Comparaison des observations de μ^2 du Bouvier, τ d'Ophiuchus, γ du Lion, 44 du Bouvier et η de Cassiopée, avec les éléments de ces mêmes étoiles. (199-202).

Hann (*J.*). — Observations sur le Mémoire de M. A. Fischer relatif aux observations de la longueur du pendule à diverses latitudes. (202-208).

Schur (*W.*) — Éléments définitifs de la comète 1847, IV. (209-220).

L'auteur a tenu compte des 48 observations de la comète faites dans les divers observatoires d'Europe du 8 septembre au 28 novembre 1847.

Bredikhine (*Th.*). — Note sur la position de la queue de la comète 1874, III (comète de Coggia.) (219-222).

M. Bredikhine trouve que la queue était située dans le plan de l'orbite, et était précédée dans son mouvement par le prolongement du rayon vecteur.

Copeland (*Ralph*). — Observations méridien[illegible] petites planètes, faites en 1875 à l'Observatoire [illegible] 4).

Rogers (*W.-A.*). — Nouveaux éléments et éphéméride de Brunhilda (123) pour l'opposition d'août 1876. (223-224).

Peters (*C.-H.-F.*) — Découverte de la planète (165), faite à Clinton le 10 août 1876. (223-224).

Burnham (*S.-W.*). — Septième catalogue d'étoiles doubles. (225-230).

Les 45 étoiles de ce catalogue ont été découvertes, en 1875 et 1876, à l'aide de l'équatorial de 6 pouces, que M. Burnham a installé dans son Observatoire de Chicago.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations sur les étoiles variables, faites en 1876 à Athènes. (229-234).

Doberck (*W.*). — Éléments de σ de la Couronne boréale. (233-236).

Gericke (*H.*). — Observations de petites planètes, faites à Leipzig en 1876. (237-238).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (166), faite à Clinton le 10 août 1876. (239-240).

Bruhns (*C.*). — Observations de la planète (165), faites à Leipzig. (239-240).

Knorre (*V.*). — Observations de petites planètes, faites en 1876 à l'équatorial de 9 pouces de l'Observatoire de Berlin. (241-248).

Fischer (*A.*). — Réponse aux observations du Dr Hann, à son Mémoire sur la forme de la Terre. (247-252).

Bredikhine. — Note sur la queue normale de la comète 1862, II. (253-256).

Peters (*C.-H.-F.*). — Découverte de la planète (167), faite à Clinton le 29 août 1876. (255-256).

Powalky (*C.*). — Mémoire sur la détermination des éléments de l'ellipse solaire et des masses de Vénus et de Mars, par la comparaison des Tables de Hansen-Olufsen, avec les observations faites à Dorpat par W. Struve et Preuss de 1823 à 1829. (257-276).

Spörer. — Observations des taches solaires en 1875. (275-280).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations des planètes (165), (166), (167) faites à l'Observatoire de Clinton. (281-282).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Sur la position de la nouvelle étoile variable de la Couronne australe. (283-284).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double Σ 2344. (285-286).

Tebbutt (*J.*). — Occultation de α Vierge et de α Scorpion, observées à Windsor (N.-S.-W.). (287-288).

Doberck (*W.*) — Éléments de λ Ophiuchus. (287-288).

Peters (*C.-H.-F.*). — Éléments elliptiques et éphéméride de Vibilia (144) pour l'opposition de décembre 1876. (289-294).

Henry (*Prosper.*). — Découverte de la planète (169), faite à Paris le 28 septembre 1876. (295-296).

Watson. — Découverte de la planète (168), faite à Ann-Arbor le 28 septembre 1876. (295-296).

Davis (Amiral *C.-H.*). — Occultation de Saturne observée à Washington les 6 août et 2 septembre 1876. (297-298).

Doberck (*W.*). — Orbite circulaire de ξ de la Balance. (297-298).

Hann (*F.-J.*). — Réponse à M. A. Fisher relativement à la détermination de la forme de la Terre par les observations du pendule. (305-308).

Winnecke (*A.*). — Observations des satellites de Jupiter et des occultations par la Lune faites à Strasbourg en 1876. (306-314).

Austin (*E.-S.*). — Corrections à l'éphéméride d'Antigone (129) pour l'opposition de 1876. (315-316).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de l'occultation des Pléiades à l'Observatoire de Kiel.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Mémoire sur les météores. (321-384).

La discussion des observations faites à Athènes de 1859 à 1876 conduit M. Schmidt aux conclusions suivantes :

1° Pour un observateur isolé, la moyer[illegible] [illegible]elle du nombre des météores est 10;

2° Le maximum de fréquence a[illegible]

3° L'époque où le nombre horaire des météores est égal à la [illegible] annuelle est $11^h 15^m$ du soir;

4° En négligeant l'averse des météores périodiques de novembre, [illegible] étoiles filantes s'observe en février et le maximum en août;

5° De janvier au commencement de juillet, le nombre horaire [illegible] filantes est inférieur à 7; il augmente ensuite, et offre deux [illegible] août; en septembre, il est à peu près égal à la moyenne, et diminue [illegible] les trois mois suivants;

6° La durée de l'apparition est variable suivant la couleur des [illegible] est de :

$0^s,746$ pour les blanches,
$0^s,983$ pour les jaunes,
$1^s,627$ pour les rouges,
$1^s,973$ pour les verts.

Le Verrier. — Note sur les planètes intra-mercurielles. [illegible] 352).

Bruhns (C.). — Observations de petites planètes, faites [illegible] l'Observatoire de Leipzig. (353-358).

Bruhns (C.). — Observation à Leipzig de l'éclipse partielle [illegible] Lune du 3 septembre 1876. (357-360).

Knorre (V.). — Occultation des Pléiades, observée à Berlin [illegible] 6 octobre 1876. (359-362).

Gruber (L.). — Sur le mouvement de l'étoile double [illegible] siopée. (361-364).

Klein (H.-J.) — Sur les variations périodiques de la [illegible] de la Grande Ourse. (363-366).

Il résulte des observations anciennes de M. Klein et des [illegible] M. H. Weber que, dans un intervalle d'environ 35 jours, la [illegible] Grande Ourse passe périodiquement du rouge au jaune orange.

Zollner (F.). — Mémoire sur la mesure, en masse [illegible] l'électricité atmosphérique. (369-378).

Tome LXXXIX, n°s 2113-2136; 18[illegible].

Stebnitzky (Major *J.*). — Note sur la position géographique [illegible] l'altitude de Téhéran. (1-8).

Le major général Stebnitzky, chargé d'observer à Téhéran le dernier passage [illegible] Vénus devant le Soleil, a dû, afin de rendre son observation utilisable, fixer la [illegible]sition géodésique de la station.

La latitude du centre de la station télégraphique, mesurée à l'aide d'un cercle vertical de Repsold de 11 pouces anglais de diamètre, a été trouvée de $35°41'6'',83$.

La longitude du même point à l'ouest de Greenwich, déterminée par les signaux galvaniques, a été fixée à $3^h 25^m 41^s,70$.

Quant à l'altitude, elle est de 1132 mètres au-dessus de la mer Noire.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Sur une étoile nouvelle dans le Cygne. (9-14).

La nouvelle étoile temporaire, vue par M. Schmidt le 24 novembre 1876, est un peu à l'ouest de ρ du Cygne; sa couleur est rougeâtre et son éclat égale celui d'une étoile de 3e grandeur.

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*) — Observations méridiennes de planètes faites, en 1874 et 1875, au cercle méridien de Leide. (17-24).

Bredikhine (*Th.*). — Note sur la queue de la comète de 1862, II. (23-28).

Les conclusions de M. Bredikhine sont les suivantes :

Jus u'au commencement d'août, la queue a été régulière; les éruptions qui se sont développées à cette époque ont produit la queue anormale. La réaction des éruptions sur le noyau allongé a causé une déviation de sa partie tournée vers le Soleil, et la partie antérieure de la queue a pris la forme d'un S. Par suite de cette action indéfiniment répétée, et de l'action directrice du Soleil, le noyau allongé a pris un mouvement oscillatoire autour d'une ligne passant par son centre de gravité et dirigée en arrière du Soleil. Ces oscillations ont produit un entrelacement périodique des parties de la queue. Ces diverses actions ont cessé vers les premiers jours de septembre et, le 5, la comète avait repris une forme normale.

Jordan (*W.*). — Sur l'erreur moyenne des mesures d'angles dans la méthode de triangulation de Bessel. (27-30).

Galle (*J.-G.*). — Occultation des Pléiades, observée à Breslau le 6 octobre 1876. (31-32).

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — Observations de planètes et de comètes, faites en 1873 et 1875 à l'équatorial de 6 pouces de l'Observatoire de Leide. (33-38).

Vogel (*H.*). — Note sur le spectre de l'étoile nouvelle découverte dans le Cygne par M. Schmidt. (37-40).

Le spectre se compose d'un grand nombre de lignes brillantes.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur les variations d'éclat de la nouvelle étoi[illegible]

Doberck (*W.*). — Éléments elliptiques de ζ Balance. (135-136).

Ces éléments sont déduits d'observations faites de 1782 à 1848 par Herschel, W. Struve, Dawes, Mädler, etc.

Geelmuyden (*H.*) — Additions aux catalogues d'étoiles colorées de Schjellerup et Secchi. (137-138).

Gasparis (*A. de*). — Note sur le problème de Kepler. (139-140).

M. de Gasparis indique un moyen pratique rapide de trouver une valeur très-approchée de la racine de l'équation $M = E - e'' \sin E$.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur l'étoile variable χ du Cygne. (141-142).

Powalky (*C.*).— Correction des éléments de Clytia (73). (142-144).

Winnecke. — Longitude de l'Observatoire provisoire de l'Université de Strasbourg. (145-150).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Étoiles variables observées en 1876 à Athènes. (151-170).

Tupman (*G.-L.*). — Observations de la comète 1877, I, faites à Greenwich. (169-170).

Konkoly (*N. v.*). — Spectre de la comète 1877, I. (169-172).

Doberck (*W.*). — Éléments de γ Couronne. (171-172).

Spörer. — Observations de taches solaires et de protubérances, faites en 1876 à Anclam. (173-178).

Winnecke. — Comète 1877, II, découverte à Strasbourg le 5 avril 1877. (179-180).

Porter (*J.-G.*). — Éphéméride de Una (160) pour l'opposition de 1877. (181-182).

Powalky. — Corrections aux ascensions droites des étoiles observées au Cap par La Caille. (183-204).

Valentiner (*W.*), *Peters* (*C.-F.-W.*), *Klinkerfues* (*W.*) et *Knorre* (*V.*). — Observations de la comète 1877, II, faites à Mannheim, Kiel, Göttingue et Berlin. (203-206).

Borrelly. — Comète 1877, III, découverte à Marseille le 14 avril. (205-206).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la comète 1877, II, à Kiel. (257-258).

Doberck (*W.*). — Éléments de ξ du Bouvier. (259-262).

Ces éléments sont déduits de l'ensemble des observations faites de 1782 à 1877.

Stephan (*E.*). — Catalogue de 30 nébuleuses nouvelles découvertes à l'Observatoire de Marseille. (263-266).

Plath (*C.-W.*).— Éléments et éphémérides des comètes 1877, II, et 1877, III. (265-270).

Strasser (*G.*). — Observations équatoriales de comètes et de planètes faites en 1876 à Kremsmünster. (269-272).

Oppolzer (*Th. v.*). — Remarques sur la méthode d'Encke pour le calcul des perturbations. (273-280).

Howe (*H.-A.*). — Éléments de Zélia (169). (279-280).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Taches solaires observées à Athènes en 1876. (281-286).

Tupman (*G.-L.*) — Observations de la comète 1877, II, faites à Greenwich. (287-288).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la comète 1877, III, faites à Kiel. (287-288).

Strasser (*G.*). — Observations méridiennes de planètes faites en 1876 à Kremsmünster. (289-292).

Pritchett (*C.-W.*). — Observations des conjonctions des satellites de Saturne faites en 1876 à Glasgow (Missouri). (293-296).

Todd (*D.-P.*). — Observations des éclipses de satellites de Jupiter faites en 1871 et 1876 à Amherst (Washington). (295-302).

Holetschek (*J.*). — Observations méridiennes de petites planètes, faites à Vienne en 1876. (301-304).

Albrecht. — Note sur le degré d'exactitude des différences de longitudes déterminées par le télégraphe. (305-316).

Depuis 1863, il a été fait en France, par les soins de l'Observatoire de Paris, et en Allemagne, sous la direction de l'Association géodésique internationale, de nombreuses déterminations électriques de différences de longitudes. Ces opérations ont

d'ailleurs été conduites de telle sorte que deux stations, reliées entre elles directement, sont aussi reliées entre elles par une ou plusieurs stations intermédiaires. L'ensemble du travail se prête donc à une sorte de vérification générale qui résulte précisément de ces liaisons multiples de deux stations, liaisons que l'on peut traduire en un certain nombre d'équations de condition, ayant chacune un poids particulier. Ces séries d'équations ont été formées par M. Albrecht, et leur solution l'a conduit au tableau suivant, qui renferme la comparaison des différences de longitudes trouvées par l'observation et calculées :

	Calcul.	Observation.	C — O.
	m s	m s	s
Strasbourg-Paris.........	— 21.43,620	— 21.43.560	— 0,060
Strasbourg-Mannheim ...	+ 2.45,792	+ 2.45,792	0,000
Strasbourg-Bonn.........	— 2.41,434	— 2.41,445	+ 0,011
Strasbourg-Berlin........	+ 22.30,196	+ 22.30,227	— 0,031
Strasbourg-Vienne.......	+ 34.16,548	+ 34.16,541	+ 0,007
Strasbourg-Munich.......	+ 15.21,451	+ 25.21,413	+ 0,038
Paris-Vienne.............	+ 56. 0,168	+ 56. 0,22	— 0,052
Paris-Bregenz...........	+ 29.45,352	+ 26.45,28	+ 0,072
Mannheim-Bonn.	— 5.27,226	— 5.27,227	+ 0,001
Mannheim-Leipzig.......	+ 15.43,480	+ 15.43,481	— 0,001
Bonn-Leide..............	— 10.26,947	— 10.26,955	+ 0,008
Bonn-Leipzig............	+ 21.10,706	+ 21.10,69	+ 0,016
Leide-Leipzig............	+ 31.37,653	+ 31.37,629	+ 0,024
Göttingue-Brocken.......	+ 2.42,163	+ 2.42,220	— 0,057
Göttingue-Berlin.........	+ 13.48,617	+ 13.48,560	+ 0,057
Brocken-Leipzig..........	+ 7. 5,530	+ 7. 5,587	— 0,057
Leipzig-Berlin............	+ 4. 0,924	+ 4, 0,895	+ 0,029
Leipzig-Vienne...........	+ 15.47,276	+ 15.47,14	+ 0,136
Leipzig-Munich...........	— 3. 7,821	— 3. 7,735	— 0,086
Berlin-Vienne............	+ 11.46,352	+ 11.46.25	+ 0,102
Vienne-Munich...........	— 18.55,098	— 18.55,128	+ 0,030
Vienne-Bregenz..........	— 26.14,816	— 26.14,78	— 0,036

A deux ou trois exceptions près, les résultats sont des plus satisfaisants et montrent toute l'exactitude des méthodes employées.

Schiaparelli (*J.-V.*). — Mesures micrométriques des étoiles doubles les plus importantes. (317-328).

Les étoiles choisies par M. Schiaparelli sont celles de la *Preliminary List of binary and other interesting double stars*, publiée par MM. Wilson et Gledhill dans les *Monthly Notices* de décembre 1876, auxquelles ont été ajoutées quelques autres étoiles dignes d'être considérées à cause de leurs mouvements propres. L'instrument employé est un excellent équatorial de Merz, de 218 millimètres d'ouverture libre, qui supporte facilement un grossissement de 690 fois.

Les étoiles jusqu'ici observées à l'Observatoire de Brera sont au nombre de 140 environ ; leur distance a été en moyenne déterminée dans quatre à cinq nuits différentes.

Plath (*C.-W.*). — Suite de l'éphéméride de la comète 1877, II. (329-330).

müller (F.) — Note sur le passage de Vénus en 1822. (329-).

Deichmüller a calculé, d'après la méthode de M. Oppolzer, les circonstances ssage pour le centre de la Terre et les principaux points où des stations seront doute établies.

nd (J.-J.). — Sur une transformation des équations de la ne $x^n - ax \pm b = 0$. (347-350).

(J.-G.). — Note sur l'historique de la découverte de Nepe. (349-352).

as (C.). — Observations équatoriales de petites planètes es à Leipzig en 1876. (353-364).

lzer (Th. v.). — Note sur une nouvelle formule de la réfrac. (365-366).

ke (H.). — Observations de planètes faites en 1876 au mimètre circulaire de l'Observatoire de Leipzig. (369-370).

er (Ax.). — Calcul des perturbations de Pandore. (371-382).

Tome XC, n°s 2137-2160; 1877.

er (Ax.). — Calcul des perturbations de Pandore. (1-6).

(A.). — Éléments d'Hypérion et éphéméride pour son ob-vation en 1877. (7-12).

s observations de ce satellite de Saturne sont toujours très-difficiles, et n'ont, en ral, été faites que pendant ses élongations, ce qui laisse une grande indétertion sur le plan de son orbite. M. A. Hall, qui a soigneusement observé cet en 1875, a néanmoins calculé, dans l'hypothèse où le plan de son orbite coïnavec celui de l'anneau de Saturne, une éphéméride qui sera utile pour la réon des observations faites en août et septembre 1877 pendant l'opposition de anète.

a (J.). — Observations de la comète 1877, II, faites à Pola. -16).

Latitude............ 43°45′14″,4
Longitude.......... 11°15′47″,0 est de Greenwich.

nley (C.). — Sur les variations de R du Dragon. (15-16).

muyden (H.). — Observations des comètes 1877, II, et 1877, , faites à Christiania. (17-20).

Powalky. — Catalogue pour 1830,0 des étoiles observées au Cap par la Caille en 1751 et 1752. (21-28).

Tempel (*W*.). — Note sur la position géographique et les principaux instruments de l'Observatoire d'Arcetri, près de Florence. (27-42).

Karlinski. — Observations équatoriales de petites planètes faites en 1866 et 1867 à l'Observatoire de Cracovie. (41-58, 65-72, 81-84).

Doberck (*W*.). — Note sur les méthodes de calcul de l'orbite des étoiles doubles. (57-64).

Spörer. — Note sur une protubérance remarquable observée à Potsdam du 17 au 20 juin 1877. (63-64).

Vogel (*H.-C*.). — Note sur l'influence de la rotation d'une étoile sur son spectre. (71-76).

Gill (*D*.). — Catalogue des étoiles à observer en même temps que Mars pendant l'opposition de 1877. (75-80).

Schmidt (*J.-F.-J*.). — Observation des comètes 1877, II, et 1877, III, faites à Athènes. (83-84).

Eastman (*J.-R*.). — Observations méridiennes de la comète 1877, II, faites à Washington. (85-86).

Upton (*Winslow*). — Éléments de Eva (164), d'après les observations de 1876. (85-86).

Tempel, *Coggia* et *Kirkwood*. — Observations de la comète périodique de d'Arrest. (87-88).

Leveau (*G*.). — Éléments et éphéméride de la comète périodique de d'Arrest pour son retour en 1877. (87-92).

Spörer. — Observation des taches solaires en 1877. (91-96).

Becker (*E*.). — Calcul des perturbations de la comète d'Encke par Saturne. (97-110).

Wierzbicki. — Observations des comètes 1877, II, et 1877, III, à l'Observatoire de Cracovie. (109-112).

***Sadebeck* (*M.*). — Note sur l'influence des déviations du fil à plomb sur les mesures d'angles. (113-118).**

***Strasser* (*G.*). — Observations de petites planètes faites en 1876 à l'équatorial de Kremsmünster. (119-121).**

***Palisa* (*Alois*). — Observations de planètes et de comètes, faites en 1876 et 1877 à l'équatorial de Vienne. (121-128).**

***Hall* (*A.*). — Observations des satellites de Saturne faites en 1876 à l'équatorial de 26 pouces de l'Observatoire de Washington. (129-138).**

***Borrelly.* — Observations de la planète (173), découverte à Marseille le 2 août 1877. (137-138).**

***Schmidt* (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète 1877, II, faites à Athènes. (139-144).**

***Hall* (*A.*). — Mémoire sur la rotation de Saturne. (145-150).**

Herschel avait trouvé, en 1794, pour la rotation de cette planète, $10^h 16^m 0^s,4$. M. Hall trouve, à l'aide d'une tache brillante qui a été suivie en Amérique du 7 décembre 1876 au 2 janvier 1877, $10^h 14^m 23^s,8$, avec une incertitude probable de $2^s,30$.

***Hall* (*A.*). — Note sur l'apparence de l'anneau de Saturne. (151-154).**

Ce sont des remarques sur le dessin de Saturne fait en 1875 par M. Trouvelot, dessin qui indique des accidents que M. A. Hall n'a pas remarqués en 1876.

***Pechüle* (*C.-F.*). — Observations des comètes 1877, I, 1877, II, et 1877, III, au grand équatorial de Copenhague. (153-158).**

***Upton* (*Winslow*). — Observations de la comète 1877, II, à l'Observatoire de Cincinnati. (157-158).**

***Hall* et *Holden* (*E.-S.*). — Observations du satellite de Neptune, des satellites d'Uranus et du compagnon de Sirius, faites en 1876 et 1877 à l'équatorial de 26 pouces de l'Observatoire de Washington. (161-166).**

***Schmidt* (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète de d'Arrest. (165 à 166, 173 à 174 et 191 à 192).**

***Holden* (*E.-S.*). — Observations des comètes 1877, I, et 1877, III, à l'équatorial de 26 pouces de Washin[illegible] (167-172).**

Möller (*Ax.*). — Éphéméride de Pandore pour l'opposition de 1877. (171-172).

Luther (*R.*). — Observations de planètes, faites en 1877 à Düsseldorf. (173-176).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de petites planètes et de comètes faites de 1875 à 1877 à l'Observatoire de Hamilton-College. (177-186 et 193-202).

Klein (*H.-J.*). — Note sur les observations du cratère de Linné, faites par Schröter. (185-190).

Bruhns (*C.*). — Observations de (173), faites à Leipzig. (189-190).

Hall (*A.*). — Découverte de deux satellites de Mars, faite à Washington le 18 août. (189-190).

Weinek (*L.*). — Observations méridiennes de planètes faites en 1876 à l'Observatoire de Leipzig. (203-208).

Luther (*R.*). — Éphéméride de Danaé (61) pour l'opposition de 1878. (207-208).

Engelmann (*R.*). — Note sur les apparences de la comète de 1877, II. (207-218).

Fabritius (*W.*). — Nouvelle méthode pour le calcul des hypothèses dans la détermination d'une orbite par trois observations. (217-222 et 225-230).

Schiaparelli (*J.-V.*). — Observations de la comète de d'Arrest à Milan. (223-224).

Karlinski. — Observations de petites planètes, faites en 1867 à l'équatorial de Cracovie. (229-240).

Krüss (*H.*). — Sur l'achromasie des systèmes optiques. (241-254 et 257-270).

Gruss (*G.*). — Éphéméride pour l'opposition de Lorely (165) en 1877. (255-256).

Watson. — Découverte de la planète (174), faite à Ann-Arbor le 3 septembre (255-256).

Bruhns (*C.*). — Observations de la comète 1877, III, faites à Leipzig. (269-272).

Rodgers (*J.*). — Note sur la découverte des satellites de Mars. (273-276).

Le satellite extérieur, découvert par M. A. Hall le 11 août 1877, tourne autour de la planète en $30^h 14^m$; le grand axe de son orbite est de 32″, 3.

Le satellite intérieur, découvert par le même observateur le 17 août, tourne autour de Mars en $7^h 38^m$ environ.

Marth (*A.*). — Éphéméride pour l'observation des satellites de Saturne pendant l'année 1877. (275-302).

Ginzel (*F.-K.*). — Éléments de la planète (168). (303-304).

Coggia. — Découverte de la comète 1877, IV, faite à Marseille le 13 septembre 1877. (303-304).

Hall (*A.*). — Note sur l'ombre d'une planète. (305-314).

Bruhns (*C.*). — Observations de petites planètes, faites en 1877 à Leipzig. (313-320).

Bruhns (*C.*). — Observations de la comète 1877, IV, faites à Leipzig. (313-320).

Klinkerfues (*W.*). — Éclipse de Lune du 23 août, observée à Göttingue. (321-322).

Bruhns (*C.*). — Observation de la comète 1877, II, faites à Leipzig. (323-330).

Winnecke (*A.*). — Observation de la comète 1877, IV, faite à Vienne. (329-330).

Holden (*E.-S.*). — Observations de la comète 1877, II, faites à l'équatorial de 26 pouces de Washington. (331-336).

Eastman (*J.-R.*). — Observations méridiennes de petites planètes, faites en 1875 à Washington. (337-344).

Strasser (*G.*). — Observations des comètes, 1877, II, et 1877, III, faites à Kremsmünster. (347-350).

Holetscheck (*J.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète 1877, IV. (349-352).

Morozowicz (Général *v.*). — Note sur l'influence des ... de la verticale dans les mesures d'angle. (353-358).

Neugebauer (*P.*). — Éphémérides de Proserpine et ... pour les oppositions de 1878 et 1879. (359-362).

Winnecke (*A.*). — Observations de petites planètes faites ... à l'Observatoire de Strasbourg. (361-366).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations à Athènes de la comète ... riodique de d'Arrest. (367-368).

Weiler (*A.*) — Note sur l'accélération séculaire du mouve... vement de la Lune. (369-382).

Tempel (*W.*). — Comète de 1877, V, découverte à Arcetri le ... tobre 1877. (381-382). G. A.

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB. Udgivet af Sophus Lie, ... MÜLLER og G.-O. SARS. Kristiania (¹).

Tome I; 1876.

Lie (*S.*). — Théorie des groupes de transformation. (19-57 ... 193; all.).

Section I. Groupes de transformation d'une variété à une seule dimens... § 1. Développements préliminaires. § 2. Les groupes d'un seul terme. § ... rèmes sur les groupes de deux termes. § 4. Forme générale des groupes ... termes. § 5. Détermination plus simple des groupes de deux termes. § ... rèmes sur les groupes de trois termes. § 7. Forme générale des groupes ... termes. § 8. Solution du problème proposé.

1. Dans le tome 1 du *Journal de Crelle*, Abel cherche la fonction ... $f(x, a)$ la plus générale qui satisfasse à l'équation

$$f[f(x, a), b] = f[x, f(a, b)].$$

Abel trouve que la fonction cherchée est déterminée par la formule

$$f(x, a) = \theta_1(\theta x + \theta a + c),$$

(¹) *Archives des Sciences mathématiques et naturelles*, publiées par S. ... *Müller* et *G. O. Sars*. Christiania. Publié par fascicules in-8, dont quatre ... un volume. Principalement en langue norvégienne. Nous mentionnerons ... les travaux mathématiques.



c étant une constante, et θ et θ_1 désignant des fonctions quelconques inverses l'une de l'autre.

La fonction $f(x, a)$ la plus générale qui satisfasse à une équation de la forme

$$f[f(x, a), b] = f[x, \varphi(a, b)],$$

φ étant une fonction indéterminée, est donnée par la formule

$$(1) \qquad f(x, a) = \theta_1(\theta x + \psi a),$$

θ et θ_1 désignant des fonctions inverses quelconques.

Si l'on cherche la fonction $f(x, a_1, a_2, \ldots, a_r)$ la plus générale qui satisfasse à une équation de la forme

$$f[f(x, a_1, \ldots, a_r), b_1, \ldots, b_r] = f(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_r),$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ étant des fonctions indéterminées de $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r$, on trouve d'abord que r doit être moindre que 4. Pour $r = 1$, f est donné par la formule (1). Pour $r = 2$, on a

$$f(x, a_1, a_2) = \theta_1(\theta x . \psi_1 + \psi_2),$$

et, pour $r = 3$,

$$f(x, a_1, a_2, a_3) = \theta_1\left(\frac{\theta x . \psi_1 + \psi_2}{\theta x . \psi_3 + \psi_4}\right),$$

θ et θ_1 désignant toujours des fonctions inverses, et les ψ étant des fonctions arbitraires des a.

Section II. — § 1. Notions générales. § 2. Transformations infinitésimales. § 3. Théorèmes généraux sur les groupes de transformations. § 4. Relations nécessaires entre les transformations infinitésimales d'un groupe. § 5. Le groupe d'un seul terme. § 6. Un groupe est déterminé par ses transformations infinitésimales. § 7. Les transformations infinitésimales qui satisfont aux relations établies engendrent toujours un groupe. § 8. Théorèmes généraux sur les groupes mineurs. § 9 Groupes de transformations de contact. § 10. Un théorème fondamental sur une classe de groupes de transformations. § 11. Extension du théorème précédent à des groupes de transformation quelconques. § 12. Tout groupe de transformation est uniformément composé d'un groupe linéaire.

II. Les équations

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) = f_i(a)$$

déterminent une transformation entre les x_i et les x'_i. En donnant aux paramètres $a_1, \ldots, a_r$ toutes les valeurs possibles, on obtiendra ∞^r transformations. Si la succession de deux telles transformations est équivalente à une seule transformation de la même forme, on dira que ces transformations forment un *groupe de transformation*. Cette condition s'exprime par l'équation

$$f_i[f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a), b_1, \ldots, b_r] = f_i(x_1, \ldots, x_r, \varphi_1, \ldots, \varphi_r),$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ désignent des fonctions indéterminées de $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r$.

L'auteur s'est proposé le problème difficile de déterminer tous les groupes de transformation. Pour le cas $n = 1$, la solution complète de ce problème est donnée dans le Mémoire précédent. Le Mémoire présent donne des théorèmes généraux sur le cas général. La théorie des groupes de transformation a beaucoup de points de contact avec la théorie des substitutions. Ces recherches seront poursuivies.

Lie (*S.*). — **Complément de la théorie des transformations de contact. (194-202; all.).**

Lie (*S.*). — **Résumé d'une nouvelle théorie d'intégration (335-366; all.).**

Soient $f_1, \ldots, f_q$ des fonctions de $x_1, \ldots, x_r, p_1, \ldots, p_r$, qui satisfassent deux à deux à l'équation

$$(f_i, f_k) = 0,$$

et soient $f_1, \ldots, f_q, \ldots, f_r$ des solutions des équations

$$(1) \qquad (f_1, f) = 0, \quad \ldots, \quad (f_q, f) = 0.$$

Supposons que ces quantités satisfassent à une équation de la forme

$$p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n = F_1\,df_1 + \ldots + F_r\,df_r + dV;$$

$F_{q+1}, \ldots, F_r$ *seront les solutions manquantes des équations* (1). La quantité V satisfera aux équations

$$[f_1, z - V] = 0, \quad \ldots, \quad [f_q, z - V] = 0,$$

z désignant la fonction inconnue. Ayant déterminé V par une quadrature, on trouvera $F_{q+1}, \ldots, F_r$ par différentiation.

Ce théorème fondamental embrasse, comme cas particuliers, d'une part la théorie du dernier multiplicateur appliquée aux équations à différences partielles, d'autre part le théorème suivant : *Si les quantités $f_1, \ldots, f_n$, satisfaisant deux à deux à l'équation $(f_i, f_k) = 0$, sont indépendantes par rapport à $p_1, \ldots, p_n$, on pourra, par différentiation et une quadrature, trouver les $n - 1$ manquantes solutions de l'équation $(f_1, f) = 0$.*

Mais, outre cela, le théorème précédent donne les solutions manquantes des équations (1) dans une série de cas auparavant inconnus. *Combiné avec le théorème de Poisson et de Jacobi, il donne toujours les solutions manquantes, lorsque ces solutions peuvent être déterminées par des opérations exécutables*, c'est-à-dire par des quadratures et des différentiations.

Entre les conséquences importantes du théorème énoncé, on doit remarquer la suivante : *La détermination de $2m + 1$ solutions manquantes des équations* (1) *ne demande jamais des intégrations plus difficiles que la détermination de $2m$ telles solutions.* En posant $m = 0$, on retombe sur la détermination de la dernière solution par le dernier multiplicateur.

Geelmuyden (*H.*). — Influence de l'excentricité de l'orbite sur la quantité de chaleur qu'un astre reçoit du Soleil. (438-455).

Voir *Bulletin*, I_1, 333.

S. L.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, herausgegeben von Dr. O. SCHLÖMILCH, Dr. E. KAHL und Dr. M. CANTOR (¹).

Tome XXII; 1877.

Lorentz (*H.-A.*). — Sur la théorie de la réflexion et de la réfraction de la lumière. (1-30 et 205-219).

Günther (*S.*). — Nouvelle méthode de sommation directe des fractions continues périodiques. (31-37).

Harnack (*Axel*). — Sur les constructions linéaires des courbes planes du troisième ordre. (38-44).

Mohr. — Sur le radiomètre. (45-53).

Hann (*J.*). — Sur la divisibilité des nombres dans le système de numération décimale. (54-59).

Becker (*J.-C.*). — Quelques nouvelles remarques sur la démonstration, donnée par Bertrand (de Genève), de l'axiome de parallèles. (60-64).

Hagen (*J.*), S. J. — Sur la stabilité de l'équilibre d'un fluide répandu sur un ellipsoïde à trois axes, de petites excentricités, et soumis à l'attraction du noyau ellipsoïdal, ainsi qu'à celle de sa propre masse. (65-86).

Radicke (*A.*). — Sur les valeurs fondamentales de l'intégrale hypergéométrique générale. (87-99).

Weiler (*A.*) — Additions à mes Mémoires sur l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre. (100-125).

Lübeck (*Gust.*). — Le choc élastique de deux atomes déduit des principes de la Mécanique. (126-129).

Enneper (*A.*). — Sur quelques intégrales définies. (129-132, 195-202).

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 214.

Giesen (*A.*). — Essai d'une représentation mathématique des ondes fluides. (133–150).

I. Ondes planes dans un fluide soumis à la seule action de la pesanteur. — II. Ondes cylindriques dans un fluide soumis à la seule action de la pesanteur.

Biehringer. — Sur les courbes tracées sur les surfaces de révolution. (*Suite*). (151-182).

Voir *Zeitschrift*, t. XVIII et XXI. — *Bulletin*, t. VI, p. 252; XII_2, 219. Courbes de navigation.

Schröder (*E.*). — Sur un théorème de la théorie des fonctions, relatif aux racines de l'unité. (183-190).

Simony (*O.*). — Sur quelques problèmes d'intérêts composés et d'annuités, qui n'ont pas été jusqu'ici résolus généralement. (190-195).

Schur (*F.*). — Les propriétés polaires des courbes planes établies géométriquement. (220-233).

Weihrauch (*K.*). — Nombre des solutions de l'équation la plus générale du premier degré à quatre inconnues. (234-243).

Enneper (*A.*). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques aux coniques sphériques. (244-257).

Kostka. — Sur une intégrale définie. (258-261).

Weiler (*A.*). — Une représentation du complexe tétraédral sur l'espace ponctuel. (261-267).

Gosiewski (*W.*). — Sur le potentiel d'élasticité et sur un théorème qui s'y rapporte. (267-273).

Prix proposés par la Société Jablonowski à Leipzig (Section des Sciences mathématiques et physiques). (273-276).

Voir *Bulletin*, I_2, 220, pour les années 1877-1879.

Année 1879. — Achever les calculs des perturbations complètes de Jupiter d'après les méthodes indiquées par Hansen.

Veltmann (*W.*). — Contribution aux principes de la théorie des invariants. (277-298).

Matthiessen (*L.*). — Sur une méthode pour le calcul des six points cardinaux d'un système centré de lentilles sphériques. (299-310).

Giesen (*A.*). — Forme d'un anneau fluide homogène tournant autour d'un corps central. (311-323).

§ 1. Remarques préliminaires. — § 2. Comparaison du potentiel d'un anneau avec celui d'un cylindre de même section et de longueur infinie. — § 3. Potentiel d'un cylindre elliptique de longueur infinie, pour les points intérieurs. — § 4. Formation et étude des équations d'équilibre. — Remarques finales sur les anneaux de Saturne.

Erdmann (*G.*). — Étude des variations d'ordres supérieurs des intégrales simples. (324-331).

Giesen (*A.*). — Sur l'équilibre d'un fluide pesant, attiré vers un point fixe. (332-335).

Gosiewski (*W.*). — Sur la loi de Mariotte. (336-338).

Schlegel (*V.*). — Méthode approximative pour la construction d'un polygone régulier de n côtés et pour la division d'un angle donné en n parties égales. (339-340).

Wiener (*Chr.*). — Sur l'intensité du rayonnement solaire sur la Terre, suivant les diverses latitudes et les diverses saisons. (341-368).

Détermination de la quantité de rayons solaires qui tombent, dans un élément de temps, sur un élément de la surface terrestre. — Variations de l'intensité du rayonnement pendant la durée d'un jour. — Intensité du rayonnement pendant un jour, à diverses saisons de l'année. — Intensité du rayonnement pour l'année entière et pour diverses portions de l'année. — Comparaison des résultats obtenus par une autre voie ou par d'autres auteurs. — Intensité du rayonnement pour diverses parties de la surface terrestre pendant certaines parties de l'année.

Müller (*R.*). — Sur les courbes et les surfaces qui sont leurs propres enveloppes dans un sytème de courbes ou de surfaces variables en restant semblables à elles-mêmes. (369-376).

Thieme (*H.*). — Sur les surfaces du second degré pour lesquelles deux surfaces du second degré sont polaires réciproques. (377).

Krey (*H.*). — Sur une proposition de la théorie des courbes algébriques. (396-400).

Helm (*G.*). — Sur la sommation par parties. (400-402).

Formule analogue à l'intégration par parties.

Schlegel (*V.*). — Démonstration de la loi d'Euler [illegible] tion des valeurs approchées des fractions contin[illegible]

PARTIE HISTORIQUE ET BIBLIOGRAPHIQUE.

Cantor (*M.*). — Études gréco-indiennes. (1-23).

La conclusion de ces intéressantes recherches est que le dévelop Mathématiques chez les Hindous d'une part, d'autre part chez les Grecs lièrement chez les Alexandrins, n'a pas eu lieu sans une influence réci deux peuples l'un sur l'autre.

Hamburger. — Théorie des équations aux dérivées partie premier ordre, par P. MANSION. (*Compte rendu*). (41-

Nöther (*M.*). — Vorlesungen über Geometrie von ALFRED bearbeitet und herausgegeben von Dr F. LINDEMANN (*Compte rendu*). (72-82).

Korteweg (*D.-J.*). — Sur les recherches d'ARWED WALTE tives à la Mécanique moléculaire. (93-106).

Hultsch (*F.*). — Sur le globe céleste d'Archimède. (106-

Cantor (*M.*). — I sei cartelli di matematica disfida prim intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche dovico Ferrari coi sei controcartelli in riposta di Nicolo T Raccolti, autografati e pubblicati da Enrico Giordani Bol (*Compte rendu*). (133-150).

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME PREMIER.

ERRATA.

Page 240, à propos des travaux de M. Purser, nous aurions dû mes travaux, sur le même sujet, de M. Desboves (*Théorie des normales aux second ordre*) et de M. Laguerre (*Comptes rendus de l'Académie des Sci*

Page 338, ligne 19, *au lieu de l'inégalité* $a - b - c + e > 0$, *lisez* ae -

Page 343, ligne 25, *au lieu de* $\frac{4\pi^3}{g}$, *lisez* $\frac{\pi^2}{g}$.

Page 344, ligne 17, *au lieu de* $\frac{4\pi^2}{g}$, *lisez* $\frac{\pi^2}{g}$.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME I; 1877. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME I.

Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME I; 1877. — SECONDE PARTIE.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. T. VIII-IX; 1875-1876. — 50-51 et 242-244.
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXXXI-LXXXIV; 1875-1877. — 25-50 et 283-309.
Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Années 1858-1873. — 90-97.
Giornale di Matematiche, pubblicato da G. Battaglini. T. XIV; 1876. — 178-183.
Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par J. Liouville et continué par H. Resal. T. II; 1876. — 327-338.
Journal des Actuaires français. T. I-V; 1872-1876. — 309-316.
Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Ny följd. T. IX (2e part.), T. X-XII; 1870-1873. — 69-71.
The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. T. XXXI-XLIV; 1866-1872. — 123-146.
Mathematische Annalen, begründet von A. Clebsch und C. Neumann, gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. T. IX-XI; 1876-1877. — 224-233.
Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8°. T. XXII-XXV; 1872-1875. — 65-68.
Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse. 7e Série, t. IV-VII; 1872-1875. — 79-80.
Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 1re Série, t. IX-X; 2e Série, t. I; 1873-1876. — 167-169.
Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége. 2e Série, t. IV-V; 1873-1874. — 68-69.
Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. 3e Série, t. III-VI; 1873-1875. — 81-82.
The Messenger of Mathematics, edited by W.-A. Whitworth, C. Taylor, W.-J. Lewis, R. Pendlebury, J.-W.-L. Glaisher. 2e Série, t. I-VI; 1871-1877. — 338-355.
Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Années 1875-1876. — 183-187 et 268-269.
Nieuw Archief voor Wiskunde, uitgegeven door het Genootschap, onder de Zinspreuk: *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*. T. I-II; 1875-1876. — 12-15.
Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Brisse. 2e Série, t. XV (suite); 1876. — 281-283.
Nouvelle Correspondance mathématique, rédigée par E. Catalan. T. II; 1876. — 269-277.
Nova acta regiæ Societatis Scientiarum Upsalensis. 3e Série, t. VIII-IX; 1871-1875. — 76-78.
Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. T. XXVIII-XXXII; 1871-1875. — 71-76.
Pamiętnik Towarzystwa nauk ścisłych w Paryżu. T. IV-VIII; 1874-1876. — 221-224
Philosophical Transactions of the Royal Society of London. T. CLXIII-CLXV; 1873-1875. — 187-190.
Proceedings of the London Mathematical Society. T. IV (fin)-VII; 1873-1876. — 197-202.
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. T. VIII; 1872-1875. — 97-101.
Proceedings of the Royal Society of London. T. XXII-XXIII; 1873-1875. — 101-109.
Publicationen der Astronomischen Gesellschaft. Nos I-XIII; 1865-1874. — 202-207.
Publications de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark. 1874-1876. — 193-196.
The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. T. XIII; 1875. — 233-241.
Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. 2e Série, t. III-VII; 1870-1874. — 83-90.
Rivista scientifico-industriale, compilata da G. Vimercati. T. V-VII; 1873-1875. — 109-114.
Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. T. LXIX-LXXI; 1874-1875. — 114-119.



TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.



FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME I.

Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.










STORAGE A

